

大学院一般相対論講義マスターファイル

小玉 英雄

京都大学基礎物理学研究所

目次

第 1 章 序論	5
1.1 一般相対論の諸問題とアプローチ	5
1.1.1 諸問題	5
1.1.2 様々なアプローチ	5
1.2 Einstein 方程式の構造	6
1.2.1 一般相対論の基礎方程式	6
1.2.2 摂動論	7
1.2.3 Newton 近似	8
1.2.4 時空の分解	9
1.2.5 初期値問題	13
1.3 数学的準備	16
1.3.1 基底と接続形式	16
1.3.2 Weyl テンソル	17
1.3.3 Petrov タイプ	17
1.3.4 等長変換群	20
第 2 章 宇宙論	23
2.1 定曲率空間	23
2.1.1 2 次超曲面の曲率	23
2.1.2 一様等方空間	24
2.2 定曲率時空	25
2.2.1 定曲率時空	25
2.2.2 de Sitter 宇宙	26
2.2.3 Anti-de Sitter 宇宙	27
2.3 Raychaudhuri 方程式	29
2.3.1 Jacobi 方程式	29
2.3.2 Fermi 基底による表示	29
2.3.3 Expansion, shear, rotation	30
2.3.4 Raychaudhuri 方程式	30
2.3.5 一様宇宙モデルへの応用	31
2.4 一様等方宇宙モデル	33

2.4.1	基礎方程式	33
2.4.2	一般的性質	34
2.4.3	標準的な宇宙モデル	34
2.5	非等方一様宇宙モデル	38
2.5.1	変換群	38
2.5.2	等長変換群と不変基底	39
2.5.3	基礎方程式	40
2.5.4	一般的性質	42
2.5.5	Bianchi types	42
2.5.6	厳密解	43
2.6	高次元宇宙モデル	47
2.6.1	背景	48
2.6.2	Kaluza-Klein モデル	49
2.6.3	$D = 11$ 超重力理論	51
2.6.4	インフレーション問題	54
2.6.5	ブレーンワールドモデル	60
第3章 摂動論		66
3.1	背景時空	66
3.2	摂動変数とゲージ自由度	67
3.3	テンソルの既約分解	68
3.4	テンソル型摂動	69
3.4.1	Tensor Harmonics	69
3.4.2	調和テンソル展開	70
3.4.3	ゲージ不変量	70
3.4.4	Einstein 方程式	70
3.4.5	RW 宇宙でのテンソル型摂動	70
3.5	ベクトル型摂動	71
3.5.1	ベクトル型 harmonics	71
3.5.2	Harmonic expansion	72
3.5.3	ゲージ不変量	72
3.5.4	Einstein 方程式	73
3.5.5	RW 宇宙でのベクトル型摂動	73
3.6	スカラ型摂動	73
3.6.1	スカラ型 Harmonics	73
3.6.2	Harmonic expansion	74
3.6.3	ゲージ不変量	75
3.6.4	Einstein 方程式	76
3.6.5	エネルギー運動量保存則	77
3.6.6	長波長極限	77
3.6.7	RW 宇宙でのスカラ型摂動	79
3.6.8	断熱モード	80
3.6.9	Δ_n の固有値	83

第4章 ブラックホール	84
4.1 Einstein ブラックホール	84
4.1.1 一般化された球対称時空	84
4.1.2 Birkhoff の定理	85
4.1.3 Schwarzschild BH	88
4.1.4 2次元共形図式	91
4.1.5 ホライズンと特異点	94
4.1.6 静的球対称時空での粒子の運動	96
4.2 Hodge 双対	99
4.3 定常軸対称時空	101
4.4 静的軸対称ブラックホール	104
4.4.1 静的時空	104
4.4.2 Weyl クラス	105
4.4.3 Schwarzschild 計量	106
4.4.4 Israel-Kahn 解	107
4.4.5 Zipoy-Voorhees 解	108
4.4.6 C-metric	109
4.4.7 String 計量	111
4.5 軸対称定常ブラックホール	113
4.5.1 Ernst 形式	114
4.5.2 Ernst 方程式	117
4.5.3 Kerr-TS class	117
4.5.4 Kerr-Newman 解	118
4.5.5 Kerr-Schild 型	120
4.5.6 Kerr 時空の測地線	121
4.6 一意性定理	123
4.6.1 諸定義	123
4.6.2 ホライズンの位相	124
4.6.3 非回転ブラックホール	124
4.6.4 軸対称ブラックホール	125
4.7 高次元への一般化	127
4.7.1 一般化された Weyl 理論	127
4.7.2 5D Schwarzschild Solution	128
4.7.3 Rod 描像	129
4.7.4 5D ZVW solution	129
4.7.5 Black Ring Solution	131
4.7.6 Multi-Black Ring and Black Hole Solutions	133
4.7.7 5D ZVW solution as a limit of BH-BR solutions	133

1

序論

§1.1

一般相対論の諸問題とアプローチ

1.1.1 諸問題

- 弱い重力場の効果：一般相対論の古典的テスト
- 天体と時空の構造：相対論的天体，ブラックホール，降着円盤，ジェット，時空特異点，特異物体（宇宙ひも，ドメインウォール，ソリトン）
- 強い重力場による新たな物理現象：重力レンズ，粒子生成
- ダイナミクス：近接連星，重力崩壊，相対論的天体衝突，重力波放出，宇宙の構造と進化
- 大域的問題：時空のトポロジー，因果構造，時空特異点
- 原理的諸問題：ブラックホールの蒸発，ブラックホール熱力学，真空のエネルギー，量子重力・量子宇宙論
- 重力理論の変更：統一理論，高次元理論

1.1.2 様々なアプローチ

- 厳密解
- 大域微分幾何学による数学的アプローチ
- 摂動論
- 数値シミュレーション

 §1.2

Einstein 方程式の構造

1.2.1 一般相対論の基礎方程式

Einstein 方程式 作用積分

$$S = S_G + S_M; \quad (1.2.1)$$

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda). \quad (1.2.2)$$

より

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.2.3)$$

ここで,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (1.2.4)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \quad (1.2.5)$$

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \Gamma^\gamma_{\mu\beta}, \quad (1.2.6)$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (1.2.7)$$

また、

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (1.2.8)$$

特徴

- 一般共変性 (微分同相不変性, 座標変換不変性)
- 縮約 Bianchi 恒等式

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2.9)$$

運動方程式 圧力がゼロの流体に対して

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (1.2.10)$$

この系に対する保存則は

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = u^\mu \nabla_\nu (\rho u^\nu) + \rho u^\nu \nabla_\nu u^\mu \quad (1.2.11)$$

より

$$\nabla_\nu (\rho u^\mu) = 0, \quad (1.2.12a)$$

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0. \quad (1.2.12b)$$

この第2式は、構成粒子が測地線に沿って運動することを示している：

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \quad (1.2.13)$$

1.2.2 摂動論

【公式 1.2.1】

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の変分 $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ に対して、接続係数、曲率テンソルなどの幾何学的諸量は次のように変化する：

$$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu} + O(h^2), \quad (1.2.14a)$$

$$\delta|g| = |g|h + O; \quad h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \quad (1.2.14b)$$

$$\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}(\nabla_{\nu}h_{\lambda}^{\mu} + \nabla_{\lambda}h_{\nu}^{\mu} - \nabla^{\mu}h_{\nu\lambda}) + O(h^2), \quad (1.2.14c)$$

$$\delta R^{\nu}{}_{\nu\lambda\sigma} = \nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + O(h^2) \quad (1.2.14d)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}h_{\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}h_{\lambda}^{\mu} - \nabla_{\lambda}\nabla^{\mu}h_{\nu\sigma} + \nabla_{\sigma}\nabla^{\mu}h_{\nu\lambda}) \quad (1.2.14e)$$

$$+ R_{\lambda\sigma}{}^{\mu}{}_{\beta}h_{\nu}^{\beta} + R_{\lambda\sigma\nu}{}^{\beta}h_{\beta}^{\mu}) + O(h^2), \quad (1.2.14f)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\nabla^2 h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h + \nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + \nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}h_{\mu}^{\alpha}) \quad (1.2.14g)$$

$$+ R_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + R_{\nu\alpha}h_{\mu}^{\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}) + O(h^2), \quad (1.2.14h)$$

$$\delta R = -h_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu} - \nabla^2 h + O(h^2). \quad (1.2.14i)$$

□

□

摂動方程式

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg_{\mu\nu} \quad (1.2.15)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \Delta_L \psi_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\psi_{\nu}^{\alpha} + \nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\psi_{\mu}^{\alpha} - \nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}\psi_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - R\psi_{\mu\nu} \\ = 2\kappa^2\delta T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

ここで， Δ_L は次式で定義される Lichnerowicz 作用素：

$$\Delta_L \psi_{\mu\nu} := -\square\psi_{\mu\nu} + R_{\mu\alpha}\psi_{\nu}^{\alpha} + R_{\nu\alpha}\psi_{\mu}^{\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta}. \quad (1.2.17)$$

ゲージ変換

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \quad (1.2.18)$$

に対して，

$$\bar{\delta}h_{\mu\nu} = -\nabla_{\mu}\xi_{\nu} - \nabla_{\nu}\xi_{\mu}, \quad (1.2.19)$$

$$\bar{\delta}\psi_{\mu\nu} = -\nabla_{\mu}\xi_{\nu} - \nabla_{\nu}\xi_{\mu} + \nabla_{\alpha}\xi^{\alpha}g_{\mu\nu}. \quad (1.2.20)$$

調和ゲージ ゲージ条件

$$\nabla^\nu \psi_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2.21)$$

の元で，摂動方程式は

$$\Delta_L \psi_{\mu\nu} + R^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - R \psi_{\mu\nu} = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu}. \quad (1.2.22)$$

Flat background 調和ゲージのもとで，

$$\square \psi_{\mu\nu} = -2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu}. \quad (1.2.23)$$

これは重力波に対する波動方程式を与える．ただし，ゲージ条件は

$$\partial_0 \psi_{00} = \partial^i \psi_{0i}, \quad \partial_0 \psi_{0i} = \partial^j \psi_{ij} \quad (1.2.24)$$

を与えるので，(00)成分および(0i)成分は実際には $\psi_{0\mu}$ に対する Poisson 型の方程式となっている：

$$\Delta \psi_{00} - \partial^i \partial^j \psi_{ij} = -2\kappa^2 \delta T_{00}, \quad (1.2.25a)$$

$$\Delta \psi_{0i} - \partial_0 \partial^j \psi_{ij} = -2\kappa^2 \delta T_{0i}. \quad (1.2.25b)$$

これらの方程式は，縮約 Bianchi 方程式とゲージ条件より，ある時刻で満たされればその後の時刻で常に満たされる．さらに，調和ゲージはゲージを完全には固定せず，

$$\bar{\delta}(\nabla^\nu \psi_{\mu\nu}) = -\square \xi_\mu - R_{\mu\alpha} \xi^\alpha = 0 \quad (1.2.26)$$

を満たす ξ^μ に対する残留ゲージ自由度を残している．したがって，独立な力学自由度（重力波の自由度）は，時空次元が D のとき、

$$\frac{D(D-1)}{2} - D = \frac{D(D-3)}{2} \quad (1.2.27)$$

となる．例えば、 $D = 4$ では重力波の自由度は2となる．

1.2.3 Newton 近似

物質の運動が非相対論的で、重力場が弱いとき、 $\epsilon = GM/L, \beta = v/c$ で展開すると、

$$\kappa^2 L^2 T_{00} = O(\epsilon), \quad \kappa^2 L^2 T_{0i} = O(\epsilon\beta), \quad \kappa^2 L^2 T_{ij} = O(\epsilon\beta^2) \quad (1.2.28)$$

