$O(1/m_Q)$ Effect in Lattice Heavy Quark Effective Theory [1]

KEK　橋本 省二
広島大 理　松古 栄夫

1 Introduction

弱い相互作用による崩壊過程 $B \to D^{(*)} l\bar{\nu}$ の universal form factor、Isgur-Wise 関数の、Lattice Heavy Quark Effective Theory を用いた計算について述べる [1]。B メソンや D メソンのような重いクォークを唯一つ含むハドロン系の解析には Heavy Quark Effective Theory (HQET) が適用できる [2]。$B \to D^{(*)}$ の行列要素は、b、c クォークの質量無限大の極限で、唯一の関数 Isgur-Wise 関数 $\xi(v \cdot v')$ で表される。$\xi(v \cdot v')$ は、$\xi(1) = 1$ を満たす。実験から標準理論の基本パラメターである小林-益川行列要素 $|V_{cb}|$ を決定するためには、特にこの関数をゼロ反跳 $v \cdot v' = 1$ の近くで知ることが重要である。

この Isgur-Wise 関数、とくにその $v \cdot v' = 1$ での傾きを、格子 QCD シミュレーションによって求めることが我々の目標である。格子上で重いクォークを取り扱うには、二つの方法が考えられる。一つは通常用いられている伝播するクォークを用いる方法である。この場合、クォークの質量は格子のカットオフより小さくなければならず、現在のコンピューターの能力では c-クォークくらいの質量しか取り扱えない。もう一つの方法は、格子上で HQET を用いることである [3]。我々は HQET を、$O(1/m_Q)$ 補正を含めて格子上で定式化したものによって、格子上の重いクォークを記述する。これによって、b-クォークの質量 m_b での計算が可能となり、$O(1/m_Q)$ 補正の大きさも評価できる。

2 HQET on the lattice

$O(1/m_Q)$ 項までの lattice HQET の作用は次のように表される。

$$S_h = \sum_x \bar{h}(x) \left[-iv \cdot D - \frac{1}{2m_Q}(D^2 + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \right] h(x) \tag{1}$$

ここで $v_\mu = (iv^0, \vec{v})$ は重いクォークの 4 元速度である。共変微分等は格子上のものを用いる。今回の計算では (1) におけるスピンに依る相互作用項 $\frac{1}{m_Q}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ は無視した。$O(1/m_Q)$ 効果は主に (1) の kinetic term によって与えられると期待される。重いクォークのカラー空間でのグリーン関数は次のような発展方程式を解いて得られる。

$$G(x+\hat{t}) = U_4^\dagger(n) \left(1 - \frac{1}{nv^0} \left\{ -i\vec{v}\cdot\vec{D} - \frac{1}{2m_Q} \left(\frac{-1}{(v^0)^2}(\vec{v}\cdot\vec{D})^2 + \vec{D}^2 \right) \right\} \right)^n G(x) + (\text{ source term }). \tag{2}$$

n は発展方程式の安定性を保証するために導入されたパラメターである。同じ理由により、重いクォークの速度は、あまり大きい値をとることは出来ない。発展方程式を解いて求めた $G(n)$ に projection operator $(1 - i\not{v})/2$ をかければ、4-スピノール表現での重いクォークの伝播関数 $S_{h_v}(x)$ を得る。

[1] 講演は松古が行なった。

Form factor $h_+(v\cdot v')$ は次のような三点相関関数を計算して求める。

$$G_{v\to v'}(t_f,t_s,t_i) = \sum_{\vec{x}_s}\sum_{\vec{x}_f}\langle Tr[S_q(x_f,x_i)^\dagger S_{h_{v'}}(x_f,x_s)\gamma_4 S_{h_v}(x_s,x_i)]\rangle$$
$$\propto m_B\, h_+(v\cdot v')(v+v')_0 e^{-E_f(t_f-t_s)-E_i(t_s-t_i)} \quad (\text{for } t_f \gg t_s \gg t_i) \tag{3}$$

