GVW superpotential の証明

溝口　俊弥

Type IIB 弦のフラックスコンパクト化において、GVW superpotential とは、$D=10$ Type IIB 超重力の 2-form 場の運動項の内部空間部分

$$S_{flux} = -\frac{1}{24\kappa_0}\int_M d^6y\sqrt{\tilde{g}}\frac{G_{mnp}\bar{G}^{mnp}}{\mathrm{Im}\tau} \tag{1}$$

をポテンシャルとして与えるような superpotential のことで、

$$W = \int_M G_3 \wedge \Omega \tag{2}$$

で与えられる。ここで Ω は内部空間として選んだカラビ・ヤウ 3-fold M の正則 3-form、また

$$G_3 = \frac{1}{3!}G_{mnp}\,dx^m \wedge dx^n \wedge dx^p \tag{3}$$

$$G_{mnp} = F_{mnp} - \tau H_{mnp},$$

$$\bar{G}_{mnp} = F_{mnp} - \bar{\tau} H_{mnp} \tag{4}$$

であり、$m, n, p, \ldots$ は内部 6 次元空間の添え字である。また、ポテンシャルはよく知られた公式

$$V = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}e^{\mathcal{K}}\left(K^{A\bar{B}}D_A W D_{\bar{B}}\overline{W} - 3|W|^2\right) \tag{5}$$

で計算される。ここで A, B は (複素)dilaton τ、複素構造モジュライのラベル α および ケーラーモジュライのラベル i を走る。ケーラーポテンシャル $\mathcal{K}$ は

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\text{dilaton}} + \mathcal{K}_{\text{complex structure}} + \mathcal{K}_{\text{Kähler}}, \tag{6}$$

$$\mathcal{K}_{\text{dilaton}} = -\log(-i(\tau - \bar{\tau})), \tag{7}$$

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi},$$

$$\mathcal{K}_{\text{complex structure}} = -\log\left(-i\int \Omega \wedge \bar{\Omega}\right),$$

$$\mathcal{K}_{\text{Kähler}} = -\log f(\mathrm{Im}t^i) \tag{8}$$

である。ただし $f(\mathrm{Im}t_i)$ は任意の実数 λ に対して

$$f(\mathrm{Im}(\lambda t_i)) = \lambda^3 f(\mathrm{Im}t_i) \tag{9}$$

をみたす関数とする。

正則 3-form は複素構造の変形に関して

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z^\alpha} = k_\alpha(z,\bar{z})\Omega + \chi_\alpha \tag{10}$$

という関係式がなりたつ。ここで z^α は複素構造モジュライ、k_α はモジュライに依存する定数である。また χ_α は $(2,1)$-form であり、$(2,1)$-form の空間の基底となる。その事実を使うと、(8) より dilaton および複素構造モジュライのケーラー metric はそれぞれ

$$\mathcal{K}_{\tau\bar{\tau}} = -\frac{1}{(\tau-\bar{\tau})^2}, \tag{11}$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\int_M \chi_\alpha \wedge \bar{\chi}_{\bar{\beta}}}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}} \tag{12}$$

となる。すると、$\Omega, \bar{\Omega}$ および $\chi_\alpha, \bar{\chi}_{\bar{\beta}}$ の $\int_M * \wedge *$ の非退化性を使って、G_3 は

$$G_3 = \frac{\int_M G_3 \wedge \bar{\Omega}}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}}\Omega + \frac{\int_M \Omega \wedge G_3}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}}\bar{\Omega} - \frac{\int_M G_3 \wedge \bar{\chi}_{\bar{\beta}}}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}} G^{\bar{\beta}\gamma}\chi_\gamma - \frac{\int_M \chi_\alpha \wedge G_3}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}} G^{\bar{\gamma}\alpha}\bar{\chi}_{\bar{\gamma}} \tag{13}$$

と展開できることが容易にわかる。

G_3 を

$$G_3 = G_3^+ + G_3^-, \quad G_3^\pm = \frac{1}{2}(G_3 \pm i *_6 G_3) \tag{14}$$

と分解すると、$*_6^2 = -1$ であるから

$$*_6 G_3^\pm = \mp i G_3^\pm \tag{15}$$

である。一方、

$$*_6 \Omega^\pm = -i\Omega, \quad *_6 \chi_\alpha = +i\chi_\alpha \tag{16}$$

であるから、(13) より G_3^+ は Ω と $\bar{\chi}_{\bar{\beta}}$、G_3^- は $\bar{\Omega}$ と χ_α の項からなることがわかる。このとき S_{flux} (1) は $\mathrm{Im}\tau$ を定数とする近似で積分の前に出すと

$$S_{flux} = \frac{i}{2\kappa_0^2 \mathrm{Im}\tau}\int_M G_3^+ \wedge \bar{G}_3^+ - \frac{i}{4\kappa_0^2 \mathrm{Im}\tau}\int_M G_3 \wedge \bar{G}_3 \tag{17}$$

