行列模型から4次元は出るのか？
～ガウス展開法とシミュレーションの進展と展望～

平成20年 3月 4日（火） KEK理論研究会

高エネルギー加速器研究機構
素粒子原子核研究所
西村　淳

- based on collaborations with

Konstantinos Anagnostopoulos
(National Technical University, Athens)

Tatsumi Aoyama (KEK)

Takehiro Azuma（Tata Inst. → Setsunan U.）

Masanori Hanada (Weizmann Inst.)

Toshiyuki Okubo (Meijo U.)

Fumihiko Sugino (Okayama Inst.)

Shingo Takeuchi (KEK)

超弦理論はどこまで来たか？

QCD		超弦理論
強い相互作用	記述するもの	重力を含むすべての相互作用
自由なクォーク	摂動論	10次元時空
閉じ込め	非摂動ダイナミクス	コンパクト化
格子ゲージ理論 (Wilson ’74)	非摂動的定式化	超対称行列模型(BFSS,IKKT)
強結合展開 シミュレーション(Creutz ’80)	解析手法	ガウス展開法 シミュレーション
SU(2)、NJL模型 クエンチ近似	簡単化した模型	超対称性の低い模型、toy model 低エネルギー有効理論
ハドロンの性質	目標	ブラックホールの性質 標準模型の導出など

