

高周波電場下の Fowler-Nordheim 放出電流の振舞い

高田耕治

2008年8月20日、2015年10月13日改訂

概要

金属表面の微視的な静電場 E_m によって放出される単位面積当たりの Fowler-Nordheim 放出電流 [1] は、金属の仕事関数を ϕ として $\phi^{1.5}/E_m$ に比例する冪をもつ指数関数にある係数がかかったものとして表わされる。この係数には E_m^2/ϕ という項が含まれているが、高周波電場の下での (平均) 放出電流では、この項は $E_m^{2.5}/\phi^{1.75}$ に改めなければならないとされる [2]。しかしこの論文にはその根拠が明示されていないので、*1 これについて数値計算も援用しながら検討した結果をまとめてみた。

1 Fowler-Nordheim 電界放出電流

静電場のかかった金属表面から、伝導電子がトンネル効果によりポテンシャル障壁を抜けて外部へ放出される確率を取扱う Fowler-Nordheim 理論によれば、放出電流密度 $[A/m^2]$ は、金属の仕事関数を $\phi [eV]$ として

$$i_{dc} = FE_m^2 \exp(-G/E_m) \text{ Am}^{-2} \quad (1)$$

で与えられる。ただし

$$\begin{aligned} F &= 1.54 \times 10^{-6} \times 10^{4.52\phi^{-0.5}} \phi^{-1} \\ G &= 6.53 \times 10^9 \phi^{1.5} \end{aligned} \quad (2)$$

である。また表面電場を $E_m [V/m]$ と表わしたが、添字 m は微視的に見たものであることを示す。これは、実際の金属加工物の表面が、加工過程の履歴に依存する様々な微視的突起が散在し、滑らかな表面を仮定した巨視的電場 (以下で E_M としよう) よりもはるかに大きい表面電場になっていると考えられるからである。

従って、一般に測定される放出電流は巨視的電場 E_M よりも、個々の突起で増大した微視的電場 E_m に左右されるはずである。それによる増大率は微視的突

起の形状や性質に依存するが、通常は被測定物全体にわたる平均的な増大係数 (field enhancement factor) を β とおいて

$$E_m = \beta E_M \quad (3)$$

という関係を仮定し、解析が進められる。実際、このモデル化はかなり尤もらしく、多くの被測定物で高電圧馴らし過程 (コンディショニング) が進むと当初数百から数千が普通の β が数十まで下がる。またそれに伴って全電流も急激に減少する。 β の低下はコンディショニングで大きな β をもつ突起が溶融、消滅し滑らかな表面に近づいたことの結果を表わすようである。また全電流の減少も突起の数の減少で説明できる。

ここで上の式に現れる諸数値の具体的な大きさを見ておく。多くの金属では仕事関数は $\phi \sim 5 eV$ 辺りに集中しているが、典型例として銅の値 [3]

$$\phi = 5.02 eV$$

を使い、上の係数の大きさを見ておこう。そうすると

$$\begin{aligned} F &= 3.193 \times 10^{-5} \text{ AV}^{-2} \\ G &= 7.345 \times 10^{10} \text{ Vm}^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

であって、式 (1) は

$$i_{dc} = 3.193 \times 10^{-5} \beta^2 E_M^2 \exp\left(-\frac{7.345 \times 10^{10}}{\beta E_M}\right) \text{ Am}^{-2} \quad (5)$$

*1 今回、その根拠を示すレポートを見つけたので追記した。

となる。

2 高周波電場での放出電流

角周波数 ω の高周波電場の場合は、式 (1) で単純に E_m を

$$E_m \cos \omega t \quad (6)$$

に置きかえ、 $\cos \omega t$ が正となる時間の電流密度を計算すればよいと考えられる。

その場合、まず気になるのはポテンシャル障壁を通過する伝導電子の走行時間 τ である。Kittel の教科書によれば銅における伝導電子の平均速度は約

1.6×10^6 m/s である。一方、フェルミ面での障壁の厚さは $\sim \phi/eE_m$ 程度である。これは電界放出が問題となる $E_m \gtrsim 10$ MV/m では $\lesssim 0.5 \mu\text{m}$ である。従って $\tau \lesssim 0.3$ ps となる。ところで高周波として 30 GHz 以上の周波数は考えないとすれば、 τ は周期の 1% 以下となるので、トンネル効果は瞬時的とみなせるであろう。

