

金属円筒内を一定走行する点電荷の電磁場

(Electromagnetic Fields of a Point Charge in Uniform Motion inside a Metallic Cylinder)

高田耕治

koji.takata@kek.jp

2010年12月13日版

1 はじめに

加速器においてビームが通過する真空チェンバーのかなりの部分は金属円筒が基本形である。リニアックならびに大型リングの直線部やビーム輸送路などでは特にそうである。

荷電粒子が金属円筒内を走行するときに注意しておかなければならない問題の一つは、金属表面に誘起される鏡映の電荷・電流が荷電粒子に及ぼす力の性質である。そのために金属円筒という境界条件で荷電粒子がつくる電磁場を明らかにしなければならない。電子加速器では殆どの場合粒子は極相対論的である、すなわちローレンツ因子 γ が1にくらべはるかに大きいので、粒子のつくる電磁場は進行方向に δ 関数的に圧縮された2次元モデルで十分よい近似であり、方程式も単純である。一方、陽子加速器では γ は1近くから広範囲にわたるので、2次元モデルでは不十分である。ただバンチ長が、通常、円筒径にくらべ圧倒的に長いので、粒子1個の電磁場拡がりのパターンはあまり問題にならないかもしれない。同軸ケーブル内の電磁場と同じで、動径方向への2次元パターンが基本であり、軸方向についてはそのパターンの緩やかな変化を考慮すればよいことになる。

しかしながら基本は単一粒子のつくる電磁場であり、このための方程式をはっきりさせておくことも大切であろう。ところが手近な加速器の本や、あるいは代表的な電磁気学の教科書でこの基本となる電磁場の方程式を明示しているものがなかなか見当たらない。静電場に限っても、荷電粒子と無限金属平面や金属球面との間の問題は初等関数ですむので、鏡映の典型的な例題としてどの電磁気学教科書でも取り扱われる。しかし円筒境界の場合は特殊関数であるベッセル関数を多用しなければならず敬遠されるのであろう。

このような理由から本稿では金属円筒内をその中心軸に平行に一定速度で走る荷電粒子のつくる電磁場の方程式をまとめてみた。出発点は円筒内に止っている荷電粒子のつくる静電場の方程式を明らかにすることである。次に確かめることは、金属円筒が軸方向に一定速度で走っていても導電率が無限大であれば静電場の形は不変であるということである。最後に、円筒すなわち実験室系へ上の静電場をローレンツ変換し、実際に観測される電磁場の方程式を得ることである。

導電率が有限な一般の場合は、静電場の境界条件が大変複雑になる。しかし通常は導電率は十分大きいので、上で得られた磁場で表皮効果を計算しても、結果としての管内電磁場は第1次近似として十分有効であろう。

1.1 本稿での数式標記について

本文に入る前に数式などの標記について簡単にまとめておく。

- 複素数表記には j を使用する： $j = \sqrt{-1} = e^{j\pi/2}$
- Neumann 因子 ϵ_m ： $\epsilon_0 = 1$ ($m = 0$), $\epsilon_m = 2$ ($m > 0$ の整数)
- 空間の一点 P の位置ベクトル \mathbf{r} : 右手系直角座標を x, y, s として

$$\mathbf{r} = (x, y, s) \quad (1)$$

と表す.

- 円柱座標：これとともに s 軸を中心とする円柱座標 ρ, φ も使うが, これらと x, y の関係は

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2)$$

である. 図 1 に示すように点 $\mathbf{r} = (x, y, s)$ における円柱座標系での右手系単位直交ベクトルをそれぞれ $\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\varphi, \mathbf{n}_s$ とする.

- これらを使ってベクトル場, たとえば電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = [E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_s(\mathbf{r})]$ を円柱座標系では

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_\rho \mathbf{n}_\rho + E_\varphi \mathbf{n}_\varphi + E_s \mathbf{n}_s \quad (3)$$

と表す.

- 金属円筒はその中心が s 軸に一致し, 半径は $\rho = a$ とする. 荷電粒子は電荷 q をもち, その位置を \mathbf{r}_q とする. その偏心 $(\mathbf{r}_q)_\perp$ は

$$(\mathbf{r}_q)_\perp = (b, 0, 0), \quad \text{ただし } 0 \leq b < a \quad (4)$$

のように (x, s) 平面にあるものとする.

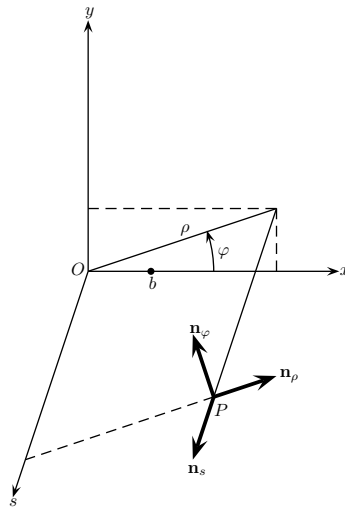


図 1 直角座標 (x, y, z) と円柱座標 (ρ, φ, s) の関係. $\mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\varphi, \mathbf{n}_s$ は円柱座標での点 P における単位直交ベクトル. 荷電粒子の偏心ベクトルは x 軸上の黒点で表わしたように $\mathbf{r}_q = (b, 0, 0)$ とする.