S_q は軽いクォークの伝播関数である。これはベクトルカレントの第 4 成分に対応し、始、終状態のメソンは同じ重いクォークを含むものとしている。カレントに対する $O(1/m_Q)$ 補正も今回は無視した。次のような比をとれば余分な因子はキャンセルする。

$$R_{v,v'}(t_f,t_s,t_i) = \frac{G_{v\to v'}(t_f,t_s,t_i)G_{v'\to v}(t_f,t_s,t_i)}{G_{v\to v}(t_f,t_s,t_i)G_{v'\to v'}(t_f,t_s,t_i)}$$
$$\to |h_+(v\cdot v')|^2\frac{(v_0+v_0')^2}{4v_0v_0'}. \tag{4}$$

$m_Q\to\infty$ の極限で、$h_+\to\xi$ 、則ち Isgur-Wise 関数が得られる。

3 Simulation

シミュレーションでは、格子サイズ $24^3\times 48$、$\beta=6.0$ のクエンチ近似で、120 個の配位を用いた。軽いクォークには通常の Wilson fermion を用いた ($\kappa=0.153, 0.155$)。臨界ホッピングパラメターと ρ メソンの質量から求めた格子定数の逆数は、$\kappa_c=0.156986(50)$、 $a^{-1}=2.215(64)$ GeV となった。数値シミュレーションには、広島大学 INSAM (Institute for Numerical Simulation and Applied Mathematics) の Intel Paragon XP/S (56 node) を用いた。重いクォークの質量と安定化パラメターは、

$$\begin{pmatrix} m_Q \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5.0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いた。$m_Q=1.8$ はほぼ bottom クォークの質量に対応する。前に述べた発展方程式の安定性条件より、$\sum_i |v_i|\le 0.25$ となり、これは $1\le v\cdot v'\le 1.12$ の領域に対応する。

格子上では重いクォークの速度 v は、回転対称性が破れているために、繰り込みを受け、$v_R=v+\delta v$ となり得る [4, 5]。我々は heavy-light meson の分散関係を用いて、v_R をシミュレーションから非摂動論的に求めた。得られた結果の例を、$m_Q=1.8$、 $\kappa=0.153$ について図 1 に示す。v_R はわずかに 'bare' な値 v よりも大きい傾向を示すが、現在の統計レベルではほとんどの m_Q、 κ で v と矛盾しない。

次に form factor の結果について述べる。図 2 は $m_Q=1.8$、 $\kappa=0.153$ の場合での h_+ の振舞いを示す。我々の扱う v の領域では、form factor は線形とみなせるため、関数 $h_+(v_R\cdot v_R')=1-\rho^2(v_R\cdot v_R'-1)$ でフィッティングを行なって、$\rho^2\equiv -h_+'(1)$ を求める。また、得られた ρ^2 について、それぞれの m_Q において$\kappa\to\kappa_c$ の外挿を行なう。κ_c は軽いクォークのカイラル極限であり、外挿は $1/\kappa$ について線形に行なう。これらの値は、表 1 にまとめてある。

更に、 $O(1/m_Q)$ 効果の大きさを見るために、$1/m_Q$ について $1/m_Q=0$ への外挿を行なった結果も表 1 示してある。$m_Q\to\infty$ の極限で ρ^2 は大きくなる傾向がみられが、$O(1/m_Q)$ 効果の大きさを定量的に見積もり、チャームクォークへの外挿を行なうためには統計誤差を減らすことが必要である。

結果として ρ^2 は、

$$\rho^2 = 0.70\pm 0.17\pm 0.09 \qquad m_Q=1.8, \tag{5}$$
$$= 0.73\pm 0.67 \qquad m_Q=\infty. \tag{6}$$

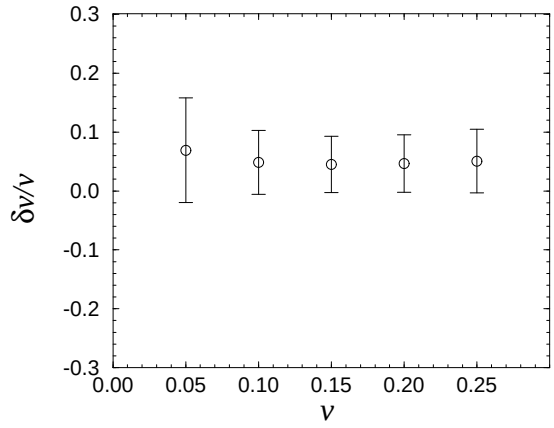

図 1: $m_Q = 1.8$、$\kappa = 0.153$ における $\delta v/v$ の結果。$\delta v = v_R - v$ である。$\delta v/v$ は v にほとんど依らず、ゼロよりやや大きいが、現在の誤差のレベルではゼロとコンシステントである。

