State-operator isomorphism について

溝口俊弥

2017/2/2

Polchinski の教科書 p.66 からの Path integral derivation の節、p.68 最後に "The conformal normal ordering just cancels the effect of the X_i' path integral." とありますが、これについて補足します。

ここでは、 ある operator $\mathcal{A}(0)$ が原点 $z=0$ に置かれた disk: $|z|\leq 1$ 上の path integral よって、$|z|=1$ 上のモード X_n たちで指定される波動関数（= Scrödinger 表示での state）が得られ、operator と state とが１対１に対応することが議論されています。すなわち

$$\Psi_{\mathcal{A}}[X_b] \;=\; \int_{X|_{|z|=1}=X_b}[dX_i]\exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\partial X_i\bar{\partial}X_i\right)\mathcal{A}(0). \tag{1}$$

ここで 添え字の i は「内部」という意味です。X_i を運動方程式に従う古典的な部分 X_{cl} とそこからの量子的な揺らぎ X_i' に分けて

$$X_i \;=\; X_{cl}+X_i'. \tag{2}$$

ここで X_i の運動方程式は　$\partial\bar{\partial}X_i=0$ なので、その解 X_{cl} は内部で特異点のないことを要請すると

$$X_{cl}(z,\bar{z}) \;=\; X_0+\sum_{n=1}^{\infty}(z^nX_n+\bar{z}^nX_{-n}) \tag{3}$$

（(2.8.21b) 式）となります。X_{cl} は action の停留点なので

$$\int d^2z\partial X_i\bar{\partial}X_i=\int d^2z\partial X_{cl}\bar{\partial}X_{cl}+\int d^2z\partial X_i'\bar{\partial}X_i' \tag{4}$$

と X_{cl} １次の項はなくなります。変換 (2) は各点における shift なので

$$[dX_i]=[dX_i']. \tag{5}$$

すると

$$\Psi_{\mathcal{A}}[X_b] \;=\; \exp(-S_{cl})\int_{X_i'|_{|z|=1}=0}[dX_i']\exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\partial X_i'\bar{\partial}X_i'\right)\mathcal{A}(0) \tag{6}$$

となります。ただし

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\partial X_{cl}\bar{\partial}X_{cl} \\ &= \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty} nX_nX_{-n} \end{aligned} \tag{7}$$

です。

このとき $\mathcal{A}=1$ (identity operator) の場合には

$$\Psi_{\mathbf{1}}[X_b] \;=\; \exp\left(-\frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty} nX_nX_{-n}\right)\cdot M, \tag{8}$$

ただし

$$M \;\equiv\; \int[dX_i']\exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\partial X_i'\bar{\partial}X_i'\right) \tag{9}$$

($_{X_i'|_{|z|=1}=0}$ を省略) は X_n によらない定数で、また、テキストにあるように $\mathcal{A}=\partial^k X$ のときには

$$\Psi_{\partial^k X}[X_b] \;=\; k!X_k\Psi_{\mathbf{1}}[X_b] \tag{10}$$

となります。

さてここからが本題ですが、$\mathcal{A}$ として normal order されたもの、すなわち conformal normal ordering によって singular な相関関数が引き去られた operator を考えましょう。その例として

$$\mathcal{A} =: (\partial X)^2 : \tag{11}$$

を考えてみます。すると

$$: (\partial X)^2 : \;=\; (\partial X)^2 - \langle(\partial X)^2\rangle \tag{12}$$

より

$$
\begin{aligned}
\Psi_{:(\partial X)^2:}[X_b] &= \int [dX_i'] \exp\left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \partial X_{cl}\bar{\partial}X_{cl}\right) \\
&\qquad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \partial X_i'\bar{\partial}X_i'\right) \\
&\qquad \cdot \left((\partial X_{cl})^2 + (\partial X_i')^2 - \langle(\partial X_i')^2\rangle\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \partial X_{cl}\bar{\partial}X_{cl}\right) \\
&\quad \cdot \left[\int [dX_i'] \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \partial X_i'\bar{\partial}X_i'\right)\left((\partial X_{cl})^2 - \langle(\partial X_i')^2\rangle\right)\right. \\
&\quad \left. + \int [dX_i'] \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \partial X_i'\bar{\partial}X_i'\right)(\partial X_i')^2\right]. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ここで 2 点関数 $\langle(\partial X_i')^2\rangle$ は

$$
\langle(\partial X_i')^2\rangle = \frac{\int [dX_i'] \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \partial X_i'\bar{\partial}X_i'\right)(\partial X_i')^2}{\int [dX_i'] \exp\left(-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \partial X_i'\bar{\partial}X_i'\right)} \qquad (14)
$$

で定義されますから、(13) の $\langle(\partial X_i')^2\rangle$ 項と第 3 行はちょうどキャンセルします。したがって

$$
\Psi_{:(\partial X)^2:}[X_b] = X_1^2 \Psi_{\mathbf{1}}[X_b] \qquad (15)
$$

となり、また

$$
(\alpha_{-1})^2 \Psi_{\mathbf{1}}[X_b] = -\frac{2}{\alpha'}\Psi_{:(\partial X)^2:}[X_b] \qquad (16)
$$

が成り立ちます。

このように、一般に原点に normal order された operator を置くと、$X_i = X_{cl} + X_i'$ と分解したとき、正則および反正則モードしか含まずそれらの積が singularity を生じない X_{cl} のみが $|z| = 1$ の波動関数= state に寄与し、一方 X_i' の相関関数がちょうど $:\cdots:$ で引き去られた部分を補って相殺します。これが p.68 の記述の意味です。