2 金属円筒中心に静止している荷電粒子の静電場

緒論として, 点電荷が金属円筒の系で $\mathbf{r}_q = (0, 0, 0)$ のように原点に静止している場合の, 無限遠で 0 となるポテンシャル ϕ を求めよう. この問題にすぐに応用できそうなものとして文献 [1] の式 (6. 3. 8) がある. それは誘

電率 ε_1 , 半径 a の無限に長い誘電体円柱が, 無限に広がる誘電率 ε_2 の空間で囲まれている場合に, 円柱中心軸上にある点電荷 q による静電場を求める方程式である. それによればポテンシャル場として, 0 次および 1 次の変形ベッセル関数 $I_m(x)$ と $K_m(x)$ をもちいた

$$\phi(\rho, \varphi, s) = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_1} \int_0^\infty \cos(ks) \left[K_0(k\rho) + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) K_1(ka) K_0(ka) I_0(k\rho)}{\varepsilon_1 K_0(ka) I_1(ka) + \varepsilon_2 K_1(ka) I_0(ka)} \right] dk \quad (5)$$

という円筒対称解がえられる. *1 ここで k は長さの逆数の次元をもつ波数である. この式を内部が真空の金属円筒の場合に応用するには $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ (真空の誘電率), $\varepsilon_2 = \infty$ とおけばよい. そうすると金属円筒を接地した場合のポテンシャルは

$$\phi(\rho, \varphi, s) = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0} \int_0^\infty \cos(ks) \left[K_0(k\rho) - \frac{K_0(ka) I_0(k\rho)}{I_0(ka)} \right] dk \quad (6)$$

となる.

さて円筒座標系での電場 $\mathbf{E} = (E_\rho, E_\varphi, E_s)$ は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial\rho}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, -\frac{\partial\phi}{\partial s} \right) \quad (7)$$

に式 (2) を代入して求められる. ここで興味があるのは円筒表面 ($\rho = a$) での電場であるが, 表面に直角な E_ρ 成分だけであり, E_φ と E_s はともに 0 である. しかも電荷は中心軸にあるので E_r は φ に依存せず, また s については偶関数となる. 結局, 表面電場 E_r は

$$\begin{aligned} E_\rho(a, \varphi, s) &= -\left. \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right|_{\rho=a} \\ &= -\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0} \int_0^\infty k \cos(ks) \left[K_0'(ka) - \frac{K_0(ka) I_0'(ka)}{I_0(ka)} \right] dk \\ &= \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0} \int_0^\infty k \cos(ks) \left[K_1(ka) + \frac{K_0(ka) I_1(ka)}{I_0(ka)} \right] dk \\ &= \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2} \int_0^\infty \frac{\cos(ks)}{I_0(ka)} d(ka) \end{aligned} \quad (8)$$

となる. なお上式 2 行目以降の変形には, 公式集 [3, p.173-174] に示されている変形ベッセル関数の漸化式および微分の諸関係式

$$dI_0(z)/dz = I_1(z), \quad dK_0(z)/dz = -K_1(z), \quad I_0(z) K_1(z) + I_1(z) K_0(z) = 1/z \quad (9)$$

を使った. 式 (8) はまた, $I_m(z)$ の解析接続公式

$$I_m(e^{n\pi j} z) = e^{mn\pi j} I_m(z) \quad (10)$$

の $m = 0$ および $n = 1$ の場合の関係式 $I_0(-z) = I_0(z)$ を使って

$$E_\rho(a, \varphi, s) = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 a} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ks)}{I_0(ka)} dk = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 a^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ks)}{I_0(ka)} d(ka) \quad (11)$$

とも表される.

ここで表面電場の s 座標に沿っての曲線形を調べるために, 式 (8) の最後の行の無次元化した積分項に $\sqrt{2/\pi}$ を乗じたフーリエ余弦変換の形の式

$$F_c(s/a) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(ka \cdot s/a)}{I_0(ka)} d(ka) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ka \cdot s/a)}{I_0(ka)} d(ka) \quad (12)$$

*1 佐藤康太郎氏の指摘によれば文献 [1, 式 (6,3,8)] の公式の右辺は 4π 倍大きすぎるので, ここでは修正しておいた.

を Mathematica で計算してみよう. その結果は図 2 に示すように $s/a = 0$ にかんして対称で滑らかな曲線となる. そのピーク値は ~ 1.662 であり, 半値になる点は $s/a \sim \pm 0.654$ である.

さて, 式 (8) の電場に ε_0 を乗じた電束密度を円筒内表面全体にわたって積分したものは, 保存則によって源の電荷量 q に等しくなければならない. すなわち

$$q = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{2\pi} ad\varphi (\varepsilon_0 E_\rho) \quad (13)$$

が成り立つことを確かめよう. 式 (13) は, 式 (11) を代入して

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(s/a) d(s/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ka \cdot s/a)}{I_0(ka)} d(ka) \right] d(s/a) \quad (14)$$

と書きなおせる. ところで式 (12) は関数 $f(x) = 1/I_0(x)$ のフーリエ偶変換である. Fourier の余弦公式 [2, p.262]

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(x) \cos(yx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(yx) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(xu) du \right] dx \quad (15)$$

に照らし合わせると, 式 (14) の右側 2 つの式は, 式 (15) で $y = 0$ としたもの, いいかえれば $f(0)$ であることが分かる. 今の場合 $f(x) = 1/I_0(x)$ であり, 定義により $I_0(0) = 1$ であるので式 (13) が証明されたことになる. 実際に Mathematica 計算を行うと良い精度で式 (13) が成立しているのが確かめられる.