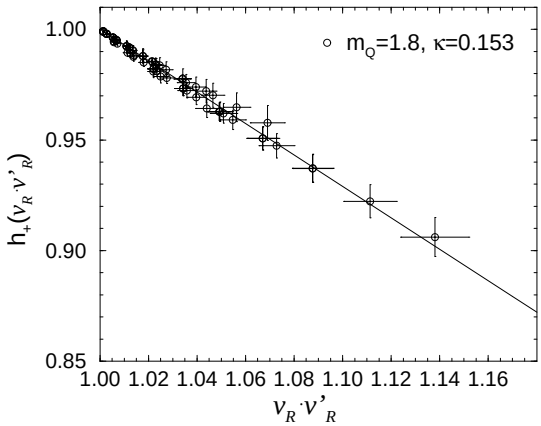

図 2: $m_Q = 1.8$、 $\kappa = 0.153$ における form factor $h_+(v_R{\cdot}v'_R)$ 。我々の用いた速度の領域では、$h_+(v_R{\cdot}v'_R)$ はほぼ線形な振舞いを示すことがわかる。$v_R{\cdot}v'_R = 1$ での傾き、 ρ^2 は $1 - \rho^2(v_R{\cdot}v'_R - 1)$ の形でフィッティングを行なって求めた。

ここで、最初の誤差は統計誤差で、$m_Q = 1.8$ について第二のものは系統誤差である。我々の得た値は、統計誤差が大きいことを考慮に入れると、 CLEO Collaboration による実験データからの値

$$\rho^2 = 0.84 \pm 0.15 \quad \text{CLEO [6]} \tag{7}$$

とコンシステントである。この値は、実験データの一次フィットで得られたもので、$O(1/m_b)$、$O(1/m_c)$ の影響が含まれている。また、他の格子 QCD シミュレーションからの結果と比較しても、大きな矛盾はない。

4 Conclusion

我々は、kinetic term を含む HQET に基づいて、$v \cdot v' = 1$ の近傍で Isgur-Wise 関数を計算した。これによって $O(1/m_Q)$ 効果が部分的に取り入れられている。得られた結果は、他の方法によるものとコンシス

κ	m_Q			
	1.8	2.5	5.0	∞
0.153	0.71(09)	0.72(12)	0.77(30)	0.78(30)
0.155	0.70(13)	0.71(18)	0.77(47)	0.75(46)
κ_c	0.70(17)	0.69(24)	0.77(66)	0.73(67)

表 1: それぞれの m_Q と κ の値における $\rho^2 \equiv -h'_+(1)$ の結果。シミュレーションで得られた $h_+(v_R \cdot v'_R)$ を $1-\rho^2(v_R \cdot v'_R - 1)$ の形でフィッティングして得られた。臨界ホッピングパラメター ($\kappa_c = 0.156986(50)$) での値は $1/\kappa$ について線形に外挿して求められた。また、$m_Q = \infty$ での値は $1/m_Q$ について線形に外挿して得られた。

テントであるが、統計誤差は大きく、$O(1/m_Q)$ 効果を定量的に評価するためにはこれを減らすことが重要である。また他の過程、例えば $B \to \rho l \nu$ 等への lattice HQET の応用も期待される。

参考文献

[1] S. Hashimoto and H. Matsufuru, hep-lat/9511027

[2] For recent review, see M. Neubert, Phys. Rep. 245 (1994) 259

[3] J. Mandula and M. C. Ogilvie, Phys. Rev. D45 (1992) 2183 and hep-lat/9408006

[4] U. Aglietti, Nucl. Phys. B421 (1994)191

[5] J. Mandula and M. C. Ogilvie, Nucl. Phys.B (Proc. Suppl.) 42 (1995) 424

[6] CLEO Collaboration, Phys. Rev. D51 (1995) 1014.