

(日本物理学会誌1999年3月号所収)

超弦理論はブラックホールの謎を解けるか？
(Can String Theory Solve the Puzzles of Black Holes?)

夏梅 誠

〒305-0801 茨城県つくば市大穂 1-1
高エネルギー加速器研究機構
素粒子原子核研究所

makoto.natsuume@kek.jp

概要

ブラックホールの半古典的な法則と熱力学の法則の間には、密接な対応がある。たとえば、ブラックホールはエントロピーのようにふるまう量を持つ。この関係が偶然ではないならば、この「エントロピー」は微視的状態の縮退度として導出できるはずである。最近、D-brane と呼ばれる非摂動的物体(ソリトン)を使うことにより、弦理論でこのエントロピーの微視的な解釈に成功した。エントロピーを数係数まで正しく微視的に導出できたのは、史上初めてである。特に、この結果はブラックホールに対しても、通常の量子力学の法則が成り立っていることを示唆している。

1 はじめに

もっとも単純なブラックホールに対応するSchwarzschild 解は、一般相対論の完成からわずか一ヶ月半後に発見された。これはブラックホールの理論的な予言と言えるが、その予言を物理学者が理解したのは半世紀もあとの 60 年代になってからであった。そもそも当時までは、ブラックホールという名前すらなかったほどである。そして予言されて 80 年たった今もなお、我々はブラックホールを理解しているとは言い難い (§2)。しかし近年、素粒子理論でブラックホールを巡る長年の謎の一つが解明されたということで、大きな注目を集めた [1]。以下ではこの発展について紹介したい¹。

¹弦理論の最近の発展についての総合報告としては文献 2、3 を参照。この発展についての総合報告としては、文献 4、5 がある。

とはいえ、ブラックホールの謎が一つ解明されたというだけで、なぜ大きな騒ぎになったのかいぶかしく思われるかもしれない。近年の天文学では、ブラックホールは宇宙の理解に欠かせないものとなっている²。しかし多くの人々にとっては、§2 で述べるブラックホールの謎の解明も、ピンの先で踊る天使の数を数えるのも同じようなものかもしれない。結局のところ、ブラックホールは現在でも通常の意味では発見されているとはいえない。にもかかわらず素粒子理論で大きな騒ぎになったのは、ブラックホールが存在するという事実そのものが、量子力学と矛盾する可能性があるからである。

米谷氏も解説しているように [2]、量子力学と一般相対論は融合が完全にはなされていない。まず第一に重力場はくりこみ不可能である。場の量子論の摂動計算には一般に無限大（紫外発散）があらわれるが、この困難はくりこみと呼ばれる手法によって取り除くことができる。ところが、この手法は一般相対論には使えない。このため、現時点では場の量子論と一般相対論は融合できない。一方、場の量子論とは違う枠組みである弦理論ではこの困難はない。したがって、この問題は場の量子論の枠組みでは今のところ解けないが、量子力学そのものには問題はない。

しかし、過去 25 年の間により大きな問題が出てきた。この問題はインフレーション・パラドックスとして知られているものであるが (§2.2)、ブラックホールの存在そのものが量子力学と矛盾する危険性をはらんでいる。ブラックホールに関する今回の達成は、この問題を完全に解いたわけではないが、ブラックホールも通常の量子力学的な法則に従うことを強く示唆するものである。

つまり、今回の発展は、単にブラックホールに対する我々の理解を深めただけではない。試されているのは、我々が基礎としている量子力学そのものなのである。

2 ブラックホールをめぐる謎

2.1 ブラックホール「熱力学」[7,8]

十分な質量を持つ星は、核反応を終えるともはや重力に対抗できる圧力を生み出すことができなくなる。このため星は不安定になり、重力に引かれて収縮していく（重力崩壊）。そして星がある臨界半径以下に縮むと、星からの光は外には脱出できなくなる。光が外に出られない領域がブラックホールであり、この境界をホライズン（事象の地平面）と呼ぶ。Schwarzschild ブラックホールの場合、この臨界半径は $2GM/c^2$ である（Schwarzschild 半径）。ここで G は 4 次元のニュートン定数、 M はブラックホールの質量、 c は光速である。

²天文学的なブラックホールの観測の現状については文献 6 を参照。

熱力学

ブラックホール

第0法則	熱平衡で T 一定	ホライズンで表面重力 κ は一定
第1法則	$dE = TdS$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G}dA$
第2法則	$dS \geq 0$	$dA \geq 0$
第3法則	$T = 0$ は到達不可能	$\kappa = 0$ は到達不可能

図 1: 熱力学とブラックホールの法則の比較。表面重力は、静止している観測者が感じる重力の強さである。

いったん星がブラックホールになり定常状態に落ちつくと、ブラックホールは質量、角運動量、電荷のみで指定される（ノーヘア定理。）つまり、ブラックホールはもとの星の他の性質、たとえば形や組成などにはよらない。逆に言えば、少数の初期条件にのみ制限されるので、一つのブラックホールには様々な作り方があることになる。

さて、Schwarzschild 半径はブラックホールの質量に比例するため、物質がブラックホールに落ち込むとホライズンの面積は増大する。実際ホライズンの面積 A は、古典的には常に増えつづける。増え続ける一方であるこの量は、熱力学のエントロピーを思い起こさせる。また、ブラックホールが少数の巨視的なパラメーターのみで指定されるという事実も、熱力学系との対応を示唆する。実は第2法則に限らず、ブラックホールの古典的な性質は熱力学の第0～第3法則の形でまとめることができる（図1）。

ただし、これはこのままでは単なるアナロジーにすぎない。つまり、双方の法則で現れる量が同じ物理量であることを意味しない。単にブラックホールの法則は、数学的に熱力学の法則のような振る舞いをするというだけである。確かに、第1法則の左辺に出てくるエネルギー E と質量 M は同じ物理量である。しかし二つの法則の関係はここまでである。仮に、ブラックホールの古典法則と熱力学が同じものであるとすると、表面重力 κ も物理的に温度をあらわしていることになる。つまり、ブラックホールは有限温度を持った物体として振るまうはずであり、輻射をおこなわなければならない。しかし、古典的にはブラックホールからは何も出てこないため、ブラックホールの物理的な温度は0である。したがって、 T と κ の間には物理的な関係はない。よって、 S と A の間にも物理的な関係は期待できない。このため、ホラ