となる．よって，摂動方程式より，

$$\psi_{ij} = O(\epsilon\beta^2), \quad \psi_{0i} = O(\epsilon\beta), \quad \psi_{00} = O(\epsilon) \quad (1.2.29)$$

を得る．これより，

$$h_{00} = \frac{D-3}{D-2}\psi_{00} + O(\epsilon\beta^2), \quad (1.2.30a)$$

$$h_{0i} = \psi_{0i} = O(\epsilon\beta), \quad (1.2.30b)$$

$$h_{ij} = \frac{1}{D-2}\psi_{00}\delta_{ij} + O(\epsilon\beta^2). \quad (1.2.30c)$$

よって， ϵ および β について最低次で，

$$\begin{aligned} -m\delta \int ds &= -\delta \int dt [1 - h_{00} - 2h_{0i}\dot{x}^i - (\delta_{ij} + h_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j]^{1/2} \\ &= \delta \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \phi \right) \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

となる．ここで，

$$h_{00} = -2\phi \quad (1.2.32)$$

とおいた．これより，非相対論的近似での運動方程式と Einstein 方程式は

$$\Delta\phi = \frac{D-3}{D-2}\kappa^2\rho, \quad (1.2.33a)$$

$$\ddot{x}^i = -\partial_i\phi, \quad (1.2.33b)$$

となるので， ϕ が Newton ポテンシャルに対応することが分かる．また， r が大きいときのポテンシャルは

$$\phi = \frac{\mu}{r^{D-3}}; \quad \mu = \frac{\kappa^2 M}{(D-2)\Omega_{D-2}} \quad (1.2.34)$$

で与えられる．ここで， Ω_n は n 次元単位球面の面積である．

1.2.4 時空の分解

Riemann 接続 : Riemann 多様体 (\mathcal{M}, g) の Riemann 接続 ∇ は次の条件を満たす一意的な線形接続である．

1. (計量条件) $\nabla g = 0$.
2. (ねじれ条件) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Gauss の公式 : 時空 (\mathcal{M}, \tilde{g}) の Riemann 接続を $\tilde{\nabla}$ ， \mathcal{M} 内の超曲面を Σ ， n を Σ の単位法ベクトル場とする． Σ に接するベクトル場 X, Y に対して，

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - K(X, Y)n; \quad \nabla_X Y \parallel \Sigma \quad (1.2.35)$$

と直交分解すると， $[X, Y]$ が Σ に接することより， ∇ は \tilde{g} から Σ に誘導された計量 g に関する Riemann 接続となり，また $K(X, Y)$ は Σ 上の対称テンソル (第2基本形式ないし外部曲率) となる：

$$K(X, Y) = K(Y, X). \quad (1.2.36)$$

Weingarten の公式 : X を Σ に平行なベクトル場, n を Σ の単位法ベクトル場として, Σ 上の $(1, 1)$ 型混合テンソル場 $K(X)$ を

$$g(K(X), Y) = K(X, Y) \quad (1.2.37)$$

により定義すると,

$$\tilde{\nabla}_X n = \pm K(X) \uparrow \Sigma; \quad g(n, n) = \pm 1 \quad (1.2.38)$$

が成り立つ.

計量による表現 : $(d+1)$ 次元時空の計量は一般に,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (1.2.39)$$

と表される. この表示のもとで, $t = \text{一定面 } \Sigma_t$ の単位法ベクトル n は

$$n = \frac{1}{N}(\partial_t - \beta^i \partial_i) \quad (1.2.40)$$

となる. $T = Nn$ とおくと,

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \pm \frac{1}{N} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X T, Y) = \pm \frac{1}{N} \tilde{g}([X, T] + \tilde{\nabla}_T X, Y) \\ &= \pm \frac{1}{2N} (\mathcal{L}_T g)(X, Y) \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

より

$$K_{ij} = \pm \frac{1}{2N} (\partial_t g_{ij} - \nabla_i \beta_j - \nabla_j \beta_i) \quad (1.2.42)$$

を得る.

Riemann 曲率 : 線形接続 ∇ の曲率テンソルは次式で定義される:

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z. \quad (1.2.43)$$

特に, 計量 g に関する Riemann 接続に対して

$$R(X, Y, Z, W) = g(Z, R(X, Y)W) \quad (1.2.44)$$

とおくとき, 次式が成り立つ:

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z), \quad (1.2.45a)$$

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y), \quad (1.2.45b)$$

$$R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 0, \quad (1.2.45c)$$

$$(\nabla_W R)(X, Y, U, V) + (\nabla_U R)(X, Y, V, W) + (\nabla_V R)(X, Y, W, U) = 0. \quad (1.2.45d)$$

第3式は第1 Bianchi 恒等式, 第4式は第2 Bianchi 恒等式と呼ばれる.

Gauss-Codazzi 方程式 : $\nabla_X Y$ の分解公式より, Σ の接ベクトル場 X, Y, Z に対して,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= R(X, Y)Z \pm (K(X, Z)K(Y) - K(Y, Z)K(X)) \\ &\quad + [-(\nabla_X K)(Y, Z) + (\nabla_Y K)(X, Z)]n.\end{aligned}\quad (1.2.46)$$

この式は次の2式と同等である:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, Z, W) \pm (K(X, W)K(Y, Z) \\ &\quad - K(X, Z)K(Y, W)),\end{aligned}\quad (1.2.47)$$

$$\tilde{R}(X, Y, Z, n) = \pm ((\nabla_X K)(Y, Z)) - (\nabla_Y K)(X, Z).\quad (1.2.48)$$

Σ の正規直交基底 e_I および Σ の単位法ベクトル $e_0 = n$ からなる \mathcal{M} の正規直交基底に関する成分表示のもとで, これらの方程式は次のように表わされる:

$$\tilde{R}_{IJKL} = R_{IJKL} \pm (K_{IL}K_{JK} - K_{IK}K_{JL}),\quad (1.2.49a)$$

$$\tilde{R}_{0IJK} = n_\mu \tilde{R}^\mu_{IJK} = \pm (\nabla_K K_{IJ} - \nabla_J K_{IK}).\quad (1.2.49b)$$

となる.

残りの成分 $T = Nn = \partial_t - \beta^i \partial_i$ に対して, $t = \text{一定面 } \Sigma_t$ に接するベクトル場 X, Y を

$$\mathcal{L}_T X = 0, \quad \mathcal{L}_T Y = 0\quad (1.2.50)$$

となるようにとる. このとき,

$$\tilde{g}(n, \tilde{R}(X, n)Y) = \frac{1}{N^2} \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_T Y - \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_X Y).\quad (1.2.51)$$

ここで, $\tilde{\nabla}_T Y = \tilde{\nabla}_Y T$ より

$$\begin{aligned}\tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_T Y) &= \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y T) = \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_X ((\partial_Y N)n \pm NK(Y))) \\ &= \tilde{g}(T, (\partial_X \partial_Y N)n \pm N \tilde{\nabla}_X (K(Y))) \\ &= \pm N \partial_X \partial_Y N - N^2 K(X, K(Y)).\end{aligned}\quad (1.2.52)$$

また, $\mathcal{L}_T \nabla_X Y \parallel \Sigma_t$ より

$$\begin{aligned}\tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_X Y) &= \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_T (\nabla_X Y - K(X, Y)n)) \\ &= \tilde{g}(T, \tilde{\nabla}_{\nabla_X Y} T - \partial_T (K(X, Y)n)) \\ &= \pm N \partial_{\nabla_X Y} N \mp (\mathcal{L}_T K)(X, Y).\end{aligned}\quad (1.2.53)$$

ここで

$$\partial_X \partial_Y N = \nabla_X (\nabla_Y N) = \nabla_X (Y^i \nabla_i N) = (\nabla_X Y)^i \nabla_i N + (\nabla^2 N)(X, Y).\quad (1.2.54)$$

よって

$$\tilde{g}(n, \tilde{R}(X, n)Y) = \pm \frac{1}{N}(\mathcal{L}_T K)(X, Y) - K(X, K(Y)) \pm \frac{1}{N}(\nabla^2 N)(X, Y) \quad (1.2.55)$$

成分表示では,

$$\tilde{R}_{0i0j} = \mp \frac{1}{N}(\dot{K}_{ij} - (\mathcal{L}_\beta K)_{ij}) + K_{ik}K_j^k \mp \frac{1}{N}(\nabla^2 N)_{ij}. \quad (1.2.56)$$

Note : $\dim \Sigma = 2$ のとき, 曲率テンソルは必ず

$${}^2R_{IJKL} = k(\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK}) \quad (1.2.57)$$

と表され, 独立な成分は ${}^2R_{1212} = k$ のみとなる. 特に, Σ が 3 次元 Euclid 空間内の 2 次元面の時, $R_{abcd} = 0$ と Gauss の方程式より

$$k = K_{12}^2 - K_{11}K_{22} = \det K_{IJ} \quad (1.2.58)$$

となる. したがって, Σ の曲率半径を R_1, R_2 とすると, K_{IJ} の固有値は $1/R_1, 1/R_2$ となるので, 有名な Gauss の公式

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (1.2.59)$$

を得る.

Einstein 方程式の分解 : Gauss 方程式および Codazzi 方程式のトレースより

$$2\tilde{G}_{nn} = 2\tilde{R}_{nn} \mp \tilde{R} = \mp R + K^2 - K_j^i K_i^j, \quad (1.2.60a)$$

$$\tilde{G}_{ni} = \tilde{R}_{ni} = \pm(\nabla_j K_i^j - \nabla_i K). \quad (1.2.60b)$$

また,

$$\tilde{G}_{ij} = \tilde{R}_{ij} + (\tilde{G}_0^0 - \tilde{R}_0^0)g_{ij}, \quad (1.2.61)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij} &= g^{kl}\tilde{R}_{kilj} + \tilde{R}^0_{i0j} \\ &= R_{ij} \pm (K_{ik}K_j^k - KK_{ij}) + \tilde{R}^0_{i0j}. \end{aligned} \quad (1.2.62)$$

ここで, $T = \partial_t - \beta^i \partial_i$ として,

$$\tilde{R}^0_{i0j} = -\frac{1}{N}\mathcal{L}_T K_{ij} \pm K_{ik}K_j^k - \frac{1}{N}\nabla_i \nabla_j N, \quad (1.2.63)$$

$$g^{ij}\mathcal{L}_T K_{ij} = \mathcal{L}_T K \pm 2NK_j^i K_i^j. \quad (1.2.64)$$

よって,

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} \pm (2K_{ik}K_j^k - KK_{ij}) - \frac{1}{N}\mathcal{L}_T K_{ij} - \frac{1}{N}\nabla_i \nabla_j N, \quad (1.2.65a)$$

$$\tilde{R}_0^0 = -\frac{1}{N}\mathcal{L}_T K \mp K_j^i K_i^j - \frac{1}{N}\Delta N, \quad (1.2.65b)$$

$$\tilde{R} = R - \frac{2}{N}\mathcal{L}_T K \mp (K^2 + K_j^i K_i^j) - \frac{2}{N}\Delta N. \quad (1.2.65c)$$

これより,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} = & G_{ij} \pm \left[2K_i^k K_{kj} - K K_{ij} + \frac{1}{2}(K^2 + K_l^k K_k^l) g_{ij} \right] \\ & - \frac{1}{N} (\mathcal{L}_T K_{ij} - g_{ij} \mathcal{L}_T K) - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N + \frac{1}{N} \Delta N g_{ij}. \end{aligned} \quad (1.2.66)$$