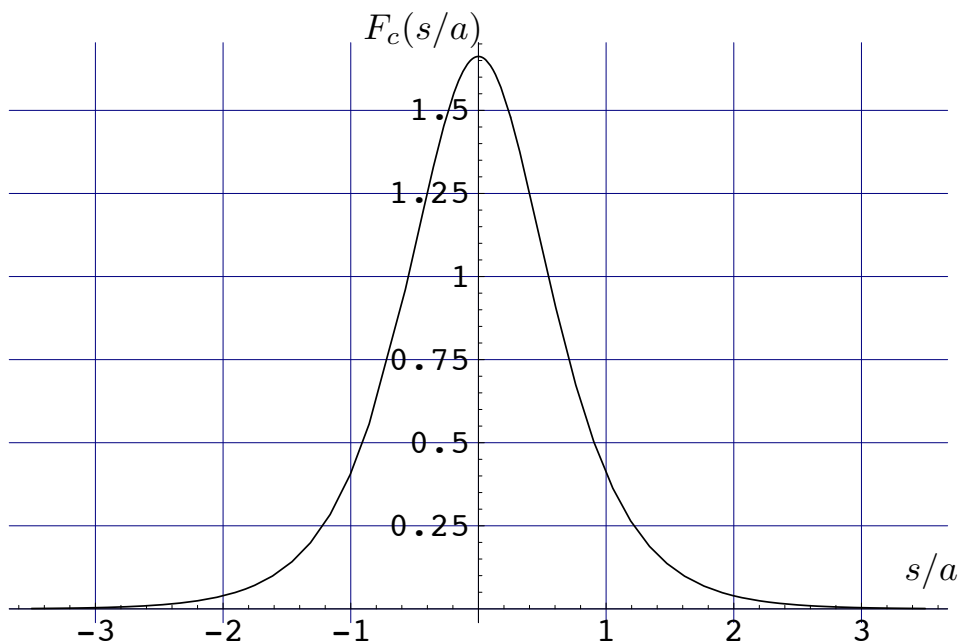


図 2 中心軸上にある点電荷のつくる表面電場に比例する $F_c(s/a)$ のグラフ:ピーク値は ~ 1.662 , 半値となる s/a は $\sim \pm 0.654$.

3 円筒内の任意の位置にある点電荷の電場

点電荷が中心軸から偏移した場合の円筒内静電ポテンシャルは、文献 [4, p.188] に与えられている*2。それによれば、点電荷の円柱座標を $r = b, \varphi = 0, s = 0$ とし、またベッセル関数 $J_m(x) = 0$ の $x > 0$ での n 番目の根を χ_{mn} として

$$\phi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) e^{-\chi_{mn}|s/a|} \frac{J_m(\chi_{mn}b/a) J_m(\chi_{mn}\rho/a)}{\chi_{mn} [J_{m+1}(\chi_{mn})]^2} \quad (16)$$

という式で与えられる。円筒表面で接地電位が $\phi = 0$ になっていることは容易に確かめられる。

式 (16) は、点 $\mathbf{r}_q = (b, 0, 0)$ にデルタ関数的に分布する電荷密度 $q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)$ の静電ポテンシャル場を金属円筒境界内部のためのグリーン関数

$$\cos(m\varphi) e^{-\chi_{mn}|s/a|} J_m(\chi_{mn}\rho/a) \quad (17)$$

で展開したものである。指標 (m, n) それぞれについてこの式は、 $s = 0$ 平面上の面電荷分布による電位を表わし、その s 方向微分は $s = 0$ において不連続である。この $s = 0$ における s 方向微分に ϵ_0 を乗じた

$$D_s^{(m,n)}(\rho, \varphi, 0^\pm) = \pm \frac{q}{2\pi a^2} \epsilon_m \cos(m\varphi) \frac{J_m(\chi_{mn}b/a) J_m(\chi_{mn}\rho/a)}{[J_{m+1}(\chi_{mn})]^2} \quad (18)$$

は、面電荷密度分布による $\pm s$ 方向の電束密度をそれぞれ表す。全ての指標 (m, n) にかんして和を取ると、点電荷のある場所以外での電束密度ベクトルの不連続性は消失し、点電荷の場所でのみ $q/2$ の電束が $\pm s$ に向かう様子を表わす式となる。

ここで式 (16) のポテンシャル ϕ を角度 φ のための指標 m ごとの成分にわけ、それぞれが作る円筒表面上の電場の形を調べてみよう。すなわち

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{(m)} \quad (19)$$

として

$$\phi^{(m)} = q \frac{\epsilon_m \cos(m\varphi)}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi_{mn}|s/a|} \frac{J_m(\chi_{mn}b/a) J_m(\chi_{mn}r/a)}{\chi_{mn} [J_{m+1}(\chi_{mn})]^2} \quad (20)$$

から導かれる ρ 成分の電場 (他の成分は 0 である)

$$E_\rho^{(m)} \equiv - \left. \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} \quad (21)$$

についてである。零点の定義

$$J_m(\chi_{mn}) = 0 \quad (22)$$

およびベッセル関数の微分と漸化式の関係 [3, p.159]

$$\frac{dJ_m(x)}{dx} = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) \quad (23)$$

*2 本稿を整理中に文献 [8] を通じて Bouwkamp の論文 [9] で類似の議論がなされていることを見つけた。しかし関数計算ソフトが発達した今日においては論旨の展開が冗長にすぎると思われる。

を使えば, m 番目の成分のつくる表面電場は

$$\begin{aligned} E_\rho^{(m)}(\varphi, s/a) &= -q \frac{\epsilon_m \cos(m\varphi)}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi_{mn}|s/a|} \frac{J_m(\chi_{mn}b/a) (-\chi_{mn}/a) J_{m+1}(\chi_{mn})}{\chi_{mn} [J_{m+1}(\chi_{mn})]^2} \\ &= q \frac{\epsilon_m \cos(m\varphi)}{2\pi\epsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi_{mn}|s/a|} \frac{J_m(\chi_{mn}b/a)}{J_{m+1}(\chi_{mn})} \end{aligned} \quad (24)$$

という式に従う. なお軸上の電荷の場合 ($b/a = 0$) には $m = 0$ 以外の $E_\rho^{(m)}$ が 0 となっていることも確かにこの式は示している.