イズンの面積とエントロピーの関係に始めて気づいたのは Bekenstein であったが、当時誰も彼の指摘を信じなかったという。

ところが、この状況は74年のHawkingの発見を境に大きく変わった。Hawkingは量子効果により、ブラックホールが κ に比例した温度の黒体輻射をおこなうことを示した。 κ は実際にブラックホールの温度であったのである。このことから、ブラックホールの法則と熱力学の関係は単なるアナロジーではなく、ブラックホールの法則はブラックホールに応用された熱力学なのではないか、という推測が成り立つ。Hawkingにより輻射の温度は $T = \hbar\kappa/2\pi$ と求められたので³、第1法則からエントロピーは

$$S_{BH} = \frac{A}{4G\hbar} \quad (1)$$

となることが期待される。(Bekenstein - Hawking の式)

残るミッシング・リンクは、(1) で与えられる S_{BH} が実際にブラックホールの持つエントロピーと一致しているかどうかである。古典論の範囲内では、ブラックホールの法則は物理的には熱力学にはなり得ない。このためHawking 輻射と同様、 S_{BH} も量子効果を考えて始めて説明できると考えられる。

実際、 S_{BH} はプランク定数 \hbar を含んでいるため、 $\hbar \rightarrow 0$ の古典極限では S_{BH} は発散してしまう。しかし、このような状況は目新しいものではなく、前世紀の終わりにも物理学者が遭遇したものである。つまり黒体輻射における ultraviolet catastrophe の問題である。古典電磁気学によると、黒体は無限大のエネルギーを放出し (Rayleigh - Jeans の法則)、また無限大のエントロピーを持つ。これは、古典的な場の理論では、短距離でいくらでも自由度が存在することの現れに過ぎない。黒体輻射の場合は、電磁場の量子化によりこの問題は解決された。同様に、 S_{BH} を正しく導出するためには重力の量子化がカギになると考えられる。

2.2 インフォメーション・パラドックス[9]

Hawking 輻射の発見により、熱力学の法則との対応はより明らかになった。しかし、Hawking 輻射は一方でより深刻な問題を引き起こした。今、ブラックホールを純粋状態 (pure state) から作ったとする。ところがHawkingによると、輻射は熱輻射であるので混合状態 (mixed state) である。もっとも、輻射が混合状態であること自体には問題はない。なぜなら、ホライズンの外というのは考えている量子系の一部でしかないからである。Einstein - Podolsky - Rosen のパラドックスの実験で、一方の粒子のスピンだけを観測するようなものである。

³ここでは $c = k_B = 1$ の単位系を使う。今後は $\hbar = 1$ も使う。

しかし、ブラックホールは Hawking 輻射により、しだいに蒸発していく⁴。ブラックホールが何も残さずに蒸発しきったとすると、どうなるのか？この場合は系の全てが輻射である。したがって、当初の純粋状態が混合状態に遷移したことになる。しかし、量子力学では時間的发展がユニタリーである限り、純粋状態は混合状態に遷移することはない。こうして、我々はパラドックスに直面することになってしまう。量子力学による予言を突き詰めていくと、量子力学と矛盾してしまう点がパラドックスである。

この現象は太陽とどう違うのだろうか？たとえば、物理学会誌を太陽に投げ落としたとすると、雑誌は燃え尽き太陽からは熱輻射のみが観測される。このためブラックホールと同じく、現実的には学会誌の「情報」は失われてしまう。しかし、太陽が量子力学に矛盾するとは誰も考えない。なぜだろうか？これは太陽の場合、原理的には微視的な状態を追跡できるという確信があるからである。微視的な状態を追跡すれば、純粋状態は常に純粋状態に遷移しているはずである。太陽から観測される輻射は実は相関をしているはずで、相関の知識から学会誌の「情報」を再構成できるはずである。熱輻射が得られるのは、微視的な状態のアンサンブル平均をとっているからに過ぎない。

ブラックホールの場合はそうは言えない。まず第一に、ブラックホールに落とされた学会誌はホライズンを横切るはずである。ところがホライズンの中からは信号を外に送ることはできない。したがって、この場合も Hawking 輻射に相関があるとすると、因果律、または局所性を破ることになってしまう。しかも、重力の量子化なしには微視的な状態は追跡できない。

要するに、ブラックホール・エントロピーがエントロピーであることを示すには、微視的な状態を数え上げる必要がある。また、インフォメーション・パラドックスを解くためにも、微視的な状態を追跡できることが望ましい。しかし、これらは重力の量子化なしには答えられない。

3 弦とブラックホール

さて、弦理論は紫外発散のない量子重力理論だと考えられている。だとすれば、弦理論を使えばブラックホール・エントロピーも説明できるのではないか？弦理論は一般相対論そのものではないが、やはりブラックホールが存在する。弦理論は低エネルギーでは超重力理論に帰着する。この超重力理論を解くことにより、Schwarzschild ブラックホールを始め、さまざまなブラックホール解が得られる。そして、これらの

⁴ブラックホールが蒸発していくと、ホライズンの面積 A は減少する。しかし、ブラックホール・エントロピーと輻射のエントロピーを足したものは常に増大する（一般化された第2法則）

ブラックホールも、やはりブラックホールの法則を満たすことが知られている。実際ブラックホールの法則は、メトリックを基にした重力理論に対して広く成り立つ[8]。

弦理論の低エネルギー極限である超重力理論では、ブラックホールは古典解を求めることによって与えられる。しかし、弦理論でエントロピーを説明するには、そもそもまず弦理論自体ではブラックホールはどうあらわされるのかを考えておかなければならない。

弦理論の基本的な物体は基本弦 (fundamental string) である。基本弦は通常の弦のように振動し、この弦の固有振動がそれぞれさまざまな素粒子であると考えられている。弦自体は素粒子なので、ブラックホールは何か別のものだろうか？

しかし、弦理論の結合定数 g_s と 4 次元のニュートン定数 G とは、 $G \sim g_s^2 l_s^2$ の関係がある。ここで l_s は弦の典型的な広がり指定するパラメーターである。したがって g_s を大きくしていくと、弦の Schwarzschild 半径 $2GM$ は大きくなる (弱結合では基本弦の質量は g_s にはよらない) g_s を十分大きくして、Schwarzschild 半径が基本弦のサイズよりも大きくなると、基本弦はブラックホールになるはずである。なにももの自分自身の Schwarzschild 半径より小さくなると、ブラックホールになることから逃れられない。つまり、基本弦そのものがブラックホールの候補である (図 2)。