ただし, $(\mathcal{L}_T K)_{ij} = \partial_t K_{ij} - (\mathcal{L}_\beta K)_{ij}$ において,

$$(\mathcal{L}_\beta K)_{ij} = (\nabla_\beta K)_{ij} + K_{ik} \nabla_j \beta^k + K_{jk} \nabla_i \beta^k. \quad (1.2.67)$$

1.2.5 初期値問題

$(d+1)$ 分解

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (1.2.68)$$

とおくと,

$$n = \frac{1}{N} T; \quad T = \partial_t - \beta^i \partial_i \quad (1.2.69)$$

に対して,

$$\mathcal{L}_T q_{ij} = \partial_t q_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i, \quad (1.2.70a)$$

$$\mathcal{L}_T K_j^i = \partial_t K_j^i - D_\beta K_j^i - K_l^i D_j \beta^l + K_j^l D_l \beta^i. \quad (1.2.70b)$$

発展方程式

$$K_j^i = \hat{K}_j^i + \frac{K}{d} \delta_j^i \quad (1.2.71)$$

とおくと,

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_T q_{ij} = -2q_{ik} \left(\hat{K}_j^k + \frac{K}{d} \delta_j^k \right), \quad (1.2.72a)$$

$$\frac{1}{N} \partial_T K = \frac{1}{2} K^2 + \frac{d}{2(d-1)} \hat{K}^2 + \frac{d-2}{2(d-1)} {}^d R - \frac{\Delta N}{N} + \frac{\kappa^2}{d-1} q^{lm} T_{lm}, \quad (1.2.72b)$$

$$\frac{1}{N} \mathcal{L}_T \hat{K}_j^i = K \hat{K}_j^i + {}^d R_j^i - \frac{{}^d R_l^i}{d} \delta_j^i - \frac{1}{N} \left(D^i D_j N - \frac{\Delta N}{d} \delta_j^i \right) - \kappa^2 \left(q^{ik} T_{kj} - \frac{q^{lm} T_{lm}}{d} \delta_j^i \right)$$

拘束条件

$${}^d R + \frac{d-1}{d} K^2 - \hat{K}^2 = 2\kappa^2 T_{nn}, \quad (1.2.73a)$$

$$D_j \hat{K}_i^j - \frac{d-1}{d} D_i K = -\kappa^2 T_{ni}. \quad (1.2.73b)$$

縮約 Bianchi 方程式より,

$$E_{\mu\nu} := G_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (1.2.74)$$

に対して,

$$\partial_t E_{nn} = E_{\mu\nu}, \partial_i E_{\mu\nu} \text{ の式,}$$

$$\partial_t E_{ni} = E_{\mu\nu}, \partial_i E_{\mu\nu} \text{ の式,}$$

より, $E_{ij} =$ が常に満たされ, ある時刻で拘束条件 $E_{nn} = 0, E_{ni} = 0$ が満たされれば, 任意の時刻で拘束条件が満たされる. したがって, 拘束条件は初期値に対する制限と見なされる.

【公式 1.2.2】

任意のベクトル場 V^μ に対して,

$$\nabla_\mu V^\mu = D^i V_i + K(V \cdot n) - n \cdot \nabla_n V. \tag{1.2.75}$$

また, 任意の対称テンソル $T_{\mu\nu}$ に対して,

$$(\nabla_\nu T_\mu^\nu) n^\mu = \partial_n T_{nn} - K T_{nn} + q^{ij} D_i T_{in} - K^{ij} T_{ij}, \tag{1.2.76a}$$

$$(\nabla_\nu T_\mu^\nu) h_i^\mu = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_T T_{ni} + K T_{ni} + D^j T_{ij} - \frac{D_j N}{N} T_{nn} + (\nabla_n n^\mu) T_{\mu i}. \tag{1.2.76b}$$

ここで,

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \tag{1.2.77}$$

□

□

O’Murchandha-York の方法 : \hat{K}_j^i を

$$\hat{K}_j^i = S_j^i + (LW)_j^i; \tag{1.2.78}$$

$$(LW)_j^i = D_j W^i + D^i W_j - \frac{2}{d} D \cdot W \delta_j^i, \tag{1.2.79}$$

$$S_j^j = 0, \quad D_j S_i^j = 0 \tag{1.2.80}$$

と分解する. このとき, 次の定理が成り立つ.

【定理 1.2.3】

$(q_{jk}, K^{jk}, \phi, \pi)$ を任意の配意データとするととき、変換

$$q_{jk} \rightarrow q'_{jk} = e^{2\Omega} q_{jk}, \tag{1.2.81a}$$

$$K_k^j \rightarrow K'^j_k = K_k^j + (LW)^j_k \tag{1.2.81b}$$

は $(\Omega(x), W^j(x))$ をパラメーターとする可換な無限次元変換群をなす. 勝手なデータ $(q_{jk}, K^{jk}, \phi, \pi)$ を1つ与えたとき, それにこの変換を施して得られる位

相空間での軌道上では、拘束条件は Ω と W^j に対する次の楕円型連立微分方程式で表わされる：

$$2(d-1)\Delta\Omega + (d-1)(d-2)(D\Omega)^2 = -e^{2\Omega} \left[2\hat{K} \cdot (LW) + (LW)^2 \right] \\ + {}^dR + e^{2\Omega} \left[\frac{d-1}{d}K^2 - \hat{K}^2 \right] - 2\kappa^2 e^{2\Omega} T'_{nn}, \quad (1.2.82a)$$

$$(1.2.82b)$$

$$\Delta W_i + \frac{d-2}{d}D_i D \cdot W + {}^dR_{ij}W^j + dD_j\Omega(LW)_i^j \\ = -D_j\hat{K}_i^j - dD_j\Omega\hat{K}_i^j + \frac{d-1}{d}D_i K - \kappa^2 T'_{ni} \quad (1.2.82c)$$

ここで T'_{nn} , T'_{nj} は T_{nn} , T_{nj} の表式で $q_{jk} \rightarrow q'_{jk}$, $K_k^j \rightarrow K'^j_k$ と置き換えたものである。 □

【公式 1.2.4 (曲率テンソルの変換)】

n 次元 Riemann 多様体の Weyl 変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\Phi} g_{\mu\nu} \quad (1.2.83)$$

に対して、Christoffel シンボルおよび曲率テンソルは次のように変換する：

$$\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \nabla_\nu\Phi\delta^\mu_\lambda + \nabla_\lambda\Phi\delta^\mu_\nu - \nabla^\mu\Phi g_{\nu\lambda}, \quad (1.2.84)$$

$$\hat{R}^\mu_{\nu\lambda\sigma} = R^\mu_{\nu\lambda\sigma} + 2\delta^\mu_{[\sigma}\nabla_{\lambda]}\nabla_\nu\Phi - 2g_{\nu[\sigma}\nabla_{\lambda]}\nabla^\mu\Phi \\ - 2\nabla_\nu\Phi\nabla_{[\nu}\Phi\delta^\mu_{\sigma]} + 2\nabla^\mu\Phi\nabla_{[\lambda}\Phi g_{\sigma]\nu} - 2(\nabla\Phi)^2\delta^\mu_{[\lambda}g_{\sigma]\nu}, \quad (1.2.85)$$

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^2\Phi - (n-2)\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi \\ + (n-2)\nabla_\mu\Phi\nabla_\nu\Phi - (n-2)(\nabla\Phi)^2g_{\mu\nu}, \quad (1.2.86)$$

$$e^{2\Phi}\hat{R} = R - 2(n-1)\nabla^2\Phi - (n-1)(n-2)(\nabla\Phi)^2. \quad (1.2.87)$$

4次元時空 ($d=3$) に対して、この定理より、初期条件の自由度は空間の各点ごとに、計量の共形クラス $[q_{jk}] = q_{jk}/q^{1/3}$ の自由度 5 とゼロトレース、ゼロ発散テンソル S_k^j の自由度 2, K_k^j のトレース K の自由度 1 の計 8 となる。このうち 4 個は座標変換の自由度 (ゲージ自由度) なので、真の力学的自由度は $2+2$ (+物質場の自由度) となる。これはちょうど近似的に平坦な時空での重力波の自由度と一致している。

上記の連立楕円型方程式は必ずしも解を持つとは限らない。また、解が存在しても一般には一意的とも限らない。しかし、適当なゲージ条件のもとでは存在と一意性がいえる [OY74]。例えば、時間座標に対して $K = \text{const}$ (一様膨張時間スライス)、空間座標に対して $T_{nj} = 0$ (共動ゲージ) の座標条件を課すと、運動量拘束条件 (1.2.73b) は $D_j\hat{K}_i^j = 0$ となる。いま、 (q_{ij}, \hat{K}_j^i, K) を拘束条件 (1.2.73) の解、 $\overset{\circ}{q}_{ij}$ を q_{ij} の共形類に属する一つの計量、 $q_{ij} = e^{2\Omega}\overset{\circ}{q}_{ij}$ とおくと、

$$D_j\hat{K}_i^j = e^{-d\Omega}\overset{\circ}{D}_j(e^{d\Omega}\hat{K}_i^j) \quad (1.2.88)$$

より, \hat{K}_i^j は

$$\hat{K}_i^j = e^{-d\Omega} S_i^j; \quad S_j^j = 0, \quad \overset{\circ}{D}_j S_i^j = 0 \quad (1.2.89)$$

と表される. また, ハミルトン拘束条件 (1.2.73a) は

$$(d-1) \left[2 \overset{\circ}{\Delta} \Omega + (d-2) (\overset{\circ}{D} \Omega)^2 \right] = {}^d \overset{\circ}{R} + \frac{d-1}{d} K^2 e^{2\Omega} - e^{-2(d-1)\Omega} S^2 - 2\kappa^2 e^{2\Omega} T'_{nn} \quad (1.2.90)$$

となる. この方程式は, ほとんど全てのデータ $(\overset{\circ}{q}_{jk}, S_k^j, T_{nn}, K)$ に対して解を持つことが示される. さらに, 同じゲージのもとで, $T_{nn} = S_k^j = K = 0$ の場合を除くと, 解は一意的であることも示される. この除外された場合には Ω の方程式は $e^{(d-2)\Omega/2}$ に対する同次線形方程式となるため, 一般にはたくさんの解を持つが, 時空が漸近的に平坦な場合には $\Omega = O\left(\frac{1}{r^{d-2}}\right)$ ($r \rightarrow \infty$) の境界条件のもとでは一意性が言える. また, このゲージ条件から僅かにずれたゲージ条件 $K = \text{const} + \delta K(\mathbf{x})$, $T_{nj} = \delta T_{nj}(\mathbf{x})$ に対しても解の存在と一意性が示されている.

§1.3

数学的準備

1.3.1 基底と接続形式

e_a および θ^a をそれぞれ, ベクトル場の基底およびその双対基底とする:

$$\theta^a(e_b) = \delta_b^a. \quad (1.3.1)$$

一般の線形接続 ∇ に対して, 接続係数 ω^a_b を

$$\nabla_X e_a = e_b \omega^b_a(X) \quad (1.3.2)$$

により定義する. このとき,

$$\nabla_X \theta^a = -\omega^a_b(X) \theta^b. \quad (1.3.3)$$

さらに, g_{ab} を

$$g_{ab} = g(e_a, e_b) \quad (1.3.4)$$

により定義すると,

$$dg_{ab} = g_{bc} \omega^c_a + g_{ac} \omega^c_b \equiv \omega_{ab} + \omega_{ba}. \quad (1.3.5)$$

接続形式を用いると, トーション形式は

$$\Theta^a := D\theta^a = d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b \quad (1.3.6)$$

曲率形式は,

$$\mathcal{R}^a_b := d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \quad (1.3.7)$$

と表される. また, Bianchi 恒等式は

$$\begin{aligned} D\Theta^a &= \mathcal{R}^a_b \wedge \theta^b, \\ D\mathcal{R}^a_b &= 0 \end{aligned}$$

と表される.

