Spectral function analysis of hadron correlators on lattice [1]

ETH-Zurich Ph. de Forcrand
福井大 橋本 貴明
山形大 中村 純
広島大 宮村 修 松古 栄夫

1 Introduction

メソンに関する二点相関函数は、次のようなスペクトル表示で表される。[1]

$$\Pi(\omega,\vec{p}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega'^2 \frac{\rho(\omega',\vec{p})}{\omega'^2+\omega^2}. \tag{1}$$

空間は Euclid 化したものを考える。特に、温度零の系については、Lorentz 不変性から、

$$\Pi(p_0,\vec{p}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{p^2+s}. \tag{2}$$

となる。 ここで、$s = p_0^2 + \vec{p}^2$。Spectral function ρ を非摂動論的に求めることが出来れば、質量スペクトルに関して重要な情報を与えることになる。特に、有限温度下において定量的な計算が可能となれば、相対論的原子核衝突実験における QCD 相転移のシグナルとして提唱されているメソンの mass shift 等についてモデルに依らない予言が出来る。

我々は、このスペクトル表示 (1) の左辺を格子 QCD シミュレーションによって計算し、これから右辺の ρ を数値的に求めることを考える。$S_q(x,0)$ を quark propagator とすると、 メソンの二点相関函数は

$$\begin{aligned}\Pi(p_0,\vec{p}) &= \sum_x e^{-ipx}\langle O(x)O(0)\rangle \\ &= \sum_x e^{-ipx} Tr[\Gamma S_q(0,x)\Gamma^\dagger S_q(x,0)]\end{aligned} \tag{3}$$

と表される。ここで Γ はメソンの量子数を表す γ-matrix である。格子上ではエネルギー、運動量は離散化され、$1/a$ (a は格子定数) を単位として

$$p_\mu = 2\sin(2\pi n_\mu/2L_\mu) \qquad (n_\mu = 0,..,L_\mu - 1) \tag{4}$$

と表される。L_μ は μ 方向の格子のサイズである。

以下ではまず $T = 0$ の場合について方法を説明し、得られたいくつかの結果について述べる。その後、有限温度の場合への適用について議論する。

---

[1] 講演は松古が行なった。

2 Results at the zero temperature

$\rho(s)$ を数値的に求めるために、まず、ρ を矩形函数の重ね合わせとして近似する。

$$\rho(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \theta(s - s_l^{(i)}) \theta(s_u^{(i)} - s) \tag{5}$$

$s_l^{(i)}$, $s_u^{(i)}$ は i 番目の bin の下、上端である。このとき (2) は次のように書ける。

$$\Pi(\omega, \vec{p}) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} c_i \log \left(\frac{s_u^{(i)} + p^2}{s_l^{(i)} + p^2} \right) \tag{6}$$

この形で、シミュレーションから求めた左辺の相関函数に対して fit を行ない、係数 c_i を決定する。

その際、$\rho(s) \geq 0$ であることから、$c_i \to c_i^2$ と置き直して、positivity を保ちながら非線型 fit を行なうことが望ましいが、これを行なうと収束が大変遅いことが分かった。また local minimum に引っかかるようなこともあり得るため、次のような方法を用いた。

(1) まず、bin のうちのある部分集合を選び、これらの bin のみを用いて fit を行ない、c_i を決定する。

(2) 求めた c_i のうち、負の値となるものがひとつでもある場合には、この部分集合は採用しない。

(3) 可能な全ての部分集合 (2^n 通り) について、χ^2 が最も小さいものを探す。

格子 QCD シミュレーションは、次のようなパラメターについて行なった。格子サイズは $12^3 \times 64, \beta = 5.7$ で、dynamical quark の効果を無視する quench 近似を用いた。

Quark は Wilson fermion で、hopping parameter $\kappa = 0.156$ を用いた。ρ meson mass から決めた格子定数の逆数は $1/a = 1.40(3)$ GeV となった。これらの計算は広島大学 INSAM (Institute for Numerical Simulations and Applied Mathematics) の Intel 社の並列計算機 Paragon (56 node) を用いて行なった。通常用いられている時間方向への exponential fit から 質量を求める方法では、Pseudoscalar meson mass は、$1/a$ を単位として $m_P = 0.846(2)$ となった。