同じ質量を持つ基本弦の状態 (固有振動) には縮退度があるので、一般にこのような状態は全てブラックホールになるであろう。しかしノーヘア定理から、ある質量を持つブラックホールは一つしかない。したがって、質量 M の弦の状態は全て同じブラックホールになるはずである。エントロピーは系の縮退度の対数であるので、ブラックホール・エントロピーは、このような状態数の対数なのではないだろうか？つまり、

$$(\text{ブラックホール} \cdot \text{エントロピー}) \stackrel{?}{=} (\text{弦の固有振動の縮退度の対数}) \quad (2)$$

今回の発展の背後には、一見単純に見えるこのアイデアが基礎になっている。

基本弦の状態の縮退度は、弱結合の場合にはよく知られている。質量 M の状態の縮退度 d_{string} は [10]、

$$d_{string} \sim e^{l_s M}. \quad (3)$$

一方、期待されるブラックホールの縮退度 d_{BH} は、

$$d_{BH} \sim e^{\frac{A}{G}} \sim e^{GM^2} \quad (4)$$

となる。ここで (1) とホライズンの半径 $2GM$ を使った。 M のべきが違っているため、一見するとこの 2 つは一致していないように見える。

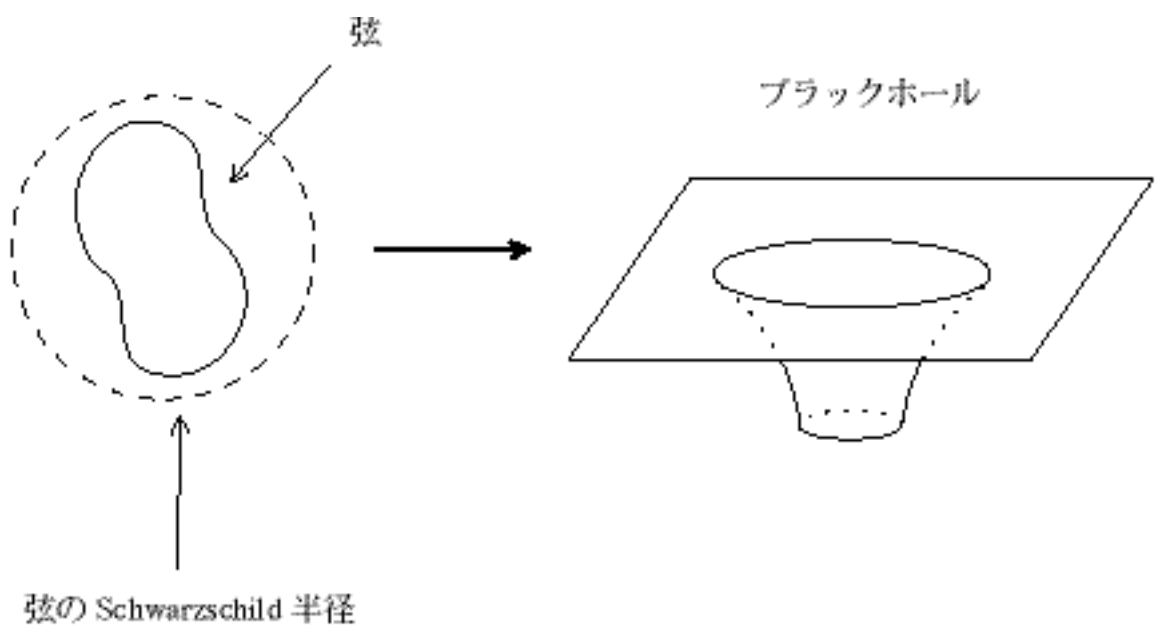


図 2: 弦が Schwarzschild 半径より小さくなると、弦は「重力崩壊」を起こしブラックホールになる。

しかし、弦の縮退度は弱結合 $g_s \ll 1$ で数えたものであることに注意しなければならない。基本弦は、 g_s が大きくなるとブラックホールになると期待される。ところが、強結合では量子補正が無視し得なくなり、摂動計算の結果(3) は破綻する。そこで、量子効果を含めて始めて、ブラックホール・エントロピーと基本弦の状態の縮退度の一致について議論すべきであろう。ただし、量子効果を計算することは大変難しく、現実的ではない。

幸いなことに、もう少し注意深く調べると、弱結合近似を破ることなしに、弦をブラックホールと比較できる場合があることがわかる。そして、このとき両者のエントロピーはよく一致している。

Schwarzschild 半径が弦のサイズよりも大きくなると、弱結合近似が破れる。この場合は、弦よりブラックホールによる記述がよい。一方、Schwarzschild 半径が弦より小さくなる場合を考えてみる。超重力理論は、弦の広がり l_s が十分に小さいという近似である（低エネルギー近似）このためブラックホールのサイズが l_s 程度に小さくなると、超重力理論による記述が破れ、メトリックという概念も well-defined ではなくなる。（グラビトン、つまりメトリックの摂動は、弦の固有振動の一種にすぎない。）つまり、この場合は逆に、ブラックホールより弦による記述がよい。したがって、弦とブラックホールを直接比較できるのは、ちょうどブラックホールが弦のサイズ程度になったときだけである。このとき $GM \sim l_s$ なので、

$$S_{string} \sim l_s M \sim GM \times M \sim GM^2 \quad (5)$$

となり、実際にブラックホールのエントロピーと一致する！

G は結合定数によるので、結合定数を適当に選べば (3) と (4) が一致することは当然である。しかし、この一致が特に意味のない時に起こるのではなく、基本弦がブラックホールに遷移した時に起こるのは決して自明なことではない。

この方法では、結合定数を調節して弦をブラックホールへと「重力崩壊」させて、ブラックホールのエントロピーを弦のエントロピーとして説明する。このプロセス自体は星の重力崩壊と似ている。しかし一方、ブラックホール・エントロピーを星のエントロピーとして説明することはできない。なぜなら星は、ブラックホールよりはるかに少ないエントロピーしか持たないからである。太陽のエントロピーはほぼ 10^{58} である。ところが、1太陽質量のブラックホールの場合、(1) からエントロピーは 10^{77} となる。これは宇宙全体の陽子数（ $\sim 10^{80}$ ）に匹敵する莫大な数である。ブラックホールは、ノーヘア定理により質量や電荷などの少数のパラメーターのみで指定される。このため、ブラックホールには太陽より多くの作り方がある。したがって太陽のエントロピーだけでは、ブラックホールの縮退度をつくしたことはないのである。