このような情況のもとでは式 (1) での静電場の高周波電場による置きかえが認められるであろう。そうすれば電流密度 i_{rf} は高周波位相 $\psi \equiv \omega t$ の $-\pi$ から π までの一周期について

$$i_{rf} = \begin{cases} F\beta^2 E_M^2 \cos^2 \psi \exp\left(-\frac{G}{\beta E_M \cos \psi}\right) & 0 \leq |\psi| \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq |\psi| \leq \pi \text{ のとき} \end{cases} \quad (7)$$

で与えられることになる*2。

ここで式の見通しをよくするために、 i_{rf} を i_{dc} で規

格化した i_n を考えよう。すなわち

$$i_n \equiv \frac{i_{rf}}{i_{dc}} = \begin{cases} \cos^2 \psi \exp\left[-2a^2 \left(\frac{1}{\cos \psi} - 1\right)\right] & 0 \leq |\psi| \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq |\psi| \leq \pi \text{ のとき} \end{cases} \quad (8)$$

である。ただし

$$a \equiv \sqrt{\frac{G}{2\beta E_M}} \quad (9)$$

とした。式 (8) を見ると i_n の高周波位相 ψ についての拡がりには a の値に大きく左右されることが分かる。上述のような G の値とともに、現実の加速空洞では E_M は大きくとも数百 MV/m を越えないであろうと仮定すれば、 $a^2 \gg 1$ として良いであろう。そうすると、式 (8) は $|\psi| \lesssim 1/a$ の範囲を越えると急速に 0 に収束する関数となり、 ψ^2 までの項をとった

$$i_n \approx e^{-a^2 \psi^2} \quad (10)$$

が十分よい近似式になる。

さて加速空洞のコンディショニングで通常観測されるのは平均電流

$$\bar{i}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i_n d\psi \quad (11)$$

である。これに式 (10) を代入すると

$$\begin{aligned} \bar{i}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-a^2 \psi^2} d\psi \\ &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \psi^2} d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\beta E_M}{G}} \end{aligned} \quad (12)$$

という近似式が得られる。この近似式の精度を確かめるために、銅の仕事関数と 10^5 V/m から 10^{11} V/m の範囲のピーク電場についての値を、定義の式 (11) の Mathematica による数値積分 (NIntegrate 操作) で得られたものと比較したのが表 1 である。これから分かるように $\beta E_M = 1 \times 10^8$ V/m までは \bar{i}_n による近似は良さそうである。しかし $\beta E_M = 1 \times 10^9$ V/m 以上になると、 $\pi/2 \leq |\psi| \leq \pi$ における $e^{-a^2 \psi^2}$ の積分の寄与が無視できなくなって \bar{i}_n からのずれが目立つようになる。

*2 文献 [4] に簡単な言及がある。

表 1 銅 ($\phi = 5.02 \text{ eV}$) についての規格化された電場放出電流の定義式による値と近似式による値との比較

βE_M [V/m]	$\sqrt{\frac{G}{2\beta E_M}}$	定義式 $\overline{i_n}$	近似式 $\overline{i'_n}$	$\overline{i_n}/\overline{i'_n}$
1×10^5	6.05995×10^2	4.65505×10^{-4}	4.65506×10^{-4}	0.999998
1×10^6	1.91633×10^2	1.47203×10^{-3}	1.47206×10^{-3}	0.999980
1×10^7	6.05995×10^1	4.65403×10^{-3}	4.65506×10^{-3}	0.999779
1×10^8	1.91633×10^1	1.46882×10^{-2}	1.47206×10^{-2}	0.997799
1×10^9	6.05995×10^0	4.55626×10^{-2}	4.65506×10^{-2}	0.978776
3×10^9	3.49871×10^0	7.58664×10^{-2}	8.06280×10^{-2}	0.940944
1×10^{10}	1.91633×10^0	1.23738×10^{-1}	1.47206×10^{-1}	0.840577
3×10^{10}	1.10639×10^0	1.72698×10^{-1}	2.54968×10^{-1}	0.677332
1×10^{11}	6.05995×10^{-1}	2.14651×10^{-1}	4.65506×10^{-1}	0.461113