3.1 中心軸上電荷の場合について第 2 節の結果と比較する

ここでとくに式 (24) に $b = 0$ および $m = 0$ を代入して得られる中心軸上電荷の場合についての式

$$E_\rho^{(0)}(s/a) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\chi_{0n}|s/a|}}{J_1(\chi_{0n})} \quad (25)$$

が第 2 節で求めた式 (8) あるいは (11) に同等であることをここで証明しておこう.

そのために式 (12) の被積分関数の分子 $\cos(ks) [= \cos(|s/a| \cdot ka)]$ を $e^{j|s/a| \cdot ka}$ へと拡張し,

$$F_0(s/a) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j|s/a| \cdot ka}}{I_0(ka)} d(ka) \quad (26)$$

というフーリエ変換型の積分を求めてみよう. なお式 (11) の $F_c(s/a)$ はこの解の実数部分 $\text{Re}[F_0(s/a)]$ である. 積分は $z = x + jy$ として z 平面でおこなう. 積分経路には図 3 に示すように実数軸を半径無限大の上半円で閉じたものを考える. この半円周上での積分は 0 であるので, 問題はこの閉曲線路の内部にある特異点およびその留数を知ることである.

特異点はすべて $I_0(z) = 0$ となる点である. 変形ベッセル関数は, 定数係数を除けばベッセル関数の変数を $z \rightarrow jz$ とすることで定義されるので, 問題の特異点はもとのベッセル関数の零点の z 複素面上での移動先を明らかにすることにより確定できる. そこでこれを定義式 [5, p.77]

$$\begin{aligned} I_m(z) &= e^{-\frac{1}{2}m\pi j} J_m\left(ze^{\frac{1}{2}\pi j}\right) \quad \left(-\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi\right) \\ I_m(z) &= e^{\frac{3}{2}m\pi j} J_m\left(ze^{-\frac{3}{2}\pi j}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \pi\right) \end{aligned} \quad (27)$$

で調べてみよう*3.

まず x が 0 または正の実数であるときの $J_0(x) = 0$ の実数根 (零点) を χ_{0n} ($n = 1, 2, \dots$) と小さい順に番号づけて表わす. 最小は $\chi_{01} = 2.4048\dots$ である. 負の実数については, 式 (A.2) から導かれる

$$J_0(xe^{\pi j}) = J_0(x) \quad (28)$$

という性質をつかえば, $-\chi_{0n}$ も零点であることがわかる. さて $\arg \chi_{0n} = 0$, $\arg \chi_{0n}e^{\pi j} = \arg -\chi_{0n} = \pi$ であるので, 式 (27) の上段の関係が適用され, $J_0(x)$ の実軸上の零点に由来する $I_0(z)$ の零点は

$$\chi_{0n}e^{\pm\frac{1}{2}\pi j} = \pm j\chi_{0n} \quad (29)$$

*3 岩波の数学公式 III[3, p.170] では, $(\frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \pi)$ でのベッセル関数の変数を $-jz$ としているのは誤りである. またそれぞれの $\arg z$ の上限で等号が抜けているが, これは同書のベッセル関数の定義式では (変数 \neq 負の実数)[3, p.145] という不完全な定義を与えているからである. これは Watson[5, p.45] に従って $(-\pi < \arg \text{変数} \leq \pi)$ とすべきである.

のように虚数軸上に並ぶことになる. ところで次数 m が -1 より大きい実数であれば, $J_m(z)$ は実数でない零点をもたないという Lommel の定理がある [5, p.482]. したがって $I_0(z)$ の零点は式 (29) で全て尽くされる. これを z 平面上半部について示したのが図 3 である.

さて $dI_0(z)/dz = I_1(z)$ および $I_1(jx) = -jJ_1(-x) = jJ_1(x)$ であるので, 特異点 $z = j\chi_{0n}$ の留数 A_{0n} は

$$A_{0n} = \frac{e^{-|s/a|\chi_{0n}}}{I_1(j\chi_{0n})} = \frac{e^{-|s/a|\chi_{0n}}}{jJ_1(\chi_{0n})} \quad (30)$$

となる. こうして留数の定理から

$$F_0(s/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi j A_{0n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi j \frac{e^{-\chi_{0n}|s/a|}}{jJ_1(\chi_{0n})} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\chi_{0n}|s/a|}}{J_1(\chi_{0n})} \quad (31)$$

が導かれる. これから $F_c(s/a)$ という積分式は

$$F_c(s/a) = \operatorname{Re}[F_0(s/a)] = \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\chi_{0n}|s/a|}}{J_1(\chi_{0n})} \quad (32)$$

という形の級数和に等しくなる.

式 (11) および式 (12) からは

$$E_{\rho}^{(0)}(s/a) = \frac{q}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0 a^2} F_c(s/a) \quad (33)$$

である. ここに式 (32) を代入すれば

$$E_{\rho}^{(0)}(s/a) = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\chi_{0n}|s/a|}}{J_1(\chi_{mn})} \quad (34)$$

となって, 式 (25) と一致することが示された.