歴史的には、ブラックホールと素粒子の対応は以前から議論されてきた[11]。しかし、このような形でのブラックホールと弦との対応は、93年に Susskind が初め

て議論した [12]。ここで紹介した議論は、Susskind の議論を応用範囲の広い形に定式化した Horowitz と Polchinski によるものである [13]。

4 超対称ブラックホール

前節で見たように、ブラックホールと弦の間には対応がつきうるということがわかった。しかし、このままではエントロピーの係数まで導くことはできない。弦がブラックホールに「遷移」する点をもっと正確に指定しなければいけないし、また様々な近似が破綻する境界ぎりぎりの議論である。しかし、この困難をどう避ければよいかも Susskind は提案していた。驚くべきことに、ある種のブラックホールに対しては、エントロピーの係数まで合わせることができるのである！この節ではまずアイデアだけを説明し、§5 でより具体的な解説をする。

前節での我々の方針は、

- 基本弦のように、弱結合で状態を数え上げることができて、強結合でブラックホールに遷移する「物体」を使う

というものであった。しかし (5) のように、ブラックホールと直接比較する場合、ブラックホールに遷移する点を正確に指定する必要がある。そこで今後はこの方法とはならないで、強結合の問題に取り組むことにする。いま仮に

- ブラックホールに遷移しても状態が追跡でき、縮退度も変わらない

という状態があれば、強結合の問題もコントロールできるであろう。これは、いささかうますぎる話に聞こえるかもしれない。しかし以下で見るように、超弦理論の持つ超対称性を使うと、実際にこのことが可能になる。

4.1 BPS 状態と極限ブラックホール

超弦理論の全ての状態は、電荷を Q とすると適当な単位系で $Q \leq M$ という不等式を満たさなければならない。特に $Q = M$ を満たす場合は BPS 状態と呼ばれる。超対称性から、BPS 状態は結合定数を変化させても $Q = M$ の関係は不変に保たれる。また状態の縮退度も変わらない。つまり、BPS 状態なら縮退度を摂動的に計算しても、その結果は非摂動的に正しい。したがって BPS 状態を使えば、強結合の問題なくエントロピーを評価できる。しかし、この BPS 状態が遷移するブラックホールはどのようなものだろうか？

もっとも単純なブラックホールは Schwarzschild 解であるが、一般相対論では別の種類のブラックホールも知られている。たとえば、ブラックホールが電荷を持つ

た場合は、Reissner-Nordström 解であらわされる。このブラックホールの電荷は $Q \leq M$ に制限される。 $Q < M$ のブラックホールは Hawking 輻射を起こし、最終的に $Q = M$ のブラックホールへと落ちつく。 $Q = M$ の場合は、Hawking 温度が 0 になるので輻射を起こさないからである。この極限の場合を極限ブラックホール (extremal black hole) と呼ぶ。この極限ブラックホールが、BPS 状態が遷移する先のブラックホールである。

要するに、弱結合で縮退度が計算できる弦理論の BPS 状態を使い、その BPS 状態が遷移する極限ブラックホールと比較すればよいことになる。したがって、(2) の代わりに

$$\begin{aligned} & (\text{極限ブラックホールのエントロピー}) \\ & \quad \stackrel{?}{=} (\text{同じ電荷 } Q \text{ を持つ弦理論の BPS 状態の縮退度の対数}) \end{aligned} \quad (6)$$

というアプローチをとることになる。

BPS 状態の概念は、超弦理論のあらゆる状態に当てはまる。特に基本弦の状態にも当てはまる。そこで前節のように基本弦の適当な状態を考えるのではなく、BPS 状態を使えば (6) を確かめられるのではないか？ 実際 Susskind の提案にしたがって、95 年に Sen がこのような計算をした [14]。Sen の計算は一定の達成ではあったが、十分とはいえなかった。§5 で述べるが、別の問題があるためである。実は、超弦理論には基本弦以外にも BPS 状態が存在する。そこで基本弦以外の BPS 状態を使うことにする。それが D-brane である。

4.2 D-brane

近年の弦理論の発展は、弦理論には基本弦によって記述される状態以外にも、ソリトンが含まれているという発見がカギとなってきた。D-brane は、このような発展を通して発見されたソリトンの一種である [2, 15]。

ソリトンと言えば統一理論が予言するモノポールがあるが、点粒子状のソリトンであるモノポールとは違い、D-brane にはひも状や膜状のソリトンもある。そこで空間的な広がりの次元を p とすると、

$$\begin{array}{ll} p = 0 & \text{点粒子状のソリトン} \\ p = 1 & \text{ひも状のソリトン} \\ p = 2 & \text{膜状のソリトン (membrane)} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

となる。この空間的な広がりの次元も含めて、 Dp -brane と呼ぶことにする。広がりの次元は、D-brane が持ちうる電荷の種類によって決まる。

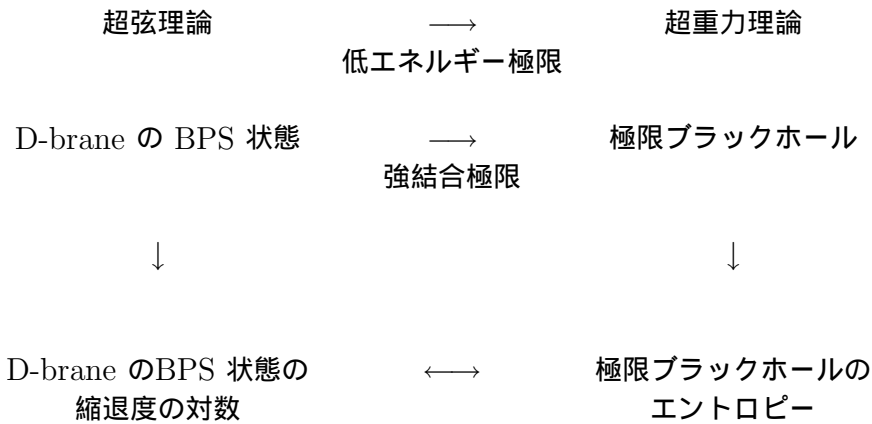


図 3: 超重力理論の極限ブラックホールと D-brane の関係

ソリトンという言葉からもわかるように、D-brane は通常のソリトンのように集団座標による第一量子化が可能である。詳しい解説は他にゆずるが、D-brane は量子化により超対称ゲージ理論によってあらわされる [2, 15]。このため、基本弦のように弱結合で状態の縮退度を数えることが可能である。