特に, ∇ が Riemann 接続で, g_{ab} が定数行列となるとき,

$$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba} \quad (1.3.8)$$

が成り立つ.

1.3.2 Weyl テンソル

Riemann 曲率テンソルを

$$R^\mu_{\nu\lambda\sigma} = C^\mu_{\nu\lambda\sigma} + \frac{2}{n-2} \left(R^\mu_{[\lambda} g_{\sigma]\nu} - R_{\nu[\lambda} \delta^\mu_{\sigma]} \right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} \delta^\mu_{[\sigma} g_{\lambda]\nu} R \quad (1.3.9)$$

と分解して得られるテンソル $C^\mu_{\nu\lambda\sigma}$ を Weyl テンソルという. Weyl テンソルは Weyl 変換で不変なテンソルで, Riemann テンソルと同じ対称性をもち, 第1および第2 Bianchi 恒等式を満たす上に, 次の条件を満たす:

$$C^\lambda_{\mu\lambda\nu} = 0. \quad (1.3.10)$$

$n = 3$ のとき, Weyl テンソルは恒等的にゼロとなる. また, $n > 3$ のとき, Weyl テンソルがゼロとなることと計量が共形的に平坦であることは同等である.

正規直交基底 θ^a に関する成分表示の元で,

$$S^a := \left(R^a_b - \frac{R}{2(n-1)} \delta^a_b \right) \theta^b \quad (1.3.11)$$

とおくと, $\mathcal{C}_{ab} := (1/2)C_{abcd}\theta^c \wedge \theta^d$ は

$$\mathcal{C}^{ab} = \mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{n-2} (S^a \wedge \theta^b - S^b \wedge \theta^a) \quad (1.3.12)$$

と表される.

1.3.3 Petrov タイプ

自己双対テンソル : 一般に2階の反対称テンソル A_{ab} に対して

$${}^+A_{ab} = \frac{1}{2}(A_{ab} + i * A_{ab}) \quad (1.3.13)$$

とおくと,

$$**A_{ab} = -A_{ab} \quad (1.3.14)$$

より

$$*^+A_{ab} = -i^+A_{ab}. \quad (1.3.15)$$

特に, Weyl テンソルより

$$^+C_{abcd} = \frac{1}{2}(C_{abcd} + i * C_{abcd}) \quad (1.3.16)$$

とおくと,

$$\epsilon_{ab}{}^{pq}C_{pqcd} = \epsilon_{cd}{}^{pq}C_{abpq} \quad (1.3.17)$$

より, $^+C_{abcd}$ は (ab) および (cd) のいずれについても自己双対となる. さらに,

$$Q_{IJ} = -^+C_{0I0J} \quad (1.3.18)$$

とおくと, Q_{IJ} は対称な trace-free 行列となる.

自己双対基底 : 正規直交基底 e_a より null 基底 (k, l, m) を

$$k = \frac{e_0 + e_1}{\sqrt{2}}, \quad l = \frac{e_0 - e_1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{e_2 - ie_3}{\sqrt{2}} \quad (1.3.19)$$

により定義する:

$$l \cdot l = k \cdot k = m \cdot m = 0, \quad l \cdot k = -1, \quad m \cdot \bar{m} = 1. \quad (1.3.20)$$

このとき,

$$*(k \wedge l) = im \wedge \bar{m}, \quad *(k \wedge m) = -ik \wedge m, \quad *(l \wedge m) = il \wedge m \quad (1.3.21)$$

より,

$$V := k \wedge m, \quad U := -l \wedge \bar{m}, \quad W := -k \wedge l + m \wedge \bar{m} \quad (1.3.22)$$

は自己双対 2 階反対称テンソルの複素基底となる.

$$U \cdot U = V \cdot V = U \cdot W = V \cdot W = 0, \quad U \cdot V = 2, \quad W \cdot W = -4. \quad (1.3.23)$$

したがって, ^+C は

$$\begin{aligned} ^+C = & \Psi_0 U \otimes U + \Psi_1 (U \otimes W + W \otimes U) \\ & + \Psi_2 (V \otimes U + U \otimes V + W \otimes W) \\ & + \Psi_3 (V \otimes W + W \otimes V) + \Psi_4 V \otimes V \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

と展開される． $\Psi_0 \sim \Psi_4$ は

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= C(k, m, k, m), \quad \Psi_1 = C(k, l, k, m), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{2}(C(k, l, k, l) - C(k, l, m, \bar{m})), \\ \Psi_3 &= C(l, k, l, \bar{m}), \quad \Psi_4 = C(l, \bar{m}, l, \bar{m}).\end{aligned}\tag{1.3.25}$$

Chiral 2-form 基底を

$${}^{+\Sigma^{0I}} := \theta^0 \wedge \theta^I - \frac{i}{2} \epsilon_{IJK} \theta^J \wedge \theta^K$$

とおくと、Weyl form の chiral combination

$${}^{+\mathcal{C}_{0I}} := \mathcal{C}_{0I} + \frac{i}{2} \epsilon_{IJK} \mathcal{C}_{JK}$$

は、 $\Psi_0 \sim \Psi_4$ を用いて一般に

$${}^{+\mathcal{C}_{01}} = 2\Psi_2 {}^{+\Sigma^{01}} + (\Psi_3 - \Psi_1) {}^{+\Sigma^{02}} - i(\Psi_3 + \Psi_1) {}^{+\Sigma^{03}},\tag{1.3.26a}$$

$${}^{+\mathcal{C}_{02}} = (\Psi_3 - \Psi_1) {}^{+\Sigma^{01}} + \frac{1}{2}(\Psi_0 + \Psi_4 - 2\Psi_2) {}^{+\Sigma^{02}} + \frac{i}{2}(\Psi_0 - \Psi_4) {}^{+\Sigma^{03}},\tag{1.3.26b}$$

$${}^{+\mathcal{C}_{03}} = -i(\Psi_3 + \Psi_1) {}^{+\Sigma^{01}} + \frac{i}{2}(\Psi_0 - \Psi_4) {}^{+\Sigma^{02}} - \frac{1}{2}(\Psi_0 + \Psi_4 + 2\Psi_2) {}^{+\Sigma^{03}}\tag{1.3.26c}$$

と表される．

Petrov タイプ : 複素行列 Q の固有空間の構造に応じて、Weyl テンソルの Petrov タイプが次のように定義される：

Petrov type	固有空間	Ψ_a の標準形
I	[1 1 1]	$\Psi_0 = \Psi_4 = (\lambda_2 - \lambda_1)/2$ $\Psi_1 = \Psi_3 = 0$ $\Psi_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$
D	[(1 1) 1]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ $\Psi_2 = \lambda_2$
II	[2 1]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = 0$ $\Psi_2 = \lambda_1, \Psi_4 = -2$
N	[(2 1)]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ $\Psi_4 = -2$
III	[3]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0$ $\Psi_3 = -i$
O	—	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$

光的ベクトルを用いた定式化 : Null tetrad

$$k, l, m : \quad k^2 = l^2 = m^2 = k \cdot m = 0, \quad k \cdot l = -1, \quad m \cdot \bar{m} = 1\tag{1.3.27}$$

を用いると, l の方向を保つローレンツ変換は

$$\Lambda l = \frac{1}{a} l, \quad (1.3.28a)$$

$$\Lambda k = a [k + \bar{\lambda} \bar{m} + \bar{\lambda} (m + \lambda l)], \quad (1.3.28b)$$

$$\Lambda m = e^{i\theta} (m + \lambda l) \quad (1.3.28c)$$

と表される. ここで, λ は任意の複素数, θ は任意の実数である. この変換に対して, Ψ_0 は

$$\Psi'_0 = a^2 e^{2i\theta} [\Psi_0 + 4\Psi_1\lambda + 6\Psi_2\lambda^2 + 4\Psi_3\lambda^3 + \Psi_4\lambda^4] \quad (1.3.29)$$

と変換する. したがって, 条件

$$k^\alpha k_{[\mu} C_{\nu]\alpha\beta} k_{\lambda} k_{\sigma]} k^\beta = 0 \quad (1.3.30)$$

を満たす null vector k は, 方程式

$$\Psi_0 + 4\Psi_1\lambda + 6\Psi_2\lambda^2 + 4\Psi_3\lambda^3 + \Psi_4\lambda^4 = 0 \quad (1.3.31)$$

の ($\lambda = \infty$) を含めた解と一対一に対応する. この方程式の解の縮退度と Petrov タイプは次のように対応する:

I: (1,1,1,1), II: (2,1,1), D: (2,2), III: (3,1), N: (4)

1.3.4 等長変換群

時空 (\mathcal{M}, g) の変換 F が計量 g を保つ, すなわち

$$F_*g = g \quad \Leftrightarrow \quad g_{F(x)}(F_*X, F_*Y) = g_x(X, Y) \quad \forall X, Y, x \quad (1.3.32)$$

が成り立つとき, F を等長変換という. 等長変換の全体は等長変換群 $\text{Isom}(\mathcal{M}, g)$ となる. なめらかな Riemann 多様体の等長変換群は Lie 群となることが知られている [KN63].

$\text{Isom}(\mathcal{M}, g)$ の 1 径数変換群 F_t ,

$$F_t F_s = F_{t+s}, \quad F_0 = \text{id}_X \quad (1.3.33)$$

に対して, その無限小変換を ξ とする:

$$\xi^\mu(x) = \left. \frac{dF_t^\mu(x)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (1.3.34)$$

このとき,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (1.3.35)$$

が成り立つ. 一般に, この方程式を満たすベクトル場を Killing ベクトルという.

n 次元 Riemann 多様体に対して, 線形独立な Killing ベクトルの数は, $n(n+1)/2$ を超えない. 特に, $n(n+1)/2$ 個の線形独立な Killing ベクトルをもつ空間は定曲率空間となり, Riemann 曲率テンソルが定数 K を用いて

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (1.3.36)$$

と表される. さらに, これらの空間は局所的に次の極大対称空間(時空)と等長となる:

1) 空間

1-i) Euclidean 空間 E^n : $K = 0$, $\text{Isom}(E^n) = \text{IO}(n)$.

1-ii) 球面 S^n : $K = 1/a^2$, $\text{Isom}(S^n) = \text{O}(n+1)$.

1-iii) 双曲空間 H^n : $K = -1/a^2$, $\text{Isom}(H^n) = \text{O}(n, 1)$.

2) 時空

2-i) Minkowski 時空 $E^{n-1,1}$: $K = 0$, $\text{Isom}(E^{n-1,1}) = \text{IO}(n-1, 1)$.

2-ii) de Sitter 時空 dS^n : $K = 1/a^2$, $\text{Isom}(dS^n) = \text{O}(n, 1)$.

2-iii) Anti de Sitter 時空 AdS^n : $K = -1/a^2$, $\text{Isom}(\text{AdS}^n) = \text{O}(n-1, 2)$.

これらの空間(時空)は極大対称空間(時空)と呼ばれる.

運動の定数 自由粒子の運動方程式は

$$\nabla_u p = 0. \quad (1.3.37)$$

ここで, $p = mu$ で, $p \cdot p \neq 0$ の時には $p \cdot p = -m^2$, $p \cdot p = 0$ の時には m は勝手なゼロでない定数. ξ が Killing ベクトルとすると,

$$C = \xi \cdot p \quad (1.3.38)$$

に対して,

$$\dot{C} = \nabla_u(\xi \cdot p) = p \cdot \nabla_u \xi = mu^\mu u^\nu \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (1.3.39)$$

よって, C は運動の定数となる.