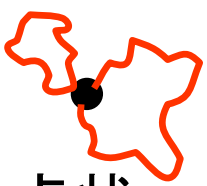
2度のストリング・ブームを経て・・・

- 85年頃　弦の相互作用が弱い場合の研究

  10次元時空　：　現実世界（4D）と矛盾

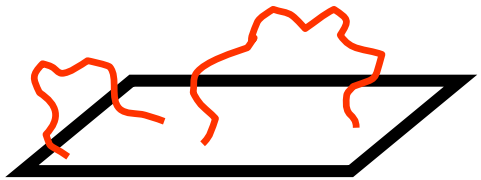
  ⇒ 6次元分、手で丸める　（コンパクト化）

- 95年頃　ポルチンスキー　：　「弦の凝縮状態」



点状

ひも状



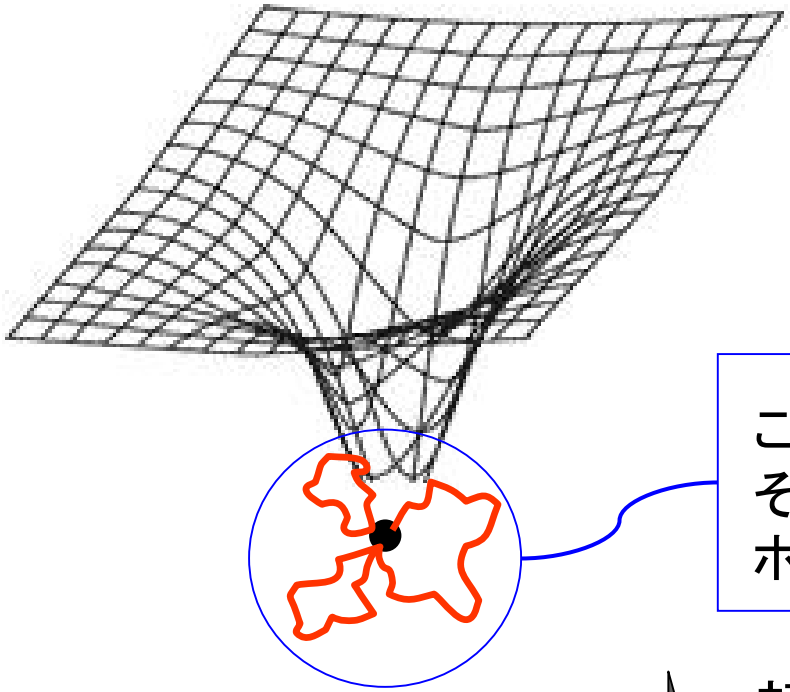
膜状
membrane

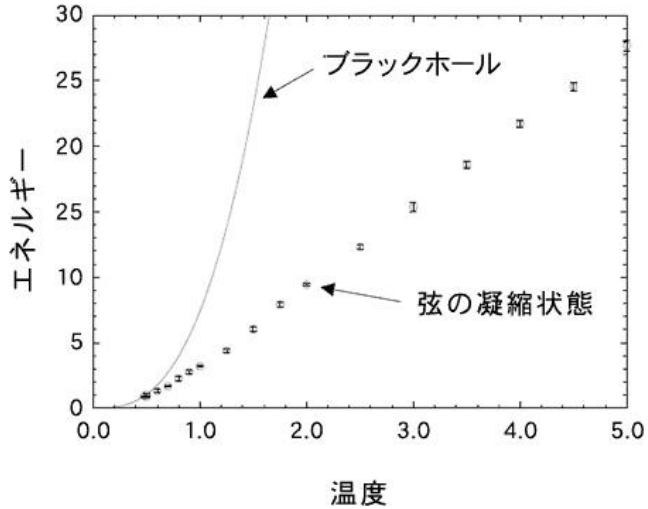
・・・一般次元の‘膜’　　総称してブレーン

ブレーンでブラックホールを作る

97年～　マルダセナ、ウィッテン、・・・

- Anagnostopoulos-花田-西村-竹内（’07）



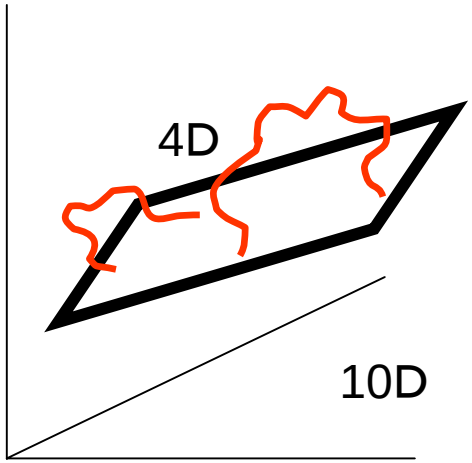


この弦の凝縮状態を数値シミュレーション。
そのエネルギーの計算に初めて成功。
ホーキングの理論と一致。

超弦理論が予測する
ブラックホール内部の様子を実証

ブレーンで宇宙を作る

- 96年 ブレーンに基づく超弦理論の新しい定式化
  Banks-Fischler-Shenker-Susskind
  石橋、川合、北澤、土屋



ブレーン自体のダイナミクスを解く

もともと弦の伝播しうる10Dの世界に
我々の4Dの世界が現れるか？

スパコンでシミュレーション

（示されれば、超弦理論が現実世界を記述している有力な証拠に）

行列模型から4次元時空が出るのか？

- 「慣性モーメントテンソル」

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_\mu A_\nu)$$

10×10　実対称行列の固有値

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{10}$$

SO(10)対称性の自発的破れを見るオーダーパラメタ

調べたいこと:

$N \to \infty$　の極限で、　SO(10)→SO(4)

$$\langle\lambda_1\rangle = \langle\lambda_2\rangle = \langle\lambda_3\rangle = \langle\lambda_4\rangle \gg \langle\lambda_5\rangle$$

というようなことが、起こるか？

シミュレーションの難しさ

- フェルミオン行列式

$$S_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2} N (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} \mathrm{tr}\left\{\psi_\alpha [A_\mu, \psi_\beta]\right\} \sim \Psi_i \mathcal{M}_{ij} \Psi_j$$

$$Z = \int dA\, \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{B}}[A]} \mathrm{Pf}\mathcal{M}[A]$$

一般に複素

このままではボルツマン重率として扱えない

- reweighting

$$Z_0 = \int dA\, \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{B}}[A]} \left|\mathrm{Pf}\mathcal{M}[A]\right|$$

のシミュレーションを行い、期待値の計算の際に位相の効果を考慮。

$$\langle \lambda_i \rangle = \frac{\langle \lambda_i\, \mathrm{e}^{i\Gamma} \rangle_0}{\langle \mathrm{e}^{i\Gamma} \rangle_0}$$