D-brane 自体は平坦な時空に住むソリトンであるので、ブラックホールではない。しかし基本弦と同様に、D-brane もブラックホールに遷移する。D-brane の質量は $1/(g_s l_s)$ 程度であり、D-brane が Q 枚重なっているときは $Q/(g_s l_s)$ 程度になる。そこで D-brane の Schwarzschild 半径は $2GM \sim O(g_s Q)$ である。このため g_s が十分大きくなれば、D-brane もブラックホールになることが期待される。特に D-brane の BPS 状態は、極限ブラックホールへと遷移するであろう。

まとめると、最終的に我々が取るべきアプローチは、

$$\begin{aligned}
 & \text{(極限ブラックホールのエントロピー)} \\
 & \stackrel{?}{=} \text{(同じ電荷 } Q \text{ を持つ D-brane の BPS 状態の縮退度の対数)} \quad (7)
 \end{aligned}$$

となる (図 3) Strominger と Vafa は 5 次元の極限 Reissner-Nordström ブラックホールに対して BPS 状態の縮退度を計算し、それが (1) で与えられるブラックホール・エントロピーに等しいことを示した。

5 ブラックホール・エントロピーの導出

ここで例を使って、もう少し具体的にエントロピーの導出を見てみる。簡単のため

に、もとの Strominger と Vafa の論文ではなく、その 1 ヶ月後に出た論文にしたがって説明する [16, 17]。

5 次元の Reissner-Nordström 解は一般相対論の解であり、10 次元の弦理論で同じものを作るのは少し工夫がいる。また、実際の計算では考えなければならない問題がもう二つある。これらの問題は、超重力理論が弦理論そのものではなく、低エネルギー極限での古典近似でしかないことに起因する。

まず第 1 に、超重力理論は弦理論の古典近似なので、超重力理論の解が信頼できるためには弱結合 $g_s \ll 1$ でなければならない。また、先ほどから「結合定数」という言葉を使ってきたが、弦理論では結合定数はディラトンと呼ばれるスカラー場 ϕ の期待値 $g_s = e^\phi$ で与えられる。ディラトン場は重力と性質が似ており、あらゆるエネルギー・運動量テンソルがソースとなる。このため、ブラックホールが電荷を帯びると、この電荷がソースとなりディラトンの期待値が定数ではなくなる。つまり「結合定数」も定数ではなくなる。実際、ホライズン近傍でディラトンが発散してしまう解もあるので、このような場合には超重力理論のブラックホール解は信頼できない。しかも、一般相対論では結合定数は定数（ニュートン定数）なので、Reissner-Nordström 解にもならない。

第 2 に、D-brane が遷移する多くの極限ブラックホールでは、ホライズンが特異点と一致する。つまり、ホライズン近傍で重力が強くなる。この場合は、超重力理論による低エネルギー近似が破れる。

§4 で Sen による計算は不十分であったと述べたが、それは彼の計算が第 2 の問題を避けられなかったためである。説明は省略するが、

適当な種類の D-brane を組み合わせて、数種類の電荷を与える

とこれら 2 つの問題を避けることができる。4 次元では最低 4 種類、5 次元では最低 3 種類の電荷が必要なことが知られている。したがって、4 次元よりは 5 次元の方が簡単である。これが 5 次元ブラックホールが当初考えられた理由であり、本質的な問題ではない。実際、4 次元の Reissner-Nordström 解の場合でも、エントロピーは正しく導出されている。

ちなみに、我々は強結合から来る量子補正を心配して、BPS 状態を考えることにした。しかし結局、超重力理論による古典近似を使うために、弱結合 $g_s \ll 1$ の領域を考える。それならば、なぜ BPS 状態が必要なのだろうか？これは D-brane が Q 枚あると、D-brane への量子補正は $g_s Q$ に比例するからである。D-brane の Schwarzschild 半径は $O(g_s Q)$ なので (§4) D-brane がブラックホールに遷移するあたりでは、D-brane にとっては強結合になってしまう。しかし Q を十分大きくとっておけば、 g_s は小さくとれるので古典近似は成り立つ。これまで「強結合」という言葉を使ったが、 $g_s Q \gg 1$ という意味での強結合であり、今後もこの意味で使うことにする。

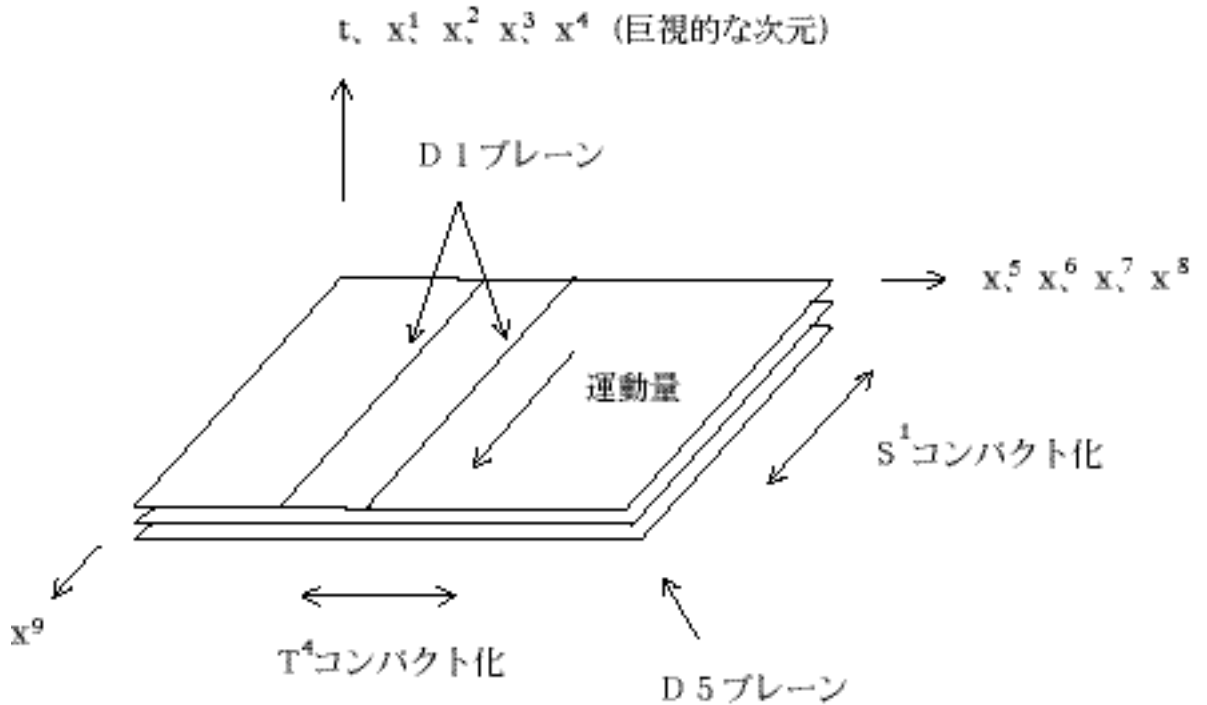


図 4: Callan と Maldacena が用いた D-brane の配位。5 ～ 8 方向は 4 次元トーラスにコンパクト化され、9 方向は半径 R の円周にコンパクト化されている。