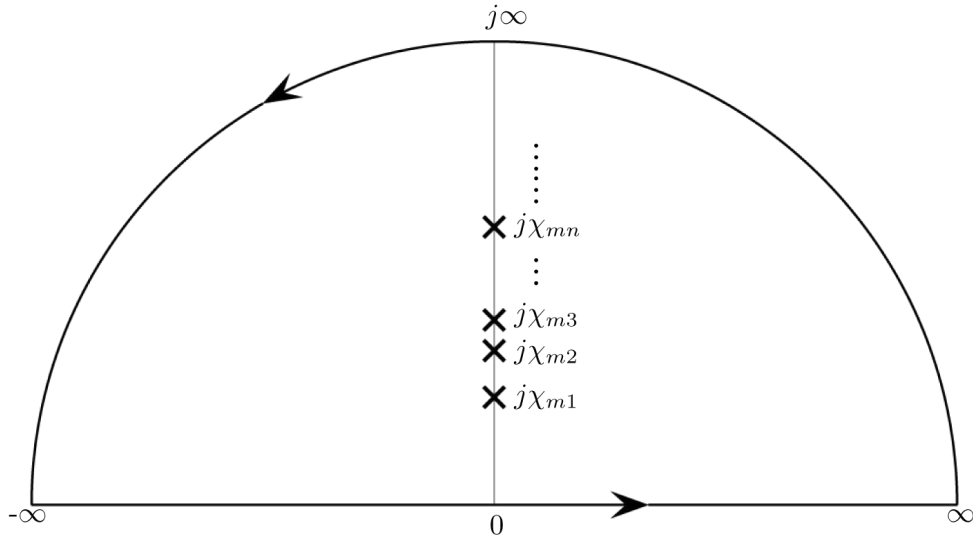


図 3 変形ベッセル関数 $I_m(z)$ の $z = 0$ 以外の零点ならびに式 (26) などの z 平面積分に使う積分路

3.2 偏心の効果も入った一般式

電荷の偏心の大きさをパラメーターにした表面電場の一般式 (24) はベッセル関数で展開した形になっている。これに関数計算が容易である式 (8) あるいは (11) のようなフーリエ変換の形に直してみよう。結果を先に述べれば $m = 0, 1, 2, \dots$ の各成分については

$$E_\rho^{(m)}(\varphi, s/a) \equiv \frac{q \epsilon_m \cos(m\varphi)}{2\pi^2 \epsilon_0 a^2} \int_0^\infty \frac{\cos(ks) I_m(kb)}{I_m(ka)} d(ka) \quad (35)$$

が求められるものである。

この式 (35) が式 (24) と等価なものであることを証明するには、実数 x にたいして、式 (27) および (A.2) から導かれる関係式

$$I_m\left(xe^{\frac{1}{2}\pi j}\right) = e^{-\frac{1}{2}m\pi j} J_m\left(xe^{\pi j}\right) = e^{\frac{1}{2}m\pi j} J_m(x) \quad (36)$$

を使う。これとともに式 (22) を用い、前小節と同様な径路の積分を実行すれば証明は容易に達成される。なお $\delta < 1$ としたとき、 $z = 0$ 近傍では

$$\frac{I_m(\delta z)}{I_m(z)} = \delta^m \left[1 - \frac{1 - \delta^2}{m+1} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots \right] \quad (37)$$

となるので、 $z = 0$ は特異点ではない。

結局次のように、円筒表面電場の式としては面電荷分布のグリーン関数で直接書き下した式 (24) のようなベッセル関数の級数展開式 (38) とともにフーリエ積分変換式 (39) もつかうことができる。

$$E_\rho(a, \varphi, s) = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) e^{-\chi_{mn}|s/a|} \frac{J_m(\chi_{mn}b/a)}{J_{m+1}(\chi_{mn})} \quad (38)$$

$$= \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) \int_0^\infty \frac{\cos(ks) I_m(kb)}{I_m(ka)} d(ka) \quad (39)$$

ここで特に $m = 1$ 成分の表面電場の形を図 2 に示した $m = 0$ 成分のものと比較しておく。そのために式 (12) と同様に式 (39) の中の積分に $\sqrt{2/\pi}$ を乗じた、規格化表面電場曲線ともいえるフーリエ余弦変換式

$$F_c(s/a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(ks) I_m(kb)}{I_m(ka)} d(ka) \quad (40)$$

をつかう。ただし式 (37) でわかるようにこれは $(b/a)^m$ に比例するので、直接比較につかうのは $(b/a)^{-m} F_c$ とする。Mathematica で計算した結果が図 4 である。ここで b/a を 0.1 および 0.2 としたが、形はほとんど変わらない。しかし $m = 0$ 成分の形より幅が細くなっている。

4 ポテンシャル場をフーリエ変換形式で表示する

ここまでは円筒表面の電場に議論を集中してきたが、この章では円筒内空間全域にわたるポテンシャルの式について考えてみる。

さて式 (16) では、円筒境界での固有関数であるベッセル関数で 2 重に展開している。これをすでに議論してきたように、関数計算が容易なフーリエ変換式に変えることをこころみる。出発点としてはやはり今村の教科書 [1]