この質量を、上に示した方法で再現できるかどうかを調べる。以下、空間方向の運動量はゼロにとる。また、実際には上の表式 (6) から $\Pi(E = 2\sin(\pi/2), \vec{p} = 0)$ を引いたものを用いた。まず、bin の幅 を $\Delta\sqrt{s} = 0.2$ にとり、20 個の bin で ρ を近似して fit を行なったものを 図 1 (a) に示した。その際、最初の bin の下限は $\sqrt{s_l^{(1)}} = 0.01$ にとった。また、18,19 番目の bin の幅は 0.4、20 番目は 5.6 である。High energy の領域では、Lattice cutoff の存在のためあまり意味のある情報は得られない筈である。従って、 fit

	i=18	19	20	Non-zero bin	χ^2
a1	[3.6, 3.8]	[3.8, 4.0]	[4.0, 4.2]	5,6,11,13,20	4.5×10^{-5}
a2	[3.6, 4.0]	[4.0, 4.4]	[4.4, 4.8]	5,6,11,12,14,20	4.0×10^{-5}
a3	[3.6, 4.0]	[4.0, 4.4]	[4.4, 10.0]	5,6,11,12,13,20	3.5×10^{-5}
a4	[3.6, 4.0]	[4.0, 4.4]	[4.4, 100.0]	5,6,8,11,12,20	3.2×10^{-5}

表 1: 右端の bin を変えて fit を行なった結果。図 1 (a) は、この表の (a3) の場合に対応する。

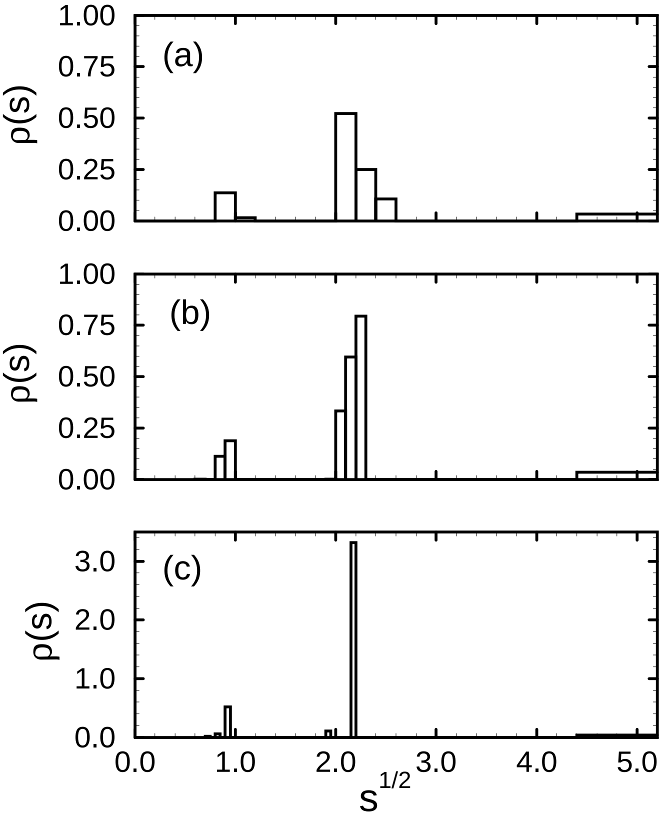

図 1: Fit によって求めた spectral function。χ^2 は、それぞれ、(a) 3.5×10^{-5}, (b) 3.1×10^{-5}, (c) 3.0×10^{-5} である。

の結果が右端の bin の取りかたにあまり依存していないことが、この方法が安定であるために必要である。表 1 に、右端の 3 つの bin を幾つか変えて fit を行なった結果を示す。