以下では超弦理論の一つ、タイプ IIB 弦理論を考える。この弦理論には、D1 ブレーン（以下 D1）および D5 ブレーン（以下 D5）が存在する。この 2 種類の D-brane を以下のように組み合わせる⁵（図 4）。

- Q_1 本の重なった D1。
- Q_5 枚の重なった D5。D1 は、この D5 の中に埋め込まれている。
- D1 方向に運動量を与える。

一見複雑に見えるこの配位は、上で述べた問題を避けるために過ぎない。

こうして、10 次元時空の中で空間的に広がった物体ができた。5 次元ブラックホールを作るには、ブレーンの伸びた方向 (x^5, x^6, x^7, x^8, x^9) をコンパクト化すれ

⁵実際には、この配位がエントロピーに dominant な寄与を与えるのは特殊な場合だけである[18]。

ばよい。ここでは5次元トーラス ($T^5 = 4$ 次元トーラス $T^4 \times$ 円周 S^1) にコンパクト化する。なお、D1 が伸びている x^9 方向の円周の半径は R とする。この場合、初等量子力学の井戸型ポテンシャルの問題と同じく、運動量が n/R と量子化される。5次元の立場では、D-brane のこの束縛状態は Q_1, Q_5, n の3種類の電荷を持つことになる。

この配位に対応する5次元の超重力理論の解は

$$ds^2 = -\lambda^{-2/3} dt^2 + \lambda^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \quad (8)$$

となる。ここで $d\Omega_3^2$ は半径1の3次元球面のメトリック、また

$$\lambda = \left(1 + \frac{c_1 Q_1}{r^2}\right) \left(1 + \frac{c_5 Q_5}{r^2}\right) \left(1 + \frac{c_n n}{r^2}\right). \quad (9)$$

c_1, c_5, c_n は適当な定数で、5次元のニュートン定数 G_5 を使うと $c_1 c_5 c_n = (4G_5/\pi)^2$ である。この解の特別な場合として $c_1 Q_1 = c_5 Q_5 = c_n n = \rho_0^2$ ととると、(8) は5次元極限 Reissner-Nordström ブラックホール

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)^2 dt^2 + \frac{d\rho^2}{\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)^2} + \rho^2 d\Omega_3^2 \quad (10)$$

に帰着する。なお、ここで座標変換 $\rho^2 = r^2 + \rho_0^2$ をおこなった。ホライズンは $r = 0$ の3次元球面であり⁶、 S^3 の面積は $2\pi^2(\text{半径})^3$ なので、(1) からエントロピーは

$$S_{BH} = \frac{A}{4G_5} = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 n} \quad (11)$$

で与えられる。

次に、このエントロピーをD-brane を使って導出する。今、D1 方向 x^9 の半径 R が、コンパクト化した他の方向と比べて大きいとする。この場合 D1 と D5 の束縛状態は、近似的に弦としてあらわされる。この弦の自由度は、ボゾンが $4Q_1 Q_5$ 個、また超対称性から同数のフェルミオンが存在する。この結果はD-brane の束縛状態をゲージ理論を用いて解析することで得られるが、 $Q_1 = Q_5 = 1$ の時は簡単に理解できる。D1 は D5 のなかに埋め込まれているが、D5 のなかでは自由に動くことができる。D1 の動ける方向はD1 方向を除く4つ (x^5, x^6, x^7, x^8) である。この4つの自由度が、4個のボゾンに対応する。

⁶ $r = 0$ であっても半径ゼロではない。 $r = 0$ で $d\Omega_3^2$ の前の係数はゼロにはならないからである。 $r = 0$ でのホライズンの面積が有限なのは、 λ が $1 + Q/r^2$ のファクターを電荷の種類の数だけ含むためであることに注意。このことは、電荷が3種類あるとホライズンで重力が強くなる理由でもある。

結局、問題はこのような自由度を持つ弦の状態（固有振動）の縮退度 d を求めることになる。これは基本弦の状態の縮退度 (3) と同じ方法で評価できる。長さ $2\pi R$ で運動量 n/R を持つ弦の場合、 n が大きいときは一般に

$$d \sim \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{cn}{6}}\right) \quad (12)$$

で与えられる。ここで c は各々のボゾンに対して 1、各々のフェルミオンに対して $1/2$ を足した量である。今の場合、 $c = 6Q_1Q_5$ となるので、エントロピーは

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1Q_5n} \quad (13)$$

となる。これは係数も含めて (11) と完全に一致する。上のエントロピーの式は複数のパラメータの関数であり、これが偶然一致したとは考えにくい。

6 弦理論がなしえたこと、なしえていないこと

§5 でみた、5次元の極限ブラックホールの計算は、1、2ヶ月の間にさまざまなブラックホールに応用された（文献5の文献リストを参照）しかし特に重要な仕事は、5次元の極限に近いブラックホールに応用され、Hawking 輻射が正しく導出されたことである [16]。D-brane による閉じた弦の放出が Hawking 輻射に対応する。

D-brane は通常の量子力学系なので、弱結合での発展自体はユニタリーである。熱輻射が得られるのは、太陽と同じくアンサンブル平均をとることによる。このため、D-brane の立場ではインフォメーション・パラドックスの問題はない。もっとも、極限に近いブラックホールは BPS 状態ではないため、一般には強結合極限は正当化できない。にもかかわらず、なぜブラックホールの結果が再現できるのかよくわかってはいない。しかし、輻射についてはさらに詳しく調べられており、ブラックホールによる計算と完全に一致しているようである。