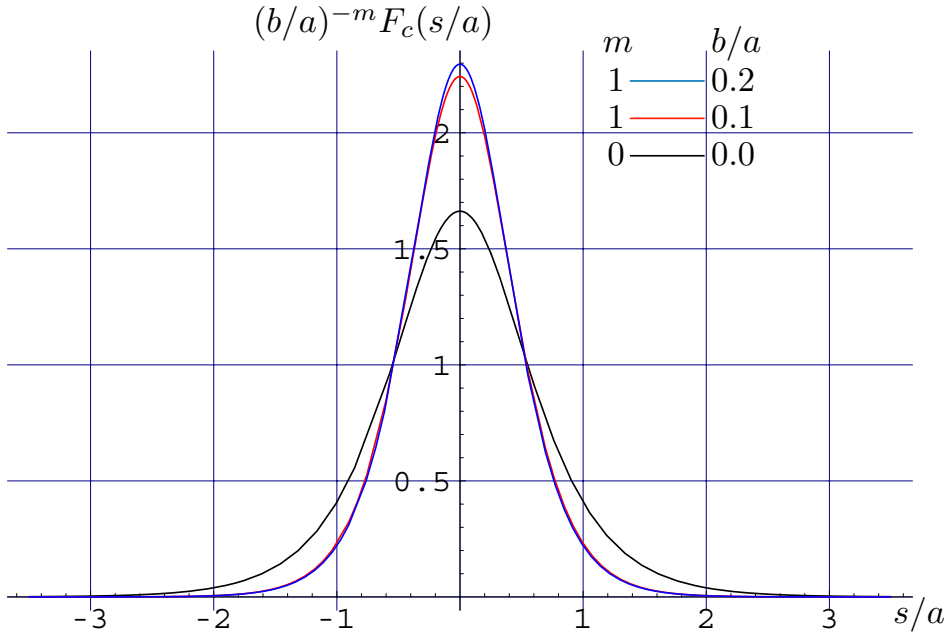


図4 $m = 1$ 成分について、 $(b/a)^{-1}$ を乗じた規格化表面電場曲線. なお b/a は 0.1 (赤) および 0.2 (青) とした. 比較のため図 (2) の $m = 0, b/a = 0$ の曲線も示す.

にある式 (5. 3. 28) で、点源の位置を $\mathbf{r}_q = (b, 0, 0)$ とした式

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2\pi^2 a} \cos(m\varphi) \times \int_0^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{AkK'_m(ka) + BK_m(ka)}{AkI'_m(ka) + BI_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) \cos(ks) d(ka) \quad (\rho > b; \rho \rightarrow b) \quad (41)$$

を使う. なお上式は $a \geq \rho > b$ の場合のものであって、 $a > b > \rho$ では ρ と b を入れ替える. それを文献 [1] にならい ($\rho > b; \rho \rightarrow b$) と標記する. A および B は定数であるが、 $\rho = a$ が金属表面のように Dirichlet 境界であれば $A = 0$, Neumann 境界であれば $B = 0$ である. したがって以下では $A = 0$ とし、さらに電荷を q , 媒質の誘電率を ϵ_0 とした式

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 a} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) \times \int_0^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) \cos(ks) d(ka) \quad (\rho > b; \rho \rightarrow b) \quad (42)$$

が求めるフーリエ変換形式である. そこでこの式 (42) が実際に式 (16) に帰着することを確認しよう.

それには先ず式 (19) で行ったように ϕ を各 m 成分に分けた式

$$\phi^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 a} \epsilon_m \cos(m\varphi) \int_0^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) \cos(ks) d(ka) \quad (\rho > b; \rho \rightarrow b) \quad (43)$$

について、表面電場の場合に再三行ってきたように、積分を k の複素数平面に拡張する。すなわち

$$\phi^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 a} \epsilon_m \cos(m\varphi) \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) e^{jk|s|} d(ka) \right\} \quad (44)$$

$(\rho > b; \rho \rightarrow b)$

として $\{ \}$ のなかの積分を図 3 の径路で評価するわけである。その際無限上半円での積分は 0 であるので、上で行ったように実数軸上の積分を留数の定理にしたがって評価することになる。ここで注意しなければならないのは、 $K_m(z)$ が $\log(z/2)$ 項を含むので、原点 $z = 0$ が分岐点となることである。従って原点付近の積分路は原点を中心とする微小半円で原点の上方向へ避けたものとする。

まず x を正の実数としたときに $I_m(x) \rightarrow I_m(-x)$ と $K_m(x) \rightarrow K_m(-x)$ の解析接続のされ方を知らなければならぬが、それらは

$$\begin{aligned} I_m(xe^{\pi j}) &= e^{m\pi j} I_m(x) \\ K_m(xe^{\pi j}) &= e^{-m\pi j} K_m(x) - \pi j I_m(x) \end{aligned} \quad (45)$$

として与えられる [3, p.171]. これを使えば

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) e^{jk|s|} d(ka) \\ &= \int_0^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) e^{-jk|s|} d(ka) \quad (\rho > b; \rho \rightarrow b) \end{aligned}$$

となるので、式 (44) の $\{ \}$ のなかは

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) e^{jk|s|} d(ka) \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) \cos(k|s|) d(ka) \quad (\rho > b; \rho \rightarrow b) \end{aligned} \quad (46)$$

と変形される。残るのは原点をめぐる微小半円に沿った積分であるが、それはせいぜい $\sim \epsilon \log \epsilon$ であるので $\epsilon \rightarrow 0$ で 0 に収れんし、無視できる。

このような結果から、複素数積分では式 (44) の被積分関数の特異点における留数だけを考えればよい。特異点は分母の $I_m(z)$ の零点群が全てである。すでに述べたように、式 (36) からそれらは

$$z = ka = j\chi_{mn} \quad (47)$$

であって図 3 のようにならぶ。ここで関係式

$$\frac{dI_m(z)}{dz} = \frac{m}{z} I_m(z) + I_{m+1}(z) \quad (48)$$

と式 (47) を使えば、零点 $k = j\chi_{mn}/a$ の近傍では

$$I_m(ka) \approx (ka - j\chi_{mn}) I_{m+1}(j\chi_{mn}) = (ka - j\chi_{mn}) j^{m+1} (\chi_{mn}) \quad (49)$$

となる。また $I_m(ka)$ の項の分子の中の $K_m(ka)$ については

$$K_m(z) I_{m+1}(z) = \frac{1}{z} - I_m(z) K_{m+1}(z) \quad (50)$$

と式 (47) から

$$K_m(j\chi_{mn}) = \frac{1}{j\chi_{mn} I_{m+1}(j\chi_{mn})} = \frac{1}{j^{m+2} \chi_{mn} I_{m+1}(\chi_{mn})} \quad (51)$$