ここで、下線を引いたのは、(2) の積分で大きな寄与をするものである。これより、主な寄与を与える bin やその係数の大きさがそれほど大きく影響を受けないことがわかる。図 1 (a) に示したのは 表 1 の (a3) の場合である。図 1(a) より、$\sqrt{s} \sim 0.9, 1.1$ の近傍の bin が主に効いていることが分かり、 これらが ground state と first excited state に対応していることが示唆される。それ以外の bin の係数は、ほとんどゼロであるので、次に、これらの大きな寄与をする領域を更に細分化してみる。

図 1(b) は、$\Delta\sqrt{s} = 0.1$ ととった場合である。ただし、$i = 19, 20$ の二つの bin は、図 1(a) (表 1 a3) と同じものを用いた。また、$[0.6, 1.4]$、$[1.8, 2.8]$ 以外の領域は全てゼロとした。これをみると、spectral function の pole 構造がさらにはっきりしてきたように見える。

更にもう一段階細分化したのが、図 1(c) である。ここでも、$i = 19, 20$ の bin は (a) の場合と同じである。Bin を細分化した領域は $[0.7, 1.1]$、$[1.9, 2.4]$ で、ここでは $\Delta\sqrt{s} = 0.05$ ととった。Ground state については $[0.90, 0.95]$, first excited state については $[2.15, 2.20]$ の bin の寄与が大きい。しかし、通常の方法で測った ground state のメソンの質量は lattice unit で $m_P = 0.846(2)$ であるから、この値を再現できていない。その原因としては、この方法の精度が bin の取り方や high energy の領域の取り扱いなどに大きく依存している可能性などが考えられる。実際、図 1(c) の場合などでは特に、上で述べた step (3) におい

て、最終的に選ばれた bin の集合とかなり近い χ^2 の値を与えるような組合せが数多くある。そのなかでどの集合が最小の χ^2 を与えるかは、シミュレーションで得られた相関函数の統計的誤差に大きく依存するものとおもわれる。

このことや、Non-linear fit での収束の遅さなどから、この問題が逆問題として非適切問題となっていることが考えられる。この場合を想定して、Tikhonov 近似と呼ばれる方法の適用を行なった [2]。しかしながら、その際導入される正則化のパラメターに対する結果の依存性は小さいことが分かった。

以上の結果から、正確な spectroscopy に用いるためにはなんらかの改良が必要であるが、spectral function の定性的な振舞いを調べるためには有効な手段となり得ると思われる。

3 Perspective on the finite temperature case

有限温度の格子理論では、時間方向のサイズ N_t を空間サイズ N_s に対し $N_t \ll N_s$ として、$T = 1/N_t a$ とみなす。ここで、時間方向に対する境界条件は、boson については periodic, fermion については anti-periodic である。高温の系を実現するためには、空間方向に大きな格子を用いるか、時間方向についてかなり少ない格子数を採用しなければならない。しかしながら、時間方向にある程度の自由度がなければ我々の方法を用いることは難しい。また、相転移点付近での系の様子を温度を少しずつ変えながら調べるためにも、時間方向の格子数は多いのが望ましい。このため、時間方向と空間方向の格子間隔が異なる格子 (anisotropic lattice) を用いた計算が行なわれている [3]。

有限温度の場合には、Lorentz invariance は成り立たないため、spectral function はエネルギーと独立に空間運動量に依存する。このため、それぞれの $\vec{p}$ に対し $\rho(\omega, \vec{p})$ を求め、その振舞いを知ることが重要である。これによって、有限温度における分散関係などの情報が得られることが期待される。

4 Conclusion

Spectral function を数値的に求める方法についての試みを述べてきたが、この方法の有効性については、更に研究が必要である。なんらかの改良を行ない、有限温度の格子 QCD と組み合わせて調べることで、ハドロンの興味深い非摂動論的性質を引き出せることを期待している。

参考文献

[1] A.A.Abrikosov,L.P.Gorkov and I.E.Dzyaloshinskii, Sov.Phys.JETP 9 (1959) 636.

[2] チャールズ W. グロエッチュ, 別冊数理科学 数理科学における逆問題, サイエンス社 (1996) 東京

[3] G. Burgers, F. Karsch, A. Nakamura and I. O. Stamatescu, Nucl. Phys. B304 (1988) 587