エネルギー運動の保存 平坦な時空では, エネルギー運動量テンソルの保存則

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.3.40)$$

より

$$P^\mu = \int_{\Sigma_t} d^3x T^{\mu t} \quad (1.3.41)$$

(Σ_t は $t = \text{一定面}$) とおくと ,

$$\dot{P}^\mu = \int_{\Sigma_t} d^3x \partial_t T^{\mu t} = \int_{\Sigma_t} d^3x -\partial_i T^{\mu i} = 0 \quad (1.3.42)$$

より , 全エネルギー-運動量の保存則が得られる . しかし , 曲がった時空では ,

$$\sqrt{-g} \nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\nu\lambda} \quad (1.3.43)$$

より , 上記のように定義された P^μ に対して , 一般に保存則は成り立たない . しかし , Killing ベクトルが存在すると ,

$$\nabla_\nu (\xi_\mu T^{\mu\nu}) = \nabla_\nu \xi_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.3.44)$$

と Gauss の公式より ,

$$\int_{\partial D} d\Sigma_\nu \xi_\mu T^{\mu\nu} = \int_D d\Omega \nabla_\nu (\xi_\mu T^{\mu\nu}) = 0 \quad (1.3.45)$$

が成り立つので ,

$$P[\xi] = \int_{\Sigma_t} d\Sigma_\nu \xi_\mu T^{\mu\nu} \quad (1.3.46)$$

と定義すると , $P[\xi]$ は定数となる . ただし ,

$$d\Sigma_\mu = \frac{1}{(n-1)!} \epsilon_{\mu\nu_1 \dots \nu_{n-1}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-1}} \quad (1.3.47)$$

である .

2

宇宙論

§2.1

定曲率空間

一般に，断面曲率 K が定数となる空間を定曲率空間という．すなわち，

$$R_{ijkl} = K (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (2.1.1)$$

2.1.1 2次超曲面の曲率

$E^{p,q}$ ($p + q = d + 1, q = 0, 1$) 内の2次超曲面 Σ^d

$$X \cdot X = \epsilon A^2 \quad (2.1.2)$$

を考える．ただし， $q = 0$ のとき $\epsilon = 1$ ， $q = 1$ のとき $\epsilon = -1$ ．この超曲面の点 X における単位法ベクトルは

$$n = \frac{1}{A} X; \quad n \cdot n = \epsilon. \quad (2.1.3)$$

これより， Σ^d の接ベクトル V に対して，

$$\epsilon K(V) = \nabla_V n = \frac{V}{A}. \quad (2.1.4)$$

よって，

$$K_{ij} = \frac{\epsilon}{A} g_{ij}. \quad (2.1.5)$$

これを Gauss 方程式に代入して，

$$R_{ijkl} = \epsilon (K_{ik}K_{jl} - K_{il}K_{jk}) = \frac{\epsilon}{A^2} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (2.1.6)$$

したがって，球面は断面曲率 $1/A^2$ ，双曲面は $-1/A^2$ の定曲率空間となる．

2.1.2 一様等方空間

ある点の周りに等方な空間は，適当な極座標を用いて

$$ds^2 = d\chi^2 + f(\chi)^2 d\Omega_d^2 \quad (2.1.7)$$

と表される．このとき $\chi = \text{const}$ となる球面の外部曲率は

$$K_{ij} = \frac{f'}{f} g_{ij} \quad (2.1.8)$$

となる．したがって， $(d+1)$ 分解の公式より

$$R_{ijkl} = {}^n R_{ijkl} + K_{il} K_{jk} - K_{ik} K_{jl} = \frac{1 - (f')^2}{f^2} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}), \quad (2.1.9a)$$

$$R_{\chi ijk} = D_k K_{ij} - D_j K_{ik} = 0, \quad (2.1.9b)$$

$$R_{\chi i \chi j} = -K'_{ij} + K_{ik} K_j^k = -\frac{f''}{f} g_{ij}. \quad (2.1.9c)$$

よって，定曲率となる条件は

$$1 - (f')^2 = K f^2, \quad f'' = -K f. \quad (2.1.10)$$

$\chi = 0$ で $f = \chi^2 + O(\chi^3)$ となるので，これを満たす解は

$$f = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\chi) & ; K > 0, \\ \chi & ; K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}\chi) & ; K < 0. \end{cases} \quad (2.1.11)$$

以上より，一様等方な空間は定曲率空間である球面，Euclidean 空間，双曲空間のいずれかに限られる．逆に，定曲率空間は完備単連結ならば一様等方であることも示される．さらに，これらの d 次元定曲率空間の等長変換群（の連結成分は）それぞれ $SO(d+1)$ ， $ISO(d)$ ， $SO_+(d,1)$ となる．

 §2.2

 定曲率時空

2.2.1 定曲率時空

$E^{p,q}(p+q=D+1, q=1, 2)$ 内の2次超曲面 M^D

$$X \cdot X = \epsilon A^2 \quad (2.2.1)$$

を考える．ただし， $q=1$ のとき $\epsilon=1$ ， $q=2$ のとき $\epsilon=-1$ ．この超曲面の点 X における単位法ベクトルは

$$n = \frac{1}{A}X; \quad n \cdot n = \epsilon. \quad (2.2.2)$$

これより， M^D の接ベクトル V に対して，

$$\epsilon K(V) = \nabla_V n = \frac{V}{A}. \quad (2.2.3)$$

よって，

$$K_{\mu\nu} = \frac{\epsilon}{A}g_{\mu\nu}. \quad (2.2.4)$$

これを Gauss 方程式に代入して，

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon(K_{\mu\lambda}K_{\nu\sigma} - K_{\mu\sigma}K_{\nu\lambda}) = \frac{\epsilon}{A^2}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}). \quad (2.2.5)$$

したがって，球面は断面曲率 $1/A^2$ ，双曲面は $-1/A^2$ の定曲率時空となる．これより，

$$R_{\mu\nu} = \epsilon \frac{D-1}{A^2}g_{\mu\nu} \quad (2.2.6)$$

となるので， D 次元時空の真空 Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{D-2}g_{\mu\nu} \quad (2.2.7)$$

と比較して，これらの時空は宇宙項

$$\Lambda = \epsilon \frac{(D-1)(D-2)}{2A^2} \quad (2.2.8)$$

に対する真空解であることが分かる．

逆に，定曲率時空はこれらの時空ないし Minkowski 時空のいずれかと局所的に等長であることが示される．

2.2.2 de Sitter 宇宙

$$\rho = -P = \Lambda > 0 \quad (2.2.9)$$

のとき, a を $k = 0, \pm 1$ となるように規格化すると,

$$a = \begin{cases} e^{t/\ell} & k = 0, \\ \ell \cosh(t/\ell) & k = +1, \\ \ell \sinh(t/\ell) & k = -1. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

ただし,

$$\frac{1}{\ell^2} = \frac{2}{d(d-1)}\Lambda. \quad (2.2.11)$$

これらは, いずれも同じ de Sitter 時空 dS^{d+1}

$$-T^2 + X_1^2 + \cdots + X_{d+1}^2 = \ell^2; \quad (2.2.12)$$

$$ds^2 = -dT^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d+1}^2 \quad (2.2.13)$$

の全体, ないし一部に対応する:

$$\begin{aligned} k = +1: & \quad dS^{d+1}, \\ k = 0: & \quad T > X_{d+1}, \\ k = -1: & \quad X_{d+1} > \ell. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

de Sitter 宇宙は定曲率時空である:

$$R_{abcd} = \frac{1}{\ell^2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (2.2.15)$$

Static chart: 座標系 (t, r, Ω_{n-2}) ($|\Omega_{n-2}| = 1$) を

$$\begin{aligned} y^0 &= \sqrt{\ell^2 - r^2} \sinh(t/\ell), & y^n &= \sqrt{\ell^2 - r^2} \cosh(t/\ell), \\ y^j &= r\Omega_{n-2}^j \quad (j = 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

により導入すると,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\Omega_{n-2})^2. \quad (2.2.17)$$

ここで, $r = a$ は Killing ベクトル $\xi = \partial_t$ が光的となる ($\xi \cdot \xi = 0$) 面で, Killing ホライズンと呼ばれる.

Complete chart: 座標系 (τ, Ω_{n-1}) ($|\Omega_{n-1}| = 1$) を

$$y^0 = \ell \sinh \tau, \quad y^j = \ell \cosh \tau \Omega_{n-1}^j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.2.18)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [-d\tau^2 + \cosh^2 \tau (d\Omega_{n-1})^2]. \quad (2.2.19)$$

Flat chart: 座標系 $(\tau_1, \mathbf{x}_{n-1}) (\mathbf{x}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1})$ を

$$y^0 + y^n = \ell e^{\tau_1}, \quad y^j = \ell e^{\tau_1} x_{n-1}^j \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (2.2.20)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [-d\tau_1^2 + e^{2\tau_1} (d\mathbf{x}_{n-1})^2]. \quad (2.2.21)$$

Open chart: 座標系 $(\tau_2, z^0, \dots, z^{n-1})$ を

$$y^n = \ell \cosh \tau_2, \quad y^j = \ell \sinh \tau_2 z^j \quad (j = 0, \dots, n-1): \\ -(z^0)^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 = -1. \quad (2.2.22)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [-d\tau_2^2 + \sinh^2 \tau_2 dH_{n-1}^2]. \quad (2.2.23)$$

2.2.3 Anti-de Sitter 宇宙

$$\rho = -P = \Lambda < 0 \quad (2.2.24)$$

のときには, $k < 0$ の時にのみ解が存在する:

$$a = \ell \sin(t/\ell); \quad \frac{1}{\ell^2} = \frac{2}{d(d-1)} |\Lambda|. \quad (2.2.25)$$

これは, anti-de Sitter 時空

$$-T^2 - S^2 + X_1^2 + \dots + X_d^2 = -\ell^2; \quad (2.2.26)$$

$$ds^2 = -dT^2 - dS^2 + dX_1^2 + \dots + dX_d^2 \quad (2.2.27)$$

の一部の領域 $|S| < \ell$ と対応する. Anti-de Sitter 時空も定曲率時空である:

$$R_{abcd} = -\frac{1}{\ell^2} (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (2.2.28)$$

Global static chart: 座標系 $(t, r, \Omega_{n-2}) (|\Omega_{n-2}| = 1)$ を

$$y^0 = \sqrt{r^2 + \ell^2} \sin(t/\ell), \quad y^n = \sqrt{r^2 + \ell^2} \cos(t/\ell), \\ y^j = r \Omega_{n-2}^j \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (2.2.29)$$

により導入すると,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\Omega_{n-2})^2. \quad (2.2.30)$$

Open chart: 座標系 (τ, z^1, \dots, z^n) を

$$\begin{aligned} y^0 &= \ell \sin \tau, & y^j &= \ell \cos \tau z^j \quad (j = 1, \dots, n); \\ (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2 &= -1 \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 (-d\tau^2 + \cos^2 \tau dH_{n-1}^2). \quad (2.2.32)$$

Quasi-flat chart: 座標系 (y, x^0, \dots, x^{n-2}) を

$$y^n - y^{n-1} = \ell e^y, \quad y^\mu = \ell e^y x^\mu \quad (\mu = 0, \dots, n-2) \quad (2.2.33)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [dy^2 + e^{2y} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu]. \quad (2.2.34)$$

ここで, $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 計量.

de Sitter chart: 座標系 (y, w^0, \dots, w^{n-1}) を

$$\begin{aligned} y^n &= \ell \cosh y, & y^j &= \ell w^j \sinh y; \\ -(w^0)^2 + (w^1)^2 + \dots + (w^{n-1})^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [dy^2 + \sinh^2 y d\sigma_{dS^{n-1}}^2]. \quad (2.2.36)$$

Anti de Sitter chart: 座標系 (y, z^0, \dots, z^{n-1}) を

$$\begin{aligned} y^{n-1} &= \ell \sinh y, & y^n &= \ell \cosh y z^{n-1}, & y^j &= \ell \cosh y z^j \quad (j = 0, \dots, n-2); \\ -(z^0)^2 - (z^{n-1})^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^{n-2})^2 &= -1, \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [dy^2 + \cosh^2 y d\sigma_{AdS^{n-1}}^2]. \quad (2.2.38)$$

Static hyperbolic chart: 座標系 $(T, R, Y^0, \dots, Y^{n-2})$ を

$$\begin{aligned} y^0 &= \sqrt{R^2 - \ell^2} \sinh \left(\frac{T}{\ell} \right), & y^{n-1} &= \sqrt{R^2 - \ell^2} \cosh \left(\frac{T}{\ell} \right), \\ y^n &= RY^0, & y^i &= RY^i \quad (i = 1, \dots, n-2); \\ -(Y^0)^2 + (Y^1)^2 + \dots + (Y^{n-2})^2 &= -1 \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

により導入すると,

$$ds^2 = - \left(\frac{R^2}{\ell^2} - 1 \right) dT^2 + \frac{dR^2}{\frac{R^2}{\ell^2} - 1} + R^2 dY^2 \quad (2.2.40)$$

ここで, dY^2 は曲率 -1 の $n-2$ 次元定曲率空間の計量.