e^{-cN^2} で小さくなる

しかも効率的なサンプリングができない

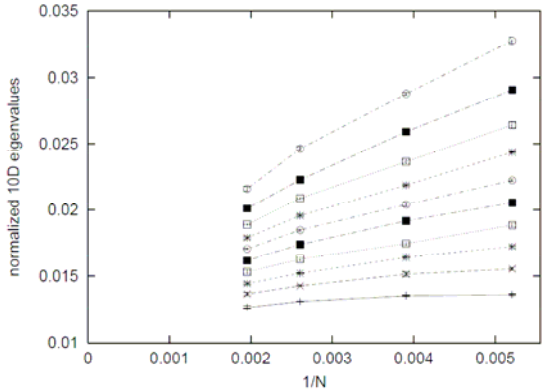
時空がつぶれるメカニズム

- $Z_0 = \int dA\, \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{B}}[A]} \left|\mathrm{Pf}\mathcal{M}[A]\right|$ に対する結果

$$\langle \lambda_i \rangle_0 = C + \frac{a_i}{N} + \cdots$$

有限 N 効果

以下、$\tilde{\lambda}_i \equiv \dfrac{\lambda_i}{\langle \lambda_i \rangle_0}$ を用いる



Ambjorn-Anagnostopoulos-Bietenholz-Hotta-J.N.('00)

- 位相の効果

$$Z = \int dA\, \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{B}}[A]} \left|\mathrm{Pf}\mathcal{M}[A]\right| \mathrm{e}^{i\Gamma[A]}$$

つぶれた時空

$\lambda_{10} = 0$ etc. ⇒ $\Gamma[A] = 0$ J.N.-Vernizzi ('00)

位相がそろっている為、寄与が強めあう

位相の効果をどう調べるか？

- factorization method　　Anagnostopoulos-J.N. ('02)

$T_{\mu\nu}$ の i 番目の固有値の分布　　$i = 1, 2, \cdots, 10$

$$\rho_i^{(0)}(x) = \langle \delta(x - \tilde{\lambda}_i) \rangle_0$$

定義より $x = 1$ にピーク

$$\rho_i(x) = \langle \delta(x - \tilde{\lambda}_i) \rangle$$

位相 Γ の効果

$$\rho_i(x) \propto \rho_i^{(0)}(x)\, w_i(x)$$

$w_i(x)$ をどう求めるか？

$$w_i(x) = \langle \cos \Gamma \rangle_{i,x}$$

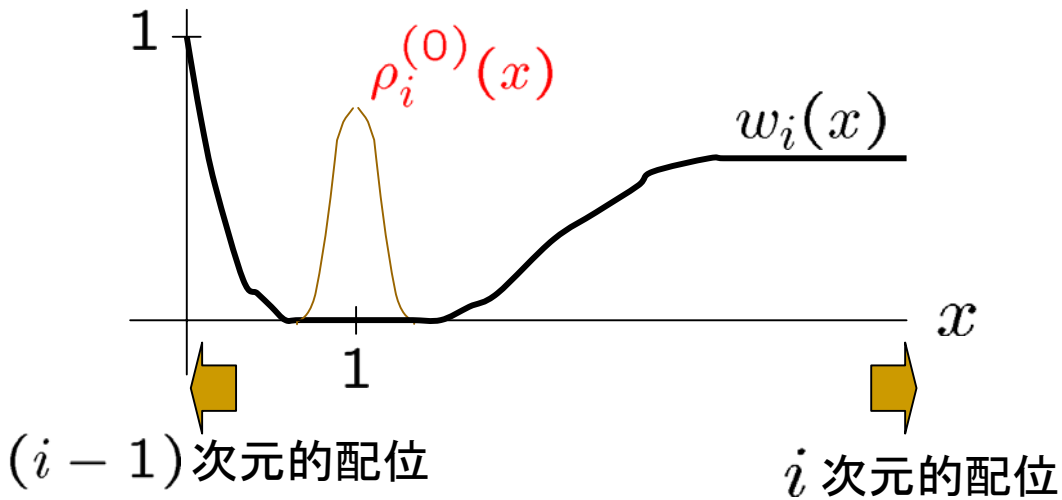
$\tilde{\lambda}_i$ を x に拘束したシミュレーション

$$Z_{i,x} = \int dA\, \mathrm{e}^{-S_{\mathrm{B}}[A]}\, |\mathrm{Pf}\mathcal{M}[A]|\, \delta(\tilde{\lambda}_i - x)$$