と書ける。この第２項は topological なので落とし、第１項の $-$ をポテンシャル V_{flux} とすると

$$V_{flux} = -\frac{i}{2\kappa_0^2 \mathrm{Im}\tau}\int_M G_3^+ \wedge \bar{G}_3^+. \tag{18}$$

すると (13) より

$$G_3^+ = \frac{\int_M G_3 \wedge \bar{\Omega}}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}}\Omega - \frac{\int_M \chi_\alpha \wedge G_3}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}} G^{\bar{\gamma}\alpha}\bar{\chi}_{\bar{\gamma}}, \tag{19}$$

$$\bar{G}_3^+ = \frac{\int_M \bar{G}_3 \wedge \Omega}{\int_M \bar{\Omega} \wedge \Omega}\bar{\Omega} - \frac{\int_M \bar{\chi}_{\bar{\alpha}} \wedge \bar{G}_3}{\int_M \bar{\Omega} \wedge \Omega} G^{\gamma\bar{\alpha}}\chi_\gamma \tag{20}$$

であるから代入すると、

$$V_{flux} = +\frac{i}{2\kappa_0^2 \mathrm{Im}\tau}\left(\frac{\int_M G_3 \wedge \bar{\Omega}\int_M \bar{G}_3 \wedge \Omega + G^{\alpha\bar{\beta}}\int_M G_3 \wedge \chi_\alpha \int_M \bar{G}_3 \wedge \bar{\chi}_{\bar{\beta}}}{\int_M \bar{\Omega} \wedge \Omega}\right) \tag{21}$$

となる。

この V_{flux} (21) が GVW superpotential W (2) から出ることを示そう。まず、W が Kähler モジュライ t^i に依存せず、Kähler モジュライの Kähler ポテンシャルがをきめる関数 $f(\mathrm{Im}t_i)$ が (9) を満たすので、V (5) は Kähler ポテンシャルの寄与と $3|W|^2$ が相殺して no-scale 型

$$V = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} e^{\mathcal{K}} K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \overline{W} \tag{22}$$

に帰着する。ただし i, j は τ および複素構造モジュライのラベル α のみを走る。

まず

$$\partial_\tau G_3 = -H_3 \ = \ \frac{G_3 - \bar{G}_3}{\tau - \bar{\tau}} \tag{23}$$

を使って

$$\begin{aligned} D_\tau W &\equiv \partial_\tau W - W \partial_\tau \mathcal{K} \\ &= \int_M \frac{-\bar{G}_3 \wedge \Omega}{\tau - \bar{\tau}}, \\ \overline{D_\tau W} &= \int_M \frac{+G_3 \wedge \bar{\Omega}}{\tau - \bar{\tau}}, \end{aligned} \tag{24}$$

となるから (11) より

$$\mathcal{K}^{\tau\bar{\tau}} D_\tau W \overline{D_\tau W} = \int_M \bar{G}_3 \wedge \Omega \int_M G_3 \wedge \bar{\Omega} \tag{25}$$

となる。

一方、

$$\begin{aligned} D_\alpha W &= \partial_\alpha W + W \partial_\alpha \mathcal{K} \\ &= \int_M G_3 \wedge \partial_\alpha \Omega - \frac{\partial_\alpha \left(\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega} \right)}{\int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}} \int_M G_3 \wedge \Omega \\ &= \int_M G_3 \wedge (k_\alpha \Omega + \chi_\alpha) - k_\alpha \int_M G_3 \wedge \Omega \\ &= \int_M G_3 \wedge \chi_\alpha \end{aligned} \tag{26}$$

となるから

$$\mathcal{K}^{\alpha\bar{\beta}} D_\alpha W \overline{D_\beta W} = G^{\alpha\bar{\beta}} \int_M G_3 \wedge \chi_\alpha \int_M \bar{G}_3 \wedge \bar{\chi}_{\bar{\beta}}. \tag{27}$$

したがって、

$$e^{\mathcal{K}} = \frac{1}{f(\mathrm{Im}t^i) \cdot (-i \int_M \Omega \wedge \bar{\Omega}) \cdot 2\mathrm{Im}\tau} \tag{28}$$

より $\frac{1}{2\kappa_{10}^2 f(\mathrm{Im}t^i)} = \frac{1}{2\kappa_0^2}$ とおけば V (22) は V_{flux} (21) と一致することが確かめられる。 □