 §2.3

Raychaudhuri 方程式

2.3.1 Jacobi 方程式

曲線族 $\Gamma : x^\mu = x^\mu(\tau, z)$ の単位接ベクトル場を $u^\mu = \dot{x}^\mu$, 曲線間の相対位置ベクトルを $Z^\mu = \delta z^i \partial x^\mu / \partial z^i$ とすると ,

$$\nabla_u Z = \nabla_Z u \tag{2.3.1}$$

が成り立つ . これより

$$\nabla_u^2 Z = \nabla_u \nabla_Z u = R(u, Z)u + \nabla_Z \nabla_u u. \tag{2.3.2}$$

したがって ,

$$\nabla_u u = A \tag{2.3.3}$$

とおくと ,

$$\nabla_u^2 Z = R(u, Z)u + \nabla_Z A \tag{2.3.4}$$

を得る . 特に , Γ が測地線束 , すなわち $A = 0$ のとき , この方程式は Jacobi 方程式と呼ばれる .

2.3.2 Fermi 基底による表示

u^μ が時間的ベクトル場 (粒子の速度場)

$$u = \partial_\tau; \quad u \cdot u = -1. \tag{2.3.5}$$

の場合に , 次の条件を満たす流線に沿った正規直交基底 E_a を考える .

$$E_0 = u, \quad u \cdot E_I = 0, \quad \dot{E}_I \equiv \nabla_u E_I = A_I u. \tag{2.3.6}$$

このとき , A_I は

$$A_I = -u \cdot \dot{E}_I = \dot{u} \cdot E_I = A \cdot E_I \tag{2.3.7}$$

を満たすので , 流線上のある点で E_a を与えると他の点での E_a は一意的に決まる . 流線間の相対位置ベクトル Z を Fermi 基底に関して

$$Z = Z^0 u + Z^I E_I \tag{2.3.8}$$

と成分表示すると,

$$\begin{aligned}\dot{Z}^I &= \dot{E}_I \cdot Z + E_I \cdot \nabla_u Z = -a_I Z^0 + E_I \cdot \nabla_Z u \\ &= -a_I Z^0 + Z^0 E_I \cdot \dot{u} + E_I \cdot \nabla_{E_J} u Z^J.\end{aligned}\quad (2.3.9)$$

よって,

$$\dot{Z}^I = M_{IJ} Z^J; \quad M_{IJ} = E_I \cdot \nabla_{E_J} u. \quad (2.3.10)$$

また,

$$\begin{aligned}\dot{Z}^0 &= -\dot{u} \cdot Z - u \cdot \nabla_u Z = -\dot{u} \cdot E_I Z^I - u \cdot \nabla_Z u \\ &= -a_I Z^I.\end{aligned}\quad (2.3.11)$$

これらより

$$\dot{Z} = Z^0 \dot{u} + M_{IJ} Z^J E^I. \quad (2.3.12)$$

2.3.3 Expansion, shear, rotation

$$\theta_{IJ} = \sigma_{IJ} + \frac{1}{d} \delta_{IJ} \theta := M_{(IJ)}; \quad \sigma_{II} = 0, \quad (2.3.13)$$

$$\omega_{IJ} := M_{[IJ]}. \quad (2.3.14)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}M_{IJ} E_\mu^I E_\nu^J &= (E_\mu^I E_I^\lambda)(E_\nu^J E_J^\sigma) \nabla_\sigma u_\lambda = (\delta_\mu^\lambda + u_\mu u^\lambda)(\delta_\nu^\sigma + u_\nu u^\sigma) \nabla_\sigma u_\lambda \\ &= \nabla_\nu u_\mu + u_\nu \dot{u}_\mu\end{aligned}\quad (2.3.15)$$

より,

$$\nabla_\nu u_\mu = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - \dot{u}_\mu u_\nu; \quad \theta_{\mu\nu} := E_\mu^I E_\nu^J \theta_{IJ}, \quad \omega_{\mu\nu} := E_\mu^I E_\nu^J \omega_{IJ}. \quad (2.3.16)$$

2.3.4 Raychaudhuri 方程式

$[u, Z] = 0$ より

$$\ddot{Z} = \nabla_u \nabla_Z u = R(u, Z)u + \nabla_Z \dot{u}. \quad (2.3.17)$$

一方, \dot{Z} の表式より,

$$\begin{aligned}\ddot{Z} - \nabla_Z \dot{u} &= -a_I Z^I \dot{u} - Z^I \nabla_{E_I} \dot{u} + a_I M_{IJ} Z^J \dot{u} \\ &\quad + (\dot{M} + M^2)_{IJ} Z^J E_I.\end{aligned}\quad (2.3.18)$$

よって,

$$(\dot{M} + M^2)_{IJ} = -R_{I\mu J\nu} u^\mu u^\nu + a_I a_J + E_I \cdot \nabla_{E_J} \dot{u}. \quad (2.3.19)$$

これより

$$\dot{\theta} + \frac{1}{d}\theta^2 = -2\sigma^2 + 2\omega^2 - R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + \nabla_\mu \dot{u}^\mu, \quad (2.3.20a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{IJ} + \frac{2}{d}\theta\sigma_{IJ} &= -\sigma_{IK}\sigma_J^K + \frac{2}{d}\sigma^2\delta_{IJ} + \omega_{IK}\omega_J^K - \frac{2}{d}\omega^2\delta_{IJ} \\ &\quad - R_{IuJu} + \frac{1}{d}R_{uu}\delta_{IJ} + a_I a_J + E_{(I} \cdot \nabla_{E_{J)}} \dot{u} - \frac{1}{d}\nabla \cdot \dot{u}\delta_{IJ}, \end{aligned} \quad (2.3.20b)$$

$$\dot{\omega}_{IJ} + \frac{2}{d}\theta\omega_{IJ} + \sigma_I^K \omega_{KJ} - \sigma_J^K \omega_{KI} = E_{[I} \cdot \nabla_{E_{J]}} \dot{u}. \quad (2.3.20c)$$

ここで

$$2\sigma^2 := \sigma_{IJ}\sigma_{IJ}, \quad 2\omega^2 := \omega_{IJ}\omega_{IJ}. \quad (2.3.21)$$

特に, $\dot{u} \equiv 0$ のとき, $\dot{\theta}$ の方程式は Raychaudhuri 方程式と呼ばれる.

2.3.5 一様宇宙モデルへの応用

空間的に一様な宇宙モデル

$$\mathcal{L}_{\xi_I} g = 0 \quad (I = 1, \dots, d) \quad (2.3.22)$$

に対して, 時間一定面 Σ_t の単位法ベクトルを n とすると, $\mathcal{L}_{\xi_I} n = 0$ より,

$$g(\xi, \nabla_n n) = -g(\nabla_n \xi, n) = -g(\nabla_\xi n, n) = 0. \quad (2.3.23)$$

よって,

$$\nabla_n n = 0. \quad (2.3.24)$$

また, n は

$$n_* = n_t(t) dt \quad (2.3.25)$$

と書けるので,

$$dn_* = 0. \quad (2.3.26)$$

したがって,

$$H := -\frac{1}{d}K_i^i = \frac{1}{d}\nabla_\mu n^\mu \quad (2.3.27)$$

とおくと, Raychaudhuri 方程式より,

$$\dot{H} + H^2 = \frac{1}{d}(-2\sigma^2 - \text{Ricci}(n, n)). \quad (2.3.28)$$

これは,

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.3.29)$$

により a を定義すると,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{d} (-2\sigma^2 - Ricci(n, n)) \quad (2.3.30)$$

と書き換えられる.

次に, 物質が理想流体とすると,

$$u^\mu \nabla_\nu T_{\mu\nu} = -\nabla_\nu [(\rho + P)u^\nu] + \nabla_u P = 0 \quad (2.3.31)$$

より, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ は次の2式と同等となる:

$$\dot{\rho} = -(\rho + P)\theta; \quad \theta = \nabla_\mu u^\mu, \quad (2.3.32a)$$

$$(\rho + P)\nabla_u u_\mu + \nabla_\mu P + u_\mu \nabla_u P = 0. \quad (2.3.32b)$$

したがって, 特に $u = n$ のとき, 第1式は

$$\dot{\rho} = -dH(\rho + P) \quad (2.3.33)$$

を与える.

 §2.4

 一様等方宇宙モデル

2.4.1 基礎方程式

計量

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \hat{q}_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j. \quad (2.4.1)$$

エネルギー-運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}. \quad (2.4.2)$$

一様等方な空間 : E^d, S^d, H^d

$${}^d R_{ijkl} = k(q_{ik}q_{jl} - q_{il}q_{jk}) \quad (2.4.3)$$

これより,

$${}^d R_{ij} = (d-1)kq_{ij}, \quad {}^d R = d(d-1)k, \quad {}^d G_l^l = -\frac{d(d-1)(d-2)}{2}k. \quad (2.4.4)$$

発展方程式

$$K_j^i = -H\delta_j^i = \frac{K}{d}\delta_j^i, \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.4.5)$$

より,

$$\dot{H} = -\frac{d}{2}H^2 - \frac{d-2}{2}\frac{k}{a^2} - \frac{\kappa^2}{d-1}P. \quad (2.4.6)$$

拘束条件

$$H^2 = \frac{2\kappa^2}{d(d-1)}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.4.7)$$

エネルギー-運動量保存則

$$\dot{\rho} = -dH(\rho + P). \quad (2.4.8)$$

2.4.2 一般的性質

初期特異点 : 拘束条件を用いると, 発展方程式は

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{d-2}{d(d-1)}\kappa^2 \left(\rho + \frac{d}{d-2}P \right) \quad (2.4.9)$$

と書き換えられる. これより, 強エネルギー条件

$$R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \frac{(d-2)\kappa^2}{d-1} \left(\rho + \frac{d}{d-2}P \right) \geq 0 \quad (2.4.10)$$

が満たされれば, $\ddot{a} \leq 0$ となり, $H > 0$ のときスケール因子 $a(t)$ は過去の有限な時刻でゼロとなる. 正規直交基底に関する曲率テンソルの成分は

$$R_{I0J}^0 = \frac{\ddot{a}}{a}\delta_{IJ}, \quad (2.4.11a)$$

$$R_{IJKL} = \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) (\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK}) \quad (2.4.11b)$$

で与えられるので, 初期特異点が曲率特異点であるための条件は, ρ ないし P が発散することである.