4次元時空が現れるシナリオ

- $w_i(x)$ の定性的な振る舞い

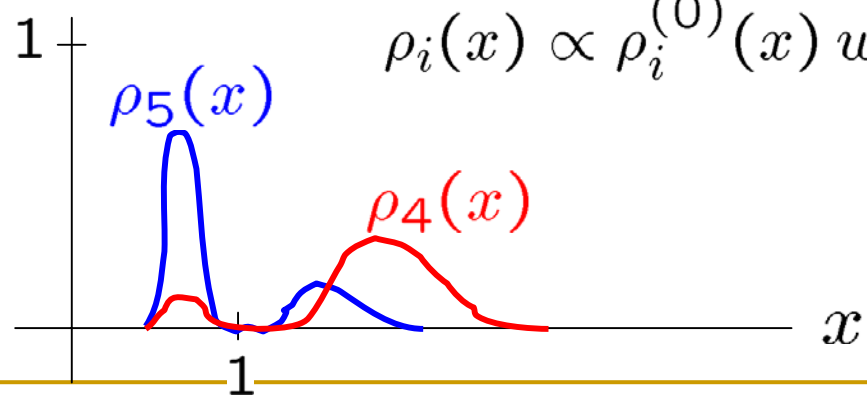
$$i = 1, 2, \cdots, 10$$



$$w_i(x) = \langle \cos\Gamma \rangle_{i,x}$$

つぶれた配位に対しては
大きい値をとる

$$\rho_i(x) \propto \rho_i^{(0)}(x)\, w_i(x)$$



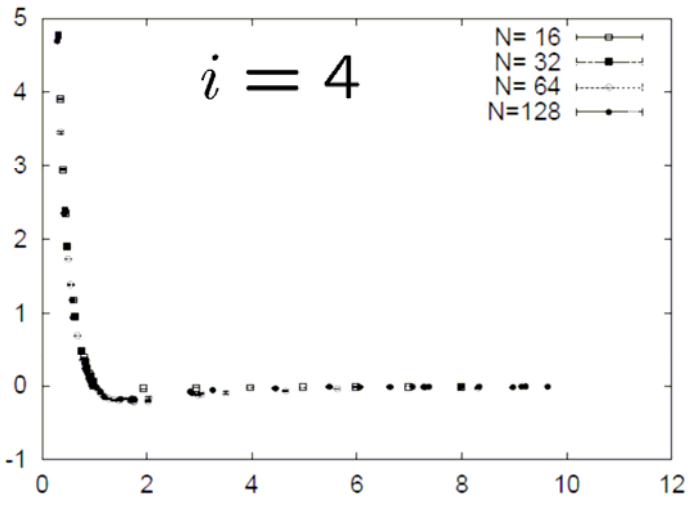
ラージNでのスケーリング

- 6d IKKT model (1-loop近似)の結果

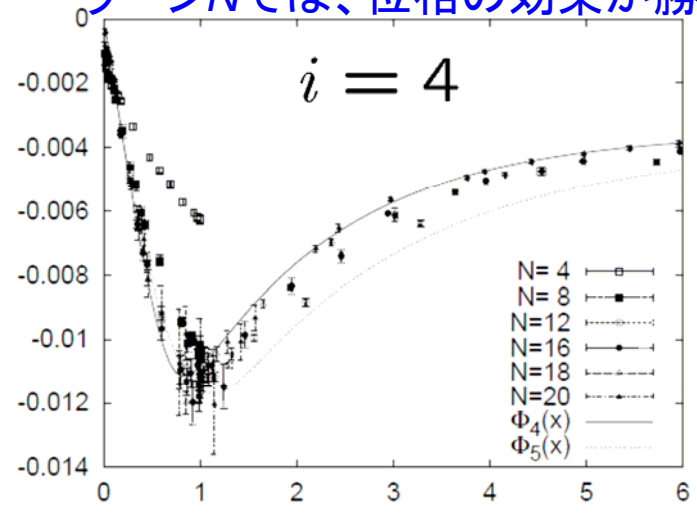
Anagnostopoulos-J.N. ('02)

$$\rho_i(x) \propto \rho_i^{(0)}(x)\, w_i(x)$$ のピークの位置を決める式

$$\frac{1}{N}\left\{\frac{1}{N}\frac{d}{dx}\ln \rho_i^{(0)}(x)\right\} = -\frac{d}{dx}\frac{1}{N^2}\ln w_i(x)$$



