量子力学 I（北野） 期末テスト

2012 年 1 月 27 日

注意

- 10 時 40 分〜12 時 00 分、持ち込み一切不可。
- 各解答用紙（何枚使ってもかまいません）は縦に使い、上部に学籍番号と名前を書くこと。

以下の問いに答えよ。解答は解答用紙に記入せよ。

1. 運動量 p、長さ L と $\hbar$ を用いて無次元量を作れ。

2. 次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta\left(2x-1\right) dx$$

3. 波動関数 $\Psi(x,t)$ が

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

で与えられる自由粒子を考える。ただし、$\phi(k)$ と $\omega(k)$ は k の関数で、$\phi(k)$ は

$$\phi(k) = \begin{cases} Ae^{-ka}, & (k \geq 0) \\ 0, & (k < 0) \end{cases}$$

である。A は規格化定数で、a は正の実定数である。以下の問いに答えよ。

(1) $\omega(k)$ を求めよ。

(2) この粒子の運動量 p を $p > p_0$ に観測する確率を、$p_0,\, a,\, \hbar$ を用いて表せ。ただし、$p_0 > 0$ とする。

（裏面につづく）

4. 調和振動子のハミルトニアンは運動量演算子 $\hat{p}$ と位置演算子 $\hat{x}$ を用いて

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

と表される。m は粒子の質量、ω は古典的な角振動数である。この調和振動子について以下の問いに答えよ。

(1) 位置の期待値 $\langle x \rangle$、運動量の期待値 $\langle p \rangle$ の時間発展を表す微分方程式を導け。

(2) $\langle x \rangle$ と $\langle p \rangle$ を用いて、古典的エネルギーを

$$E_c = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\langle x \rangle^2$$

と定義する。このとき、任意の状態においてエネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ は

$$\langle E \rangle \geq E_c + \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすことを示せ。

(3) ハミルトニアンを生成消滅演算子：$\hat{a}_\pm = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x})$, を用いて表し、物理的に許されるエネルギーをすべて求めよ。

(4) $\hat{H}$ の固有値を E_n $(n = 0, 1, 2, \cdots$、$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots)$ として、それに対応する固有関数を $\psi_n(x)$ とする。ただし、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x)dx = \delta_{nm}$ と規格化されている。そこで、時刻 $t = 0$ での波動関数が、

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_4(x) + \psi_5(x)\right)$$

で与えられるような状態を考える。

(4a) この状態においてエネルギーを E_n に観測する確率 P_n を求めよ。

(4b) 時刻 t における位置の期待値 $\langle x \rangle$ を t, m, ω, $\hbar$ で表せ。また、$\langle E \rangle$ と問 (2) で定義した E_c を求め、不等式①を確かめよ。必要であれば、以下の式を使ってもよい。

$$\hat{a}_+\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x), \quad \hat{a}_-\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x).$$