Horizon : 共動座標系でのホライズン半径は

$$\chi_H = \int_0^t \frac{dt}{a} \quad (2.4.12)$$

と表される. したがって, 初期特異点 $t \rightarrow 0$ で $a \sim t^\gamma$ ($\gamma < 1$) ならホライズン半径は有限となる.

2.4.3 標準的な宇宙モデル

Friedmann model

状態方程式

$$P = w\rho \quad (2.4.13)$$

に対して, エネルギー方程式より,

$$\frac{d\rho}{\rho} = -d(1+w)\frac{da}{a} \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0/a^{d(1+w)}. \quad (2.4.14)$$

これを Hubble 方程式に代入して,

$$\dot{a}^2 - Ca^{2-d(1+w)} = -k; \quad C = \frac{2\kappa^2\rho_0}{d(d-1)}. \quad (2.4.15)$$

$\rho_0 > 0$ とすると, w が条件 (強エネルギー条件に相当)

$$w > \frac{2-d}{d} \quad (2.4.16)$$

を満たすとき，初期特異点は常に存在する．このとき，特異点近傍でのスケール因子の振る舞いは

$$a \propto t^\gamma; \quad \gamma = \frac{2}{d(1+w)} < 1. \quad (2.4.17)$$

また， $k > 0$ のときは，有限な時刻で a は最大となり，その後宇宙は収縮する．一方， $k \leq 0$ のとき，宇宙は膨張を続け， $t \rightarrow \infty$ で

$$a \propto \begin{cases} t & k < 0, \\ t^\gamma & k = 0. \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Inflationary model

スケール因子が Hubble ホライズン半径 $1/H$ より速く増大する条件は， $\rho_0 > 0$ のとき，

$$(aH)^\cdot = \ddot{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad w < \frac{2-d}{d}. \quad (2.4.19)$$

w が一定でこの条件を満たすとき， $k > 0$ なら宇宙のスケール因子は最小値をもつ．一方， $k \leq 0$ なら初期特異点をもつ．また， $w > -1$ のとき， $t \rightarrow \infty$ で

$$a \propto t^\gamma; \quad \gamma > 1, \quad (2.4.20)$$

$w = -1$ のとき，

$$a \propto e^{H_0 t}. \quad (2.4.21)$$

さらに， $w < -1$ ($\gamma < 0$) のとき， a は有限な時間で発散する (Big Rip singularity) :

$$a \propto \frac{1}{(t - t_*)^{|\gamma|}}. \quad (2.4.22)$$

Power-law inflation

スカラー場 ϕ に対する作用積分は

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (2.4.23)$$

で与えられるので，エネルギー-運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [(\nabla\phi)^2 + 2V(\phi)]. \quad (2.4.24)$$

これより，空間的に一様なスカラー場に対しては，

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \quad (2.4.25)$$

これより,

$$w = -1 + \frac{2\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + 2V} \quad (2.4.26)$$

となるので, $V \gg \dot{\phi}^2$ のときのみインフレーションが起きることになる.

場の方程式は

$$\ddot{\phi} + dH\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.4.27a)$$

$$H^2 = \frac{2\kappa^2}{d(d-1)} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right]. \quad (2.4.27b)$$

で与えられる.

$$p = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{2V}} \quad (2.4.28)$$

とおくと,

$$H^2 = \frac{2\kappa^2 V}{d(d-1)} (p^2 + 1). \quad (2.4.29)$$

これより, 特にポテンシャルが

$$V = V_0 e^{\alpha\phi} \quad (2.4.30)$$

で与えられるとき,

$$\dot{p} = -\sqrt{2V} \sqrt{p^2 + 1} \left[\frac{\alpha}{2} \sqrt{p^2 + 1} + \kappa \sqrt{\frac{d}{d-1}} p \right] \quad (2.4.31)$$

が成り立つ. これより,

$$\frac{dp}{d\phi} = -\frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} \left[\frac{\alpha}{2} \sqrt{p^2 + 1} + \kappa \sqrt{\frac{d}{d-1}} p \right] \quad (2.4.32)$$

を得る.

また,

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{d-1} \dot{\phi}^2 \quad (2.4.33)$$

より得られる式

$$\dot{H} + dH^2 = \frac{2\kappa^2}{d-1} V \quad (2.4.34)$$

および

$$\ddot{\phi} + dH\dot{\phi} + \alpha V = 0 \quad (2.4.35)$$

より,

$$\dot{\phi} + \frac{\alpha(d-1)}{2\kappa^2} H = \frac{C}{a^d} \quad (2.4.36)$$

が成り立つ.

- 1) $0 < \alpha < 2\kappa\sqrt{d/(d-1)}$ のとき：このとき， p は次式を満たす一定値 $p_* < 0$ に近づく．

$$p_*^2 = \frac{1}{\frac{4\kappa^2 d}{\alpha^2(d-1)} - 1}. \quad (2.4.37)$$

これより $t \rightarrow \infty$ で

$$V(\phi) \simeq \frac{2}{(\alpha p_* t)^2}, \quad (2.4.38a)$$

$$a \propto t^\gamma; \quad \gamma = \frac{4\kappa^2}{\alpha^2(d-1)} \quad (2.4.38b)$$

を得る．したがって，

$$|\alpha| < 2\kappa/\sqrt{d-1} \quad (2.4.39)$$

のとき，power-law inflation が実現される．

- 2) $\alpha > 2\kappa\sqrt{d/(d-1)}$ のとき：このとき， $t \rightarrow \infty$ で $p \rightarrow -\infty$ となり， p と ϕ の漸近的關係は

$$p \simeq -\frac{C'}{\sqrt{V}} \exp(\kappa\sqrt{d/(d-1)}\phi) \quad (2.4.40)$$

となる．これより，

$$\exp\left(-\kappa\sqrt{d/(d-1)}\phi\right) \simeq C'\kappa\sqrt{\frac{d}{d-1}} t, \quad (2.4.41a)$$

$$a \propto t^{1/d} \quad (2.4.41b)$$

を得る．

de Sitter 宇宙：

$$\rho = -P = \Lambda > 0 \quad (2.4.42)$$

のとき， a を $k = 0, \pm 1$ となるように規格化すると，

$$a = \begin{cases} e^{t/\ell} & k = 0, \\ \ell \cosh(t/\ell) & k = +1, \\ \ell \sinh(t/\ell) & k = -1. \end{cases} \quad (2.4.43)$$

ただし，

$$\frac{1}{\ell^2} = \frac{2}{d(d-1)}\Lambda. \quad (2.4.44)$$

これらは，いずれも同じ de Sitter 時空 dS^{d+1}

$$-T^2 + X_1^2 + \cdots + X_{d+1}^2 = \ell^2; \quad (2.4.45)$$

$$ds^2 = -dT^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d+1}^2 \quad (2.4.46)$$

の全体，ないし一部と対応する：

$$\begin{aligned} k = +1 &: dS^{d+1}, \\ k = 0 &: T > X_{d+1}, \\ k = -1 &: X_{d+1} > \ell. \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

de Sitter 宇宙は定曲率時空である：

$$R_{abcd} = \frac{1}{\ell^2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (2.4.48)$$

Anti-de Sitter 宇宙：

$$\rho = -P = \Lambda < 0 \quad (2.4.49)$$

のときには， $k < 0$ の時にのみ解が存在する：

$$a = \ell \sin(t/\ell); \quad \frac{1}{\ell^2} = \frac{2}{d(d-1)}|\Lambda|. \quad (2.4.50)$$

これは，anti-de Sitter 時空

$$-T^2 - S^2 + X_1^2 + \cdots + X_d^2 = -\ell^2; \quad (2.4.51)$$

$$ds^2 = -dT^2 - dS^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_d^2 \quad (2.4.52)$$

の一部の領域 $|S| < \ell$ と対応する．Anti-de Sitter 時空も定曲率時空である：

$$R_{abcd} = -\frac{1}{\ell^2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (2.4.53)$$

§2.5

非等方一様宇宙モデル

2.5.1 変換群

【定義 2.5.1】 群 G の各元 g に空間 X の変換 L_g が対応していて

$$L_a \circ L_b = L_{ab}, \quad \forall a, b \in G \quad (2.5.1a)$$

$$L_e = \text{id}_X \quad (2.5.1b)$$

が成り立つとき， G ないし $\{L_g \mid g \in G\}$ を X の (左) 変換群といい， $G \triangleright X$ と表す．特に， G が位相群で写像

$$F : G \times X \rightarrow X; \quad (g, x) \mapsto L_g(x) \quad (2.5.2)$$

が連続であるとき (左) 位相変換群， G が Lie 群， X が多様体で F がなめらかであるとき (左) Lie 変換群という．

同様に $G \ni g$ と X の変換 R_g の対応が

$$R_a \circ R_b = R_{ba}, \quad \forall a, b \in G \tag{2.5.3a}$$

$$R_e = \text{id}_X \tag{2.5.3b}$$

を満たすとき, G は X の右変換群とよび, $X \triangleleft G$ と表す. □

【定義 2.5.2】 変換群 $G \triangleright X$ と点 $p \in X$ に対して, p を含む X の部分集合

$$O_p = \{L_g(p) \mid g \in G\} \tag{2.5.4}$$

を, p を含む軌道という. また, p を動かさない変換の集合

$$H_p = \{g \in G \mid L_g(p) = p\} \tag{2.5.5}$$

は G の部分群をなし, p の等方群という. 同じ軌道上の2点に対する等方群は同型で互いに共役である. 特に, すべての点に対して等方群が自明となるとき G は X に自由に作用するという. また, X が一つの軌道と一致するとき, すなわち, X の任意の2点が G の変換により互いに結ばれるとき, G は推移的に作用するという. さらに, G が自由かつ推移的に作用するとき単純推移的に作用するともいう. □

無限小変換群 : G を多様体 \mathcal{M} の Lie 変換群, G の1次元部分群 $\{g(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ($g(t)g(s) = g(t+s), g(0) = e$) とする. $\Phi_t = L_{g(t)}$ に対して, ベクトル場

$$X^\mu(p) = \left. \frac{d\Phi_t^\mu(p)}{dt} \right|_{t=0} \tag{2.5.6}$$

を Φ_t の無限小変換という. G の無限小変換全体は交換子に関して Lie 代数をなす. すなわち, その基底を ξ_a とするとき, 適当な定数の組 C_{bc}^a に対して

$$[\xi_a, \xi_b] = C_{ab}^c \xi_c \tag{2.5.7}$$

が成り立つ. この定数の組は変換群 G の構造定数と呼ばれる.