ラージNでは、位相の効果が勝つ



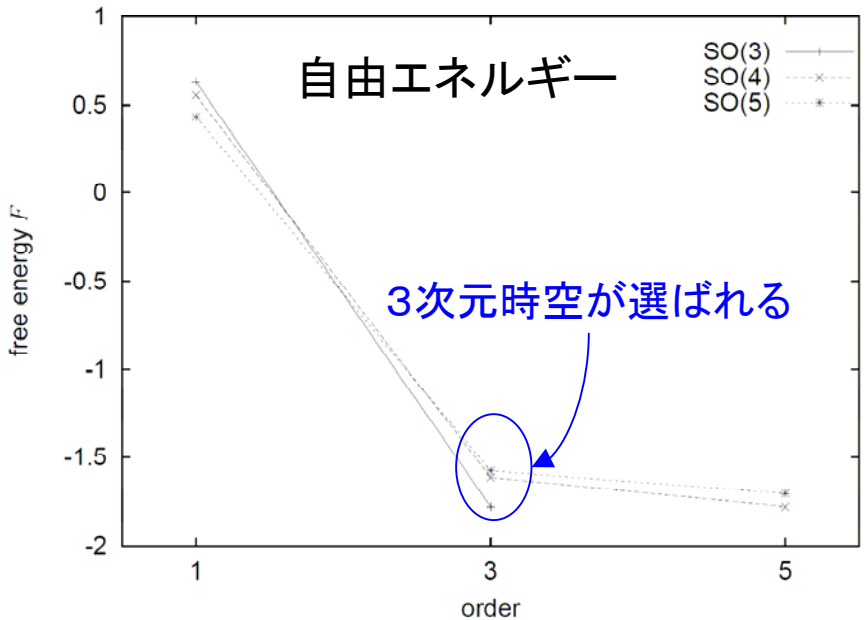
どこまでつぶれるのか？

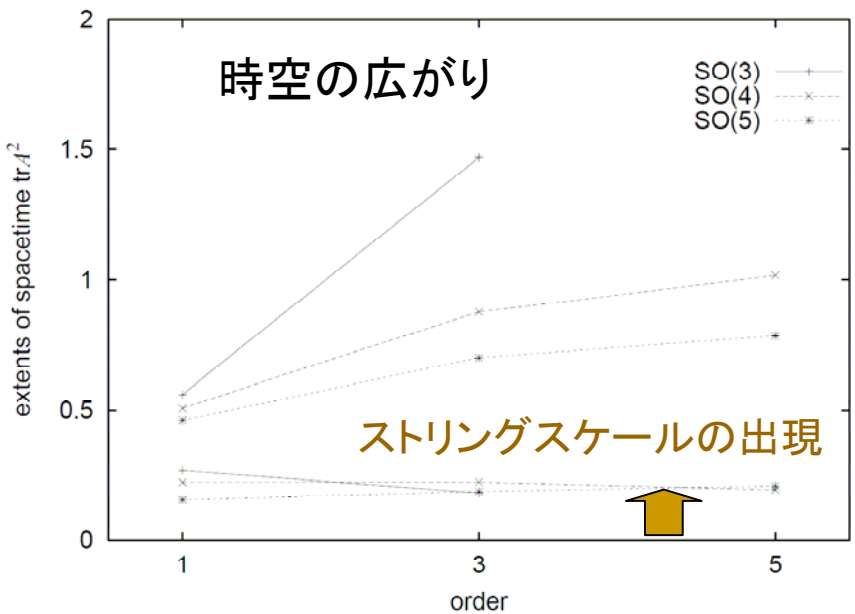
- 2次元的配位 $\lambda_i = 0 \ (i \geq 3)$ に対しては、

  $\mathrm{Pf}\mathcal{M}[A] = 0$ ➡ 強く抑制される

- 6d IKKT model（ガウス展開法）

Aoyama-J.N.-Okubo, in prep.