である。これらの式を使えば、被積分関数の留数は

$$\begin{aligned}
A_{mn} &= e^{-\chi_{mn}|s/a|} \left[-\frac{j^m J_m(\chi_{mn}r/a)}{j^{m+1} J_{m+1}(\chi_{mn}) \cdot j^{m+2} \chi_{mn} J_{m+1}(\chi_{mn})} \right] j^m J_m(\chi_{mn}b/a) \\
&= e^{-\chi_{mn}|s/a|} \cdot \frac{J_m(\chi_{mn}r/a) J_m(\chi_{mn}b/a)}{j \chi_{mn} [J_{m+1}(\chi_{mn})]^2}
\end{aligned} \tag{52}$$

($\rho > b; \rho \rightarrow b$)

となる。従って式 (44) の $\{ \}$ の中の実数軸に沿っての積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) e^{jk|s|} d(ka) \\
&= 2 \int_0^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) \cos(k|s|) d(ka) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi j A_{mn} \\
&= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi_{mn}|s/a|} \cdot \frac{J_m(\chi_{mn}\rho/a) J_m(\chi_{mn}b/a)}{\chi_{mn} [J_{m+1}(\chi_{mn})]^2}
\end{aligned} \tag{53}$$

($\rho > b; \rho \rightarrow b$)

となる。これを式 (42) に代入すれば、簡単な計算で式 (16)

$$\phi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) e^{-\chi_{mn}|s/a|} \cdot \frac{J_m(\chi_{mn}b/a) J_m(\chi_{mn}\rho/a)}{\chi_{mn} [J_{m+1}(\chi_{mn})]^2}$$

に帰着することがわかる。

5 金属円筒の軸方向相対運動と表面電場

観測系にたいして一定速度 \mathbf{v} で運動している巨視的物体についての電磁気学は、誘起された電荷密度 ρ が対流電流密度 (convection current) $\rho\mathbf{v}$ として電流密度 \mathbf{J} に寄与する点でやや複雑である [6].

観測系でみた物体のある点の電磁場諸量 (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{J} , ならびに ρ) のマクスウェル方程式と、その点に固定した系で見た電磁場諸量は、座標をローレンツ変換し、rot や div の微分オペレータも変換された座標で定義すれば、同じ形になる。ただし誘電率 ϵ , 透磁率 μ , 伝導率 σ については、物体は自身の運動を「知らない」という意味で、物体が観測系に静止している場合と「同じ大きさ」の量を使うものとする [7].

このような原理にしたがって電磁場諸量の変換方程式が得られるが、特にここで明らかにしておくことは境界条件である。観測系でみた電磁場諸ベクトル \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} は境界面の両側で、 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ および $\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}$ については境界に平行な成分

$$(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\parallel} \quad \text{および} \quad (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})_{\parallel} \tag{54}$$

がそれぞれ連続、 \mathbf{B} については直角な成分

$$\mathbf{B}_{\perp} \tag{55}$$

が連続となる [7, p.287].

今の場合、観測系は荷電粒子に固定されているので、円筒の内側 ($\rho < a$) では $\mathbf{B} = 0$ である。一方、円筒が伝導率無限大の理想的金属とみなせるなら、円筒物質中ではいかなる電磁場も存在せず、従って $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ である。ここで式 (54) の連続条件を考えれば、軸方向に運動する円筒の表面でも $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ でなければならず、それは円筒速度に

よらない。これから円筒が荷電粒子にたいして静止している場合に求めた静電場の解は、円筒がその軸方向に任意の速度で運動している場合にも通用すると言うことができる。

6 電磁場のローレンツ変換

実際に知りたいのは、実験室系に置かれた金属円筒内を荷電粒子が円筒軸に平行に任意の一定速度で走行するときの電磁場である。

まず静止系にたいし物体が一定速度 \mathbf{v} で相対運動をしている場合の、静止系および物体に固定した運動系の間での座標および電磁場の変換式をまとめておこう。座標系としてはとりあえず直交座標系を使い、最後に円筒座標系にうつる。ここで慣例に従って運動系の変数は対応する静止系のものにプライム「'」をつけて表わす。

速度 \mathbf{v} は z 方向にあり、 $v_z = |\mathbf{v}| = v$ とする。ローレンツ因子

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (56)$$

を使えば、時空座標の変換式は

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - vt), \quad ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}z\right) \quad (57)$$

であり、電磁場の変換式は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp}(x', y', z', t') &= \gamma[\mathbf{E}(x, y, z, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(x, y, z, t)]_{\perp} \\ \mathbf{E}'_{\parallel}(x', y', z', t') &= [\mathbf{E}(x, y, z, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(x, y, z, t)]_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp}(x', y', z', t') &= \gamma[\mathbf{B}(x, y, z, t) - (\mathbf{v}/c^2) \times \mathbf{E}(x, y, z, t)]_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel}(x', y', z', t') &= [\mathbf{B}(x, y, z, t) - (\mathbf{v}/c^2) \times \mathbf{E}(x, y, z, t)]_{\parallel} \end{aligned} \quad (58)$$

と与えられる。ポテンシャル場については 4 元ポテンシャル $(A_x, A_y, A_z, j\phi/c)$ が時空座標 (x, y, z, jct) と同じローレンツ変換を受けるので

$$\begin{aligned} A'_x(x', y', z', t') &= A_x(x, y, z, t) \\ A'_y(x', y', z', t') &= A_y(x, y, z, t) \\ A'_z(x', y', z', t') &= \gamma\left[A_z(x, y, z, t) - \frac{v}{c^2}\phi(x, y, z, t)\right] \\ \phi'(x', y', z', t') &= \phi(x, y, z, t) - vA_z(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (59)$$

