量子力学 I（北野） 中間テスト

2011 年 11 月 25 日

注意

- 10 時 40 分〜12 時 00 分、持ち込み一切不可。
- 各解答用紙（何枚使ってもかまいません）は縦に使い、上部に学籍番号と名前を書くこと。

以下の問いに答えよ。解答は解答用紙に記入せよ。

1. エネルギー E、時間 T と $\hbar$ を用いて無次元量を作れ。

2. 時刻 t において粒子の位置を $a < x < b$ に観測する確率 $P_{ab}(t)$ を、粒子の波動関数 $\Psi(x,t)$ を用いて表せ。ただし、$\Psi(x,t)$ は規格化されているとする。

3. 規格化された粒子の波動関数を $\Psi(x,t)$ とする。このとき観測される位置の期待値 $\langle x \rangle$、運動量の期待値 $\langle p \rangle$、エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を、波動関数 $\Psi(x,t)$ を用いてそれぞれ表せ。（ポテンシャルや質量を使わない表式で答えてください。）

4. 次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x^2 - 3) dx$$

（裏面につづく）

5. 完全剛体にはさまれた自由粒子の運動を考える。ポテンシャルは

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le a), \\ \infty & (x < 0,\ x > a) \end{cases}$$

であたえられ、$x < 0$ および $x > a$ の領域に粒子を観測する確率はゼロであるとする。

(1) 時間によらないシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

を境界条件 $\psi(0) = \psi(a) = 0$ のもとで解いて、物理的に許されるエネルギー E の値をすべて求めよ。

(2) 最小のエネルギー E_1 と、2 番目に小さいエネルギー E_2 に対応する解 $\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$ をそれぞれ求めよ。ただし、

$$\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 1$$

となるように規格化せよ。

(3) 初期状態の波動関数が、問 (2) で求めた $\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$ を用いて、$0 \le x \le a$ の領域で、

$$\Psi(x, 0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$$

と与えられる場合を考える。ただし、c_1 と c_2 は複素数である。

(3a) 規格化から c_1 と c_2 の間に成り立つ関係式を導け。

(3b) 波動関数 $\Psi(x, t)$ を求めよ。ただし、表式には c_1、c_2、ψ_1、ψ_2、E_1、E_2 を使ってもよい。

(3c) エネルギーを E_2 に観測する確率を求めよ。

(3d) エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を、c_1、c_2、E_1、E_2 で表せ。