6.1 なしえたこと

今回の発展は、結局何を教えてくれたのか？この発展は、重力と弦理論という二つの分野にまたがったものであった。そこで成果を、重力に対する新しい知見と、弦理論に対する新しい知見という2つの立場に分けて整理してみよう。重力の立場からいうと成果は

- ブラックホール・エントロピーが、統計力学的なエントロピーであることを示した

ことである。今回の発展によって、ブラックホール・エントロピーが実際に統計力学的なエントロピーであることを多くの人々に確信させた。これまでもいろいろな立場からブラックホール・エントロピーの導出はなされてきたが、今回の発展がこれまでと決定的に違う点が3つある：

1. 摂動論的にはよく定義された、弦理論という量子重力理論を用いて導出された。
2. 数係数も含めて正しく導出された。
3. 信頼性の高い近似・手法で実際に状態を数え上げた。

一方、弦理論の立場からいえば成果は

- 弦理論が Bekenstein - Hawking の式を正しく再現した

ことである。米谷氏が述べているように [2]、弦理論は現時点では理論として完全ではなく、摂動論の Feynman ルールしか与えていない。このため、今までは弦理論が摂動論を越えて存在するという証拠すらなかった。ブラックホール・エントロピーが正しく導出できたことは、弦理論が強結合という非摂動的な領域においても、量子重力の理論になっていることを示唆している。特に、このことは量子重力理論として要求される状態数を、弦理論が含んでいることを意味している。

6.2 なしえていないこと

さて弦理論というと、よく問題になるのが今のところ実験的な証拠もないし、低エネルギーで確かに現実の世界を記述しているかどうかもわかっていないという点である。しかし今回、ブラックホール・エントロピーが導出されたのだから、少なくとも重力については低エネルギーで正しく「現実」の世界を記述していることになる。これは、弦理論が証明されたということなのだろうか？

実は、ブラックホール・エントロピーが導出できることは、いかなる量子重力理論も満たすべき条件である。§3 で述べたように、ブラックホール熱力学は重力理論に普遍的な法則である。また、(1) を導出する際には Hawking 輻射の結果を用いたが、これはブラックホール時空で場の量子論を考えることによって発見された。したがって重力理論で、曲がった時空上での場の理論と無矛盾な理論なら、エントロピーが導出できることは当然である。この意味では、弦理論が一つ無矛盾性のテストをパスしたにすぎない。

そもそもブラックホール・エントロピーが導出されたのは、これが始めてではない。これまでに、さまざまな手法によってエントロピーは導出されてきた。古くは、ユークリッド化した経路積分による量子重力の立場からの導出がある[19]。また最近

では、正準量子化による結果がある [20]。違った手法でもエントロピーが導出できることは、必ずしも弦理論が他のアプローチと関係していることを意味しない。ブラックホール・エントロピーを導出するというのは、単に曲がった時空上での場の理論との無矛盾性をチェックしているにすぎないからである。

この点で最近興味深い研究がなされている [21]。Strominger は超対称性にも弦理論にもよらずに、量子重力理論が存在するという仮定だけを使って、ブラックホール・エントロピーを係数まで含めて正しく導出した。この場合調べられたブラックホールは、宇宙項のある三次元時空でのブラックホールである。ブラックホール・エントロピーの導出は、いかなる量子重力理論も満たすべき条件だからこそ、このようなことが可能なのであろう。

今回の発展で残された最大の問題は、インフォメーション・パラドックスである。強結合の問題をぬきにしても、D-brane による Hawking 輻射の導出には問題があり、このままではパラドックスの十分な回答にはなっていない。今回の計算は、時空が平坦な場合と曲がった場合とで変わらない量を用いて、平坦な場合の結果から曲がった場合の結果を導出した。このため、実際に D-brane がブラックホールになったときに、何が起こるのかを教えてはくれない。インフォメーション・パラドックスで問題になったのは、一つにはホライズンの存在から決まる因果律を破ることなしに、「情報」がいかに逃げ出しうるのかという点だった。しかし、弱結合の極限ではホライズンは存在しないので、この問題は答えようがない。したがって D-brane の手法では、どうパラドックスが解決されているのかが明確ではない。このパラドックスを解決したというためには、Hawking の議論のどこが間違っていたのかを示す必要がある。

また D-brane がユニタリーな発展をしても、ブラックホールへと遷移したときに、量子力学が破れないという保証はない。インフォメーション・パラドックスは、ダイナミクス、時空の因果構造の問題であり、それはBPS 状態を数えるのとはわけが違う。

ところで、エントロピーの導出にしてもわからないことは多い。たとえば g_s を大きくして、D-brane がホライズン内に入ったとする。その場合なぜD-brane の縮退度が問題になるのだろうか？というの、エントロピーは区別できる状態数を数えるものだからである。D-brane がホライズン内に入ったとすると、D-brane の状態は区別できないはずである。このことは「情報」が外部に逃げ出しているということだろうか？

というわけで、結局インフォメーション・パラドックスの問題に帰着してしまう。したがってインフォメーション・パラドックスが解かれなければ、ブラックホール・エントロピー問題は最終的には解決したとはいえない。しかし、今回の結果は、ブラックホールが通常の量子力学系のように振る舞うことを示唆している。今やエントロピーにしても Hawking 輻射にしても、弦理論によってある程度微視的な記述が可

能になった。時空が平坦な場合と曲がった場合の対応ははっきりしているとは言えないが、この対応の理解が深まればパラドックス解決への糸口も見えてくるかもしれない。

参考文献

- [1] A. Strominger and C. Vafa: Phys. Lett. **B379** (1996) 99, hep-th/9601029 [A].⁷
- [2] 米谷民明：日本物理学会誌 **53**, 312, May 1998 [B].
- [3] J. Polchinski: Rev. Mod. Phys. **68** (1996) 1245, hep-th/9607050 [B].
- [4] Search and Discovery, Physics Today, Vol. 50, No. 3, 19, March 1997 [B].
- [5] G. T. Horowitz: gr-qc/9604051; gr-qc/9704072 [C];
J. M. Maldacena: hep-th/9607235[C]; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **61A** (1998) 111, hep-th/9705078 [C];
A. W. Peet: hep-th/9712253 [C];
A. Sen: hep-th/9802051 [C];
細道和夫：数理科学, No. 416, 51, Feb. 1998 [C].
- [6] 井上允、井上一：日本物理学会誌 **52**, 161, March 1997 [B].
- [7] 前田恵一：数理科学, No. 422, 36, Aug. 1998 [B].
- [8] R. M. Wald: gr-qc/9702022 [C].
- [9] L. Susskind: Scientific American, Vol. 276, No. 4, 52, April 1997 [B];
J. Preskill: hep-th/9209058 [C];
D. N. Page: hep-th/9305040 [C].
- [10] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten: *Superstring theory* (Cambridge Univ. Press, 1987);
J. Polchinski: *String theory* (Cambridge Univ. Press, 1998).

