# 定数係数線形微分方程式の練習問題　解答

溝口　俊弥

April 30, 2019

## 問題

　次の微分方程式を解け。

という問題でした。ただし、授業で言ったように $'$ は $x$ 微分を表します。

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$y = e^{\gamma x}$ と仮定して代入すると、

$$\begin{aligned} \gamma^2 - 5\gamma + 6 &= 0 \\ (\gamma - 2)(\gamma - 3) &= 0 \\ \gamma &= 2, 3 \end{aligned}$$

よって一般解は

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}) \cdots \text{答え}$$

(2) $y'' + 4y' + 5y = 0$

$y = e^{\gamma x}$ と仮定して代入すると、

$$\begin{aligned} \gamma^2 + 4\gamma + 5 &= 0 \\ \gamma &= -2 \pm i \end{aligned}$$

よって一般解は

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{(-2+i)x} + c_2 e^{(-2-i)x} \\ &= e^{-2x}(c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}) \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

♣ あるいは

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

だから

$$y = e^{-2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \cdots \text{答え}$$

としてもよい。

(3) $y'' - 4y' - 5y = 5x + 6$

斉次方程式：$y'' - 4y' - 5y = 0$ の一般解をまず求めると、$y = e^{\gamma x}$ とおいて代入して

$$\gamma^2 - 4\gamma - 5 = 0$$
$$(\gamma - -5)(\gamma + 1) = 0$$
$$\gamma = 5, -1$$

より

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

一方、与えられた非斉次方程式の特解を求めるために $y = ax + b$ （$a, b$ は定数）とおいてみると、与方程式に代入して

$$-4a - 5(ax + b) \ = \ 5x + 6$$

$$\Rightarrow a = -1,\ b = -\frac{2}{5}$$

よって一般解は

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x} - x - \frac{2}{5} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意定数}) \cdots \text{答え}$$