が一般式である。

さて今の場合、運動系では静電場しかない、すなわち $\mathbf{B}' = 0$ であり、 \mathbf{E}' は t' に依存しない。従って式 (57) および (58) から静止系の電磁場方程式として

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= \gamma E'_x(x', y', z') = \gamma E'_x[x, y, \gamma(z - vt)] \\ E_y(x, y, z, t) &= \gamma E'_y(x', y', z') = \gamma E'_y[x, y, \gamma(z - vt)] \\ E_z(x, y, z, t) &= E'_z(x', y', z') = E'_z[x, y, \gamma(z - vt)] \\ B_x(x, y, z, t) &= -\frac{v}{c^2} E_y(x, y, z, t) \\ B_y(x, y, z, t) &= \frac{v}{c^2} E_x(x, y, z, t) \\ B_z(x, y, z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

が得られる。またポテンシャル場については $\mathbf{A}' = 0$ であり、 ϕ' は t' に依存しない。従って式 (57) および式 (59) から

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z, t) &= 0 \\ A_y(x, y, z, t) &= 0 \\ A_z(x, y, z, t) &= \frac{v}{c^2} \phi(x, y, z, t) \\ \phi(x, y, z, t) &= \gamma^2 \phi'(x', y', z') = \gamma^2 \phi'[x, y, \gamma(z - vt)] \end{aligned} \quad (61)$$

という関係式が得られる。

最後に静止系でみた円筒表面での電磁場および円筒内のポテンシャル場の方程式を円柱座標 $\mathbf{r}(\rho, \varphi, s)$ で書き下す。座標変数間の変換には式 (2) および (57) を使う。今や荷電粒子は運動系にあるので、表面電場については式 (38) および (39) の $E_\rho(a, \varphi, s)$ を $E'_\rho(a', \varphi', s')$ に読みかえ、またポテンシャル場については式 (16) および (42) の $\phi(\rho, \varphi, s)$ を $\phi'(\rho', \varphi', s')$ に読みかえる。しかし運動方向は s 軸に平行であるので、 $\rho' = \rho$ および $\varphi' = \varphi$ としよ。そこで式 (60) および (61) を使えば表面電場は

$$E_\rho(a, \varphi, s, t) = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 a^2} \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) e^{-\chi_{mn}\gamma|(s-vt)/a|} \frac{J_m(\chi_{mn}b/a)}{J_{m+1}(\chi_{mn})} \quad (62)$$

$$= \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 a^2} \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[k\gamma(s-vt)] I_m(kb)}{I_m(ka)} d(ka) \quad (63)$$

であり、ポテンシャル場は

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q, t) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 a} \gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) e^{-\chi_{mn}\gamma|(s-vt)/a|} \frac{J_m(\chi_{mn}b/a) J_m(\chi_{mn}\rho/a)}{\chi_{mn} [J_{m+1}(\chi_{mn})]^2} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 a} \gamma^2 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos(m\varphi) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \left[K_m(k\rho) - \frac{K_m(ka)}{I_m(ka)} I_m(k\rho) \right] I_m(kb) \cos[k\gamma(s-vt)] d(ka) \quad (65) \\ &\quad (\rho > b; \rho \rightarrow b) \end{aligned}$$

となる。

謝辞

菅蒲田義博氏にはベッセル関数について、佐藤康太郎氏にはグリーン関数一般について有益な助言をいただきました。ここに謹んで謝意を表します。

付録 A

(1) オイラーの定数

$$\gamma = 0.57721 \dots \quad (A.1)$$

(2) ベッセル関数 ($m = 0, 1, 2, \dots$) [3]

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n! \Gamma(m+n+1)} \quad (-\pi < \arg z \leq \pi) \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned}
N_m(z) &= \frac{2}{\pi} J_m(z) (\gamma + \log 2) \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{n! \Gamma(m+k)} \left[\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{m+k} \frac{1}{p} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(m-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

($-\pi < \arg z \leq \pi$)

(3) 変形ベッセル関数 ($m = 0, 1, 2, \dots$) [3]

$$\begin{aligned}
I_m(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(m+n+1)} \\
K_m(z) &= (-1)^{m+1} I_m(z) \left(\gamma + \log \frac{z}{2}\right) \\
&\quad + \frac{(-1)^m}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{m+2k}}{n! (n+k)!} \left[\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{m+k} \frac{1}{p} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \frac{(m-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-m}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

(4) 今村の円筒関数用公式集 [1]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} K_0(k |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|) \cos[k(s - s')] dk \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2\pi^2} \cos[m(\varphi - \varphi')] \int_0^{\infty} K_m(k\rho) I_m(k\rho') \cos[k(s - s')] dk \quad (\rho > \rho'; \rho \leftrightarrow \rho') \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} J_0(k |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|) e^{-k|s-s'|} dk \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{4\pi} \cos[m(\varphi - \varphi')] \int_0^{\infty} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k|s-s'|} dk
\end{aligned} \tag{A.5}$$

参考文献

- [1] 今村 勲, 物理とグリーン関数 (岩波全書 **308**, 1978) .
- [2] 数学公式 II (岩波全書 **229**, 1960) .
- [3] 数学公式 III (岩波全書 **244**, 1960) .
- [4] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, 3rd ed. (McGraw-Hill, 1968) .
- [5] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1922) .
- [6] 砂川 重信, 理論電磁気学 (紀伊国屋書店, 1999).
- [7] A. Sommerfeld, *Electrodynamics* (Academic Press, 1964).
- [8] E. Weber, *Electromagnetic Fields, Theory and Applications, Vol. 1 - Mapping and Fields* (John Wiley & Sons, 1950).
- [9] C. J. Bouwkamp and N. G. de Bruijn, *J. Appl. Phys.*, **18** (1947) 573.