⁷文献を以下のように分類した。A：原論文、B：総合報告（非専門家向け）、C：総合報告（やや専門家向け）

- [11] G. 't Hooft: Nucl. Phys. **B335** (1990) 138 [A].
- [12] L. Susskind: hep-th/9309145 [A].
- [13] G. T. Horowitz and J. Polchinski: Phys. Rev. **D57** (1998) 2557, hep-th/9707170 [A]; Phys. Rev. **D55** (1997) 6189, hep-th/9612146 [A].
- [14] A. Sen: Mod. Phys. Lett. **A10** (1995) 2081, hep-th/9504147 [A].
- [15] J. Polchinski: Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724, hep-th/9510017 [A]; J. Polchinski, S. Chaudhuri, and C. V. Johnson: hep-th/9602052 [C]; J. Polchinski: hep-th/9611050 [C].
- [16] C. G. Callan and J. M. Maldacena: Nucl. Phys. **B472** (1996) 591, hep-th/9602043 [A].
- [17] G. Horowitz and A. Strominger: Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2368, hep-th/9602051 [A].
- [18] J. M. Maldacena and L. Susskind: Nucl. Phys. **B475** (1996) 679, hep-th/9604042 [A].
- [19] G. W. Gibbons and S. W. Hawking: Phys. Rev. **D15** (1977) 2752 [A].
- [20] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov: Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 904, gr-qc/9710007 およびその参考文献 [A].
- [21] A. Strominger: J. High Energy Phys. **2** (1998) 9, hep-th/9712251 [A].

補章：相対論と素粒子論の関係についての一考察

今回の発展は、素粒子論の研究者の間では大きな騒ぎとなったと書いた。一方個人的な印象では、相対論の研究者は今回の発展を比較的静観していたようである。これはなぜだろうか？また、今回の発展は素粒子理論によってなされた。これはブラックホールの研究についても、今や素粒子の研究者がリードしているということなのだろうか？筆者は相対論の研究者ではないので、以下の考察は憶測にすぎない。しかし今回の発展からは、相対論と素粒子の関係、そして両者の立場の違いについても多くのことが学べると思う。

まず第一に、相対論の研究者が今回の発展に何の寄与もしなかったわけではない。何人かの相対論の研究者は、今回の発展に積極的に参加し寄与してきた。

第二に、本文で見たように今回の発展は弦理論のテストという側面が強い。重力に対する最も重要な知見は、ブラックホール・エントロピーが統計力学的なエントロピーであることを確かめた点である。しかし、これも以前から予想されていたことに過ぎないとも言える。何か重力や時空に対して新しい知見があれば、相対論の分野でも興味を引いたかもしれないが [1]、少なくともこの発展の中ではそのようなことはなかった。ブラックホール自体は、せいぜい超重力理論の古典解という立場でしかなかった。

それでも、弦理論が量子重力理論としてのテストの一つパスしたことは、重要ではないだろうか？弦理論が量子重力理論としてより確からしくなったのだから、相対論の研究者は弦理論も研究すべきではないか？しかし、相対論はくりこみ可能性の問題から、量子重力理論となり得るのは難しい。そのこと自体は相対論の研究者にも十分認識されているはずで、それでも相対論が研究されているのは、問題意識が少し違うからである [1]。

素粒子理論は学問のその性格上、基礎理論の探求（量子重力理論を含む）を第一の目的とする。しかし、相対論の研究では、これは唯一の目的ではない。量子重力理論としてはともかく、一般相対論は低エネルギーでは大変よい近似になっていることは疑いない。通常の観測の範囲内では、ほとんどの場合一般相対論だけで十分である。したがって、相対論の研究者は、その近似の枠内でどんな物理が起こり得るのかにも興味を持つ。これはそれ自体大変実りのあるアプローチである。実際、ノーヘア定理やブラックホール熱力学、そして Hawking 輻射といったブラックホールの諸性質の解明は、すべて相対論の枠内でもたらされたものである。そして本文でも述べたように、これらの発見はきわめて一般的に成り立つ結果であり、弦理論はもとより将来発見されるかもしれないあらゆる量子重力理論が満たすべきものである。このようにこのアプローチは大変強力であり、何か基礎理論（たとえば弦理論）に賭けるというようなりスクもない。

最後に、今回の導出の特色の一つは、ブラックホール・エントロピーを係数まで含めて正しく導出したことである。この結果は大変印象深いだが、実は素粒子論の研究者はそこまで徹底して導出して始めて、ブラックホール・エントロピーが本当にエントロピーであると確信できたのではないだろうか。また今回の導出が、素粒子論での馴染み深い言葉・手法によるものであることも助けになっていよう。この意味では、素粒子論の研究者が、相対論での四半世紀前の結果をようやく理解したといえる。素粒子論の研究者がようやく理解したと騒ぎ立てたところで、すでに理解していた相対論の研究者が騒ぐにはあたらない。このため、相対論の研究者は今回の発展を静観していたのかもしれない。これと似たような状況は、しばしば素粒子論と物性論の間でも見られる⁸。しかし Feynman も強調しているように、一つのことを理解するため

⁸たとえば素粒子論の言葉による Weinberg の超伝導の解説 [2] や、Polchinski の Fermi liquid

には、それを様々な方法で再構成し理解を押し広げることが重要である。これは新たな発展を目指すためには欠かせない。

参考文献

- [1] 小玉英雄、佐々木節、佐藤勝彦：private communications.
- [2] S. Weinberg: Prog. Theor. Phys. Suppl. **86** (1986) 43.
- [3] J. Polchinski: in *Recent Directions in Particle Theory*, Proceedings of the 1992 TASI, eds. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993) hep-th/9210046.
- [4] J. Fröhlich **ほか**: private communications.

の解説 [3] は、物性論の分野ではあまり高い評価を得ていないようである[4]。物性論の研究者にとっては、以前から知られていたことを書き直したに過ぎないからである。