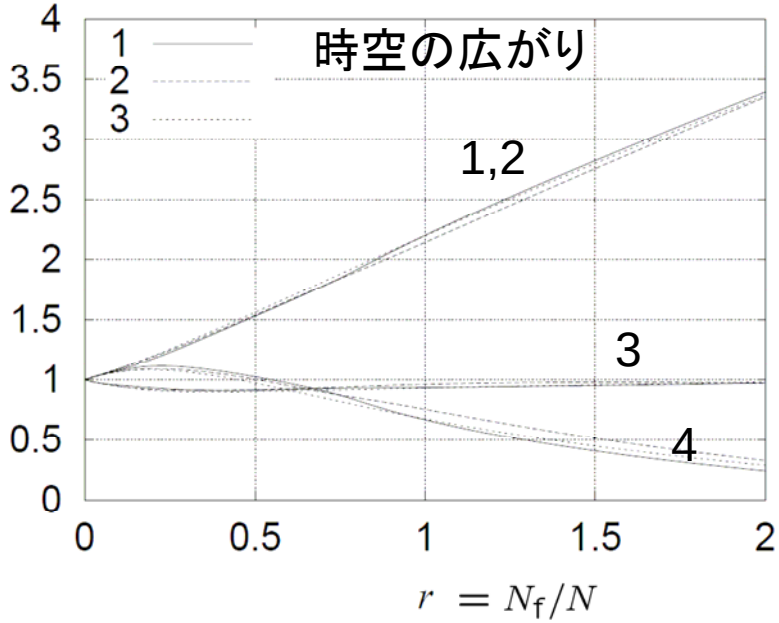
トイ・モデル　J.N. ’02

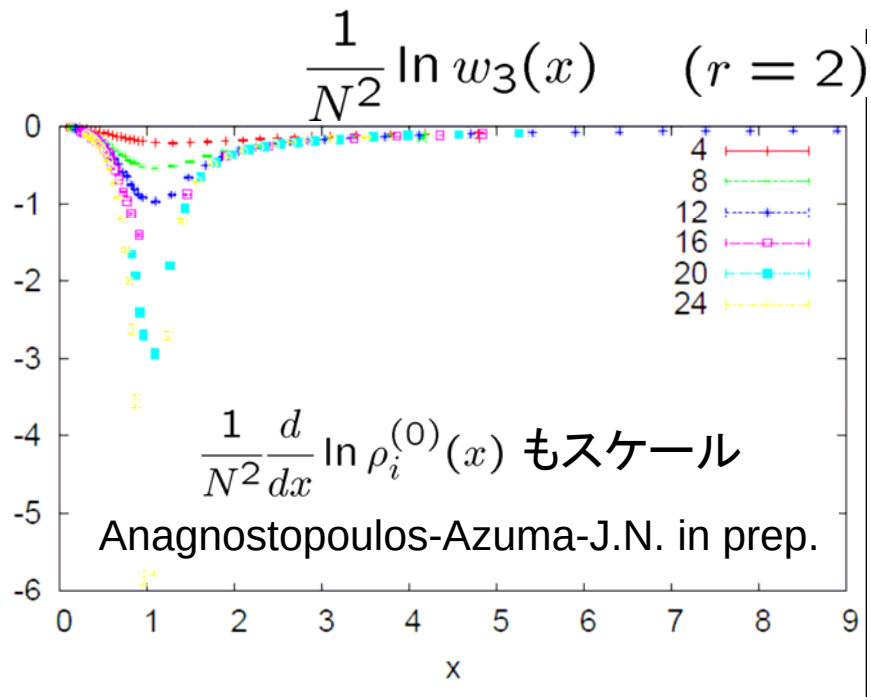
～ガウス展開法とシミュレーションが見事に一致した例

- A_μ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ に　$\mathrm{tr}(A_\mu)^2$

  N_f 個のWeyl fermion (SU(N)の基本表現)が結合　$\bar{\psi}\Gamma_\mu A_\mu \psi$

J.N.-Okubo-Sugino ’03





まとめと展望

- 行列模型は重力を含む　　c.f.) ブラックホールの熱力学
- 解析方法の発展

  ガウス展開法　：　QCDにおける「強結合展開」のような役割
  シミュレーション　：　$\mathrm{Pf}\mathcal{M}[A]$ の位相の効果の理解
  factorization method
- トイ・モデル、6d IKKT modelの解析
- 3次元まで潰れるか、4次元でとどまるか？

  「ストリング・スケールの出現」と密接な関係
  1-loop近似を用いないシミュレーションが重要
- BFSS, DVV modelなどでもSSBは起こるか？

  江口・川合リダクションに基づく議論　　Kawahara-J.N. ’05
  ゲージ・重力対応に基づく研究　　石橋、磯、住友、J.N. in progress