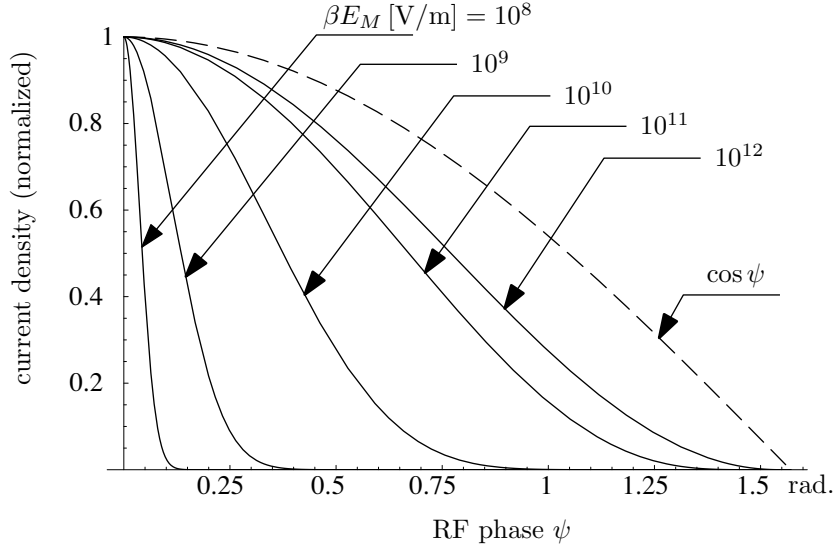


図 1 式 (8) で計算した電流密度の時間変化

実際に高周波の半周期での電流密度の時間変化を見るために式 (8) を計算したものが図 1 である。

さて $\overline{i'_n}$ が良い近似とみなせる $\beta^2 E_M^2 = 1 \times 10^8 \text{ V/m}$ までの電場で $\overline{i_{rf}}$ を表すと

$$\overline{i_{rf}} = \overline{i_n i_{dc}} \approx \overline{i'_n i_{dc}} = 7.603 \times 10^{-12} \times 10^{4.52\phi - 0.5} \frac{\beta^{2.5} E_M^{2.5}}{\phi^{1.75}} \exp\left(-\frac{6.53 \times 10^9 \phi^{1.5}}{\beta E_M}\right) \quad (13)$$

という式が得られる。これは J. Wang と G. Loew に
より SLAC-PUB-7684 (1996) で導かれたものと、最
初の係数 7.603 を除いて一致する*3。

しかしそれ以上の電場 (上の表の最後の 5 点) でも式
(13) の形を強引に適用してみる。その場合、係数 7.603
は最後の 5 個の $\overline{i_n/i'_n}$ の幾何平均を乗ずることにして、
その幾何平均を表 1 から求めると 0.7528 となること
が分かる。従って係数は $0.7528 \times 7.603 = 0.5724$ と
なり、これで Wang と G. Loew の式とほぼ完全に一
致することになる。SLAC-PUB-7684 では単に “The
integration can be solved approximately...” と書か
れているのは、このような背景に基づいているよう
である*4。

