

2019年度レポート問題 解答

溝口 俊弥

May 20, 2019

問題

容器に入った粘性係数 $\eta = 12.0 \text{ Pa s}$, 密度 $\rho_0 = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$ のはちみつが重力加速度 $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ の一様重力場内にある。その中に半径 $a = 8.5 \text{ mm}$, 質量 $m = 6.6 \text{ g}$ の球状のビー玉が時刻 $t = 0 \text{ s}$ で静止しており、その後ビー玉は重力、浮力 および 粘性抵抗力 のみを受けて運動するとき、次の問いに答えよ。

1. ビー玉が最初の位置から 12 cm 沈むまでの時間を求めよ。
2. 終端速度の 90% に達するまでの時間を求めよ。

という問題でした。

解答

1. 運動方程式は、

$$m\ddot{z} = -mg + \rho_0 V g + f_V$$

ただし

$$\begin{aligned} f_V &= -6\pi\eta a \dot{z} \\ V &= \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

である。両辺を m で割った式：

$$\ddot{z} = -\alpha g - \frac{\kappa}{m} \dot{z} \quad (1)$$

を解く。ただし

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{\rho_0 V}{m} \\ \kappa &= 6\pi\eta a \end{aligned} \quad (2)$$

である。まず斉次方程式の解は $z = e^{\gamma t}$ と ansatz をおくと

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \frac{\kappa}{m} \gamma &= 0 \\ \Rightarrow \gamma &= -\frac{\kappa}{m}, 0 \end{aligned} \quad (3)$$

である。時間の次元を持つ量 τ を

$$\tau \equiv \frac{m}{\kappa} \quad (4)$$

と定義すると、 C_1, C_2 を任意定数として

$$z = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + C_2.$$

また特解として

$$z = -\alpha g \tau t$$

がとれるから、それらを加えて

$$z = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + C_2 - \alpha g \tau t. \quad (5)$$

これが初期条件

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \quad (6)$$

をみたすことより

$$C_1 = -C_2 = -\alpha g \tau^2 \quad (7)$$

がわかるから、結局

$$z = -\alpha g \tau \left(t - \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right) \quad (8)$$

となる。

与えられた数値を代入すると、MKSA 単位系で

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.454331, \\ \tau \equiv \frac{m}{\kappa} &= 0.00343275, \\ \alpha g \tau &= 0.0153 \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$z = -0.0153 \left(t - 0.0034(1 - e^{-\frac{t}{0.0034}}) \right). \quad (9)$$

これが $z = -0.12$ をみたす t をもとめると、この t の方程式は解析的に解けないが右辺カッコ内第 2 項は無視できるので、

$$\begin{aligned} t &= \frac{0.12}{0.0153} \\ &= 7.9[\text{s}] \quad \dots \quad \text{答え} \end{aligned}$$

2. \dot{z} は、

$$\dot{z} = -\alpha g \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

であるから

$$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.9$$

となればよい。したがって

$$\begin{aligned} -\frac{t}{\tau} &= \log_e 0.1 \\ \Rightarrow t &= -\tau \log_e 0.1 \\ &= \tau \log_e 10 \\ &= 0.00343275 \times 2.30259 \\ &= 7.9 \times 10^{-3} [\text{s}] \quad \dots \quad \text{答え} \end{aligned}$$

★ 1. で第2項を無視するという事は、結局はじめから終端速度で等速で沈んだ時にかかる時間を求めたことになってしまいました。2. より、ほとんど一瞬で終端速度に非常に近くなることがわかります。

去年同じような実験をしたときには、問題には $\eta = 5 \text{Pa s}$ にして計算してもらったら3倍ぐらいの時間が実際にはかかってしまったので、今年は適当に 12Pa s にしてみたのですが、やはり実際にはそうして計算した 7.9 s より時間がかかってしまいました。製品の個体差、季節、その日の気温などにかかわらず $\eta = 15 \text{Pa s}$ ぐらいかそれ以上のようなようです。