もしこの推論が当たっているとすると、平均加
速電場が 100 MV/m に近い領域での測定で Fowler-

Nordheim プロットを作った場合、測定点群をむすぶ
適合直線の勾配から算出される β が本当に正しいか確
かめる必要がある。そこで銅の仕事関数と $\beta = 51.00$
を仮定して、電流密度を式 (11) により求めてみた。そ
れを図 2 に 6 個の黒丸で示す。これらの黒丸に適合
する直線も同図に示すが、どの黒丸もこれに良く載っ
ていることが分かる。しかも直線の勾配から β を計
算すると $\beta = 51.78$ となって、はじめの仮定に極め
て近い値が得られる。これらの結果から微視的電場
が 10^{11} V/m 程度でも、係数に多少のずれが出てくる
ものの Wang と G. Loew の近似式で十分精度のある
 β 値が得られることが分かった。これは式 (13) の対
数を取ったとき、指数関数の中の E_M^{-1} の項が支配的
で、指数関数に掛かる係数における多少の E_M 依存は
 $\log E_M$ 程度の寄与しか無いためであろう*5。

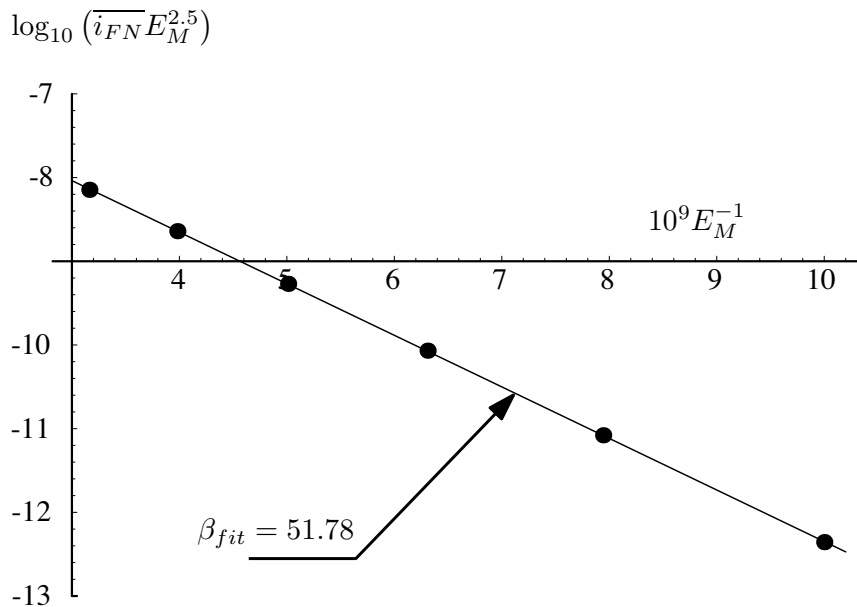


図2 黒丸は銅の仕事関数と $\beta = 51$ を仮定して式 (11) により求めた計算値、ただし E_M は [V/m], $\overline{i_{FN}}$ は
[A/m²] を単位とする。黒丸群は直線上に良く載っている。その勾配が β であるが、この図からは $\beta = 51.78$
という値が得られ、これははじめの仮定 51.00 に極めて近い。

*3 後者では 5.7 と 7.603 の約 75% になっている。

*4 この草稿を認めた後、J. W. Wang が SLAC の Internal Report SLAC/AP - 51(April 1986) “SOME PROBLEMS ON
RFBREAKDOWN IN ROOM TEMPERATURE ACCELERATION STRUCTURE, A POSSIBLE CRITERION” に近似
に使った解析方法を記述していることを見つけた。

*5 Fowler-Nordheim も、観測値の整理から係数の E_M 依存を見出すのは不可能であろうと書いている [1]。

参考文献

- [1] R. H. Fowler and L. Nordheim : *Proc. Roy. Soc. A* **119** (1928) 173.
- [2] J. W. Wang and G. A. Loew : **SLAC-PUB-7684** (SLAC, 1997)
- [3] 物理学辞典, 表 **53**, p.2347 (培風館, 1984)
- [4] H. Schopper *et al* : **Kernforschungszentrum Karlsruhe Externer Bericht 3/68 - 6** (Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe, 1968)