2.5.2 等長変換群と不変基底

不変基底 : Lie 群 G が n 次元多様体 \mathcal{M} に単純推移的に作用しているとする. このとき $\dim G = n$ となり, \mathcal{M} 上の基底 X_a で

$$(L_g)_* X_I = X_I, \quad \forall g \in G \tag{2.5.8}$$

を満たすものが存在する. このような基底は不変基底と呼ばれる. G の構造定数を C_{ab}^c とするとき, 適当な不変基底に対して

$$[X_a, X_b] = -C_{ab}^c X_c \tag{2.5.9}$$

が成り立つ． X_a の双対基底 χ^a も G の作用で不変となる：

$$(L_g)_*\chi^a = \chi^a. \tag{2.5.10}$$

この基底は不変双対基底と呼ばれる．不変双対基底は次の Maurer-Cartan 方程式を満たす：

$$d\chi^a = \frac{1}{2}C^a_{bc}\chi^b \wedge \chi^c. \tag{2.5.11}$$

等長変換：Riemann 多様体 (\mathcal{M}, g) の変換 Φ が計量を不変にする，すなわち $\Phi_*g = g$ が成り立つとき等長変換，等長変換全体の作る群は等長変換群と呼ばれる．等長変換群は $\text{Isom}(\mathcal{M}, g)$ と表記される．等長変換群の無限小変換 ξ は Killing ベクトルと呼ばれ，次の Killing 方程式を満たす：

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \tag{2.5.12}$$

特に，等長変換群が \mathcal{M} に単純推移的に作用する部分群 G を持つとき，計量 g は不変基底 χ^a と定数行列 g_{ab} を用いて

$$ds^2 = g_{ab}\chi^a\chi^b \tag{2.5.13}$$

と表される．

【公式 2.5.3】

等長変換群 G が (M, g) に推移的に作用しているとき、不変基底 X_a, χ^a に関する接続係数と曲率テンソルの成分は、 G の構造定数 C^a_{bc} を用いて、

$$\begin{aligned} \omega^a_{bc} &= \frac{1}{2}(C^a_{bc} + C_{bc}^a + C_{cb}^a), \\ R^a_{bcd} &= \omega^a_{bp}C^p_{cd} + \omega^a_{pc}\omega^p_{bd} - \omega^a_{pd}\omega^p_{bc}, \\ R_{ab} &= -\frac{1}{2}C^p_{qa}C^q_{pb} - \frac{1}{2}C^{pq}_aC_{pqb} \\ &\quad + \frac{1}{4}C_{apq}C_b{}^{pq} + \frac{1}{2}C_p(C_{ab}{}^p + C_{ba}{}^p), \\ R &= -\frac{1}{2}C^{pqr}C_{qpr} - \frac{1}{4}C^{pqr}C_{pqr} - C_pC^p \end{aligned}$$

と表わされる。ここで、 $C_a = C^p_{ap}$ である。また、添え字の上げ下げは χ^a に関する計量の成分 g_{ab} とその逆行列により行なうものとする。 □

2.5.3 基礎方程式

【定義 2.5.4】 連結な時空 (\mathcal{M}, g) に対して，等長変換群の部分群 G が存在して G の各軌道が空間的超曲面となるときの (\mathcal{M}, g) は空間的に一様であるという．特に， G として単純推移的に作用するものが存在するとき，Bianchi 時空という． □

時空計量とエネルギー運動量テンソル : 一つの G 軌道を Σ とするとき, 時空 \mathcal{M} は $\Sigma \times \mathbb{R}$ と同相となり, 任意の軌道は $\Sigma_t = \Sigma \times t$ と表される. Σ 上の不変基底を X_I , その双対基底を χ^I とすると,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + Q_{IJ}(\chi^I + B^I dt)(\chi^J + B^J dt) \quad (2.5.14)$$

と表される. ここで, N, B^I, Q_{IJ} は t のみの関数である. 各 Σ_t 上の空間座標を適当に取り替えることにより, 常に $B_I = 0$ とすることができる. また, t の再定義により $N = 1$ とできる. そこで, 以下 $N = 1, B_I = 0$ とおく. このとき, エネルギー運動量テンソルは

$$T = T_{00} dt^2 + T_{0I}(dt \otimes \chi^I + \chi^I \otimes dt) + T_{IJ} \chi^I \chi^J. \quad (2.5.15)$$

と表される. ここで T_{ab} は時間 t のみの関数である.

拘束条件 :

$$K_{IJ} = -\frac{1}{2} \dot{Q}_{IJ} = -(\sigma_{IJ} + Q_{IJ} H); \quad \sigma_I^I = 0 \quad (2.5.16)$$

とおくと,

$$H^2 = \frac{2\kappa^2}{d(d-1)} T_{00} + \frac{\sigma^2}{d} - \frac{{}^d R}{d(d-1)}, \quad (2.5.17a)$$

$$C_K \sigma_I^K + C^J{}_{KI} \sigma_J^K = -\kappa^2 T_{0I}. \quad (2.5.17b)$$

ここで,

$$\sigma^2 = \frac{1}{d-1} \sigma_J^I \sigma_I^J, \quad (2.5.18)$$

$${}^d R = -\frac{1}{2} C^I{}_{JK} C^J{}_{IL} Q^{KL} - \frac{1}{4} Q_{IJ} C^I{}_{KM} C^J{}_{LN} Q^{KL} Q^{MN} - Q^{IJ} C_I C_J \quad (2.5.19)$$

発展方程式 :

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{d-1}{d} \sigma^2 - \frac{\kappa^2}{d(d-1)} [(d-2)T_{00} + Q^{IJ} T_{IJ}], \quad (2.5.20a)$$

$$\dot{\sigma}_J^I = -d\sigma_J^I - {}^d \hat{R}_J^I + \kappa^2 Q^{IK} \hat{T}_{KJ}. \quad (2.5.20b)$$

ここで,

$${}^d \hat{R}_J^I = {}^d R_J^I - \frac{{}^d R}{d} \delta_J^I, \quad \hat{T}_J^I = Q^{IK} T_{KJ} - \frac{Q^{KL} T_{KL}}{d} \delta_J^I. \quad (2.5.21)$$

また,

$$\begin{aligned} {}^d R_{IJ} = & -\frac{1}{2} C^K{}_{LI} C^L{}_{KJ} - \frac{1}{2} Q_{KL} Q^{MN} C^K{}_{MI} C^L{}_{NJ} \\ & + \frac{1}{4} Q_{IP} Q_{JQ} C^P{}_{KM} C^Q{}_{LN} Q^{KL} Q^{MN} \\ & + \frac{1}{2} C_L(Q_{IK} C^K{}_{JM} + Q_{JK} C^K{}_{IM}) Q^{LM}. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

エネルギー-運動量保存則 :

$$\dot{T}_{00} = -H(dT_{00} + Q^{IJ}T_{IJ}) - \hat{T}_{IJ}\sigma^{IJ} + \frac{1}{\kappa^2} (C_I C_J + Q_{IK} C^K_{JM} Q^{ML} C_L) \sigma^{IJ}. \quad (2.5.23)$$

2.5.4 一般的性質

体積特異点 :

$$H = \dot{a}/a \quad (2.5.24)$$

とおくと,

$$\dot{H} + H^2 = \ddot{a}/a \quad (2.5.25)$$

より,

$$(d-2)T_{00} + Q^{IJ}T_{IJ} \geq 0 \quad (2.5.26)$$

が常に満たされ, ある時刻 $t = t_0$ で $H > 0$ なら, 必ず過去の有限な時刻で $a = 0$ となる. 体積特異点は曲率特異点とは限らない (Kasner 時空の例参照).

2.5.5 Bianchi types

3次元 Lie 代数

$$[\xi_I, \xi_J] = C^K_{IJ} \xi_K \quad (I, J, K = 1, 2, 3). \quad (2.5.27)$$

$$\text{Jacobi 恒等式: } [[\xi_I, \xi_J], \xi_K] + [[\xi_J, \xi_K], \xi_I] + [[\xi_K, \xi_I], \xi_J] = 0 \quad (2.5.28)$$

Adjoint 表現: Lie 代数 \mathfrak{L} の自分自身の上への線形表現 Ad を

$$\text{ad}(\xi)\eta := [\xi, \eta] \quad (2.5.29)$$

により定義すると, Jacobi 恒等式は

$$[\text{ad}(\xi_I), \text{ad}(\xi_J)] = C^K_{IJ} \text{ad}(\xi_K) \quad (2.5.30)$$

と表される. この随伴表現は

$$\text{Ad}(\xi_I) \mapsto \mathbf{C}_I; \quad (\mathbf{C}_I)^J_K = C^J_{IK}. \quad (2.5.31)$$

と行列表示されるので, Jacobi 恒等式は構造定数に対する次の条件となる:

$$[\mathbf{C}_I, \mathbf{C}_J] = C^K_{IJ} \mathbf{C}_K. \quad (2.5.32)$$

Class	G_3A						G_3B				
	I	II	VI ₀	VII ₀	VIII	IX	V	IV	III	VI _h	VII _h
										$h \neq -1$	
A	0	0	0	0	0	0	1	1	1	$\sqrt{-h}$	\sqrt{h}
N_1	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
N_2	0	0	-1	1	1	1	0	0	-1	-1	1
N_3	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

表 2.1: 3次元リー代数の分類

Ellis-MacCallum 表示

$$\frac{1}{2}C^I_{JK}\epsilon^{JKL} = N^{IL} + \epsilon^{ILM}a_M; \quad N^{IJ} = N^{JI} \tag{2.5.33}$$

とおくと, C^I_{JK} は対称行列 N とベクトル a を用いて

$$C^I_{JK} = N^{IL}\epsilon_{LJK} + a_J\delta^K_I - a_K\delta^I_J \tag{2.5.34}$$

と表される. 特に,

$$2a_I = c_I := C^J_{IJ} = \text{Tr}C_I \tag{2.5.35}$$

となる. また, Jacobi 恒等式は

$$Na = 0 \tag{2.5.36}$$

と表される.

基底の変換

$$\xi_I \rightarrow \xi_J T^J_I \tag{2.5.37}$$

に対して, N と a は次のように変換する:

$$N \rightarrow (\det T)T^{-1}NT^{-1T}, \tag{2.5.38}$$

$$a \rightarrow T^T a. \tag{2.5.39}$$

【定理 2.5.5 (Bianchi 型 [Bianchi, Ellis-MacCallum])】 3次元実リー代数は、ベクトル a の大きさ $A = (a^I a_I)^{1/2}$ と行列 N の3つの固有値 N_1, N_2, N_3 により、表2.1に示した $I \sim IX$ までの9つの方に分類される。任意の3次元リー代数はこのいずれかと同型である。 □

2.5.6 厳密解

対角化可能性 : Bianchi タイプ I, II, V, VI₀, VIII, IX の真空解の計量は常に対角化可能である.

Type I: $C_{JK}^I = 0$

$$[\xi_I, \xi_J] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_1, \quad \xi_2 = \partial_2, \quad \xi_3 = \partial_3$$

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$$

$$\chi^1 = dx^1, \quad \chi^2 = dx^2, \quad \chi^3 = dx^3$$

Type II: $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$

$$[\xi_2, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0, \quad [\xi_1, \xi_3] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^3 \partial_2$$

$$X_1 = \partial_2, \quad X_2 = x^1 \partial_2 + \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = dx^2 - x^2 dx^3, \quad \chi^2 = dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type III: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0, \quad [\xi_2, \xi_3] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type IV: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1, C^1_{23} = -C^1_{32} = 1, C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1 + \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + (x^2 + x^3) \partial_2 + x^3 \partial_3$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = e^{x^1} (x^1 \partial_2 + \partial_3), \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} (dx^2 - x^1 dx^3), \quad \chi^2 = e^{-x^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type V: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1, C^2_{23} = -C^2_{32} = 1.$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2 + x^3 \partial_3$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = e^{x^1} \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = e^{-x^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type VI_h: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1, C^2_{23} = -C^2_{32} = q,$

$$h = -(1+q)^2/(1-q)^2 \quad (q \neq 0, 1)$$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = q\xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2 + qx^3 \partial_3$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = e^{qx^1} \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = e^{-qx^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

表 2.2: 3次元実リ一群に対する対する不変基底と双対基底 (1)

Type VII_h: $C^2_{13} = -C^2_{31} = 1$, $C^1_{23} = -C^1_{32} = -1$, $C^2_{23} = -C^2_{32} = q$,

$$h = q^2/(4 - q^2) \quad (q^2 < 4)$$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_2, \quad [\xi_2, \xi_3] = -\xi_1 + q\xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 - x^3\partial_2 + (x^2 + qx^3)\partial_3$$

$$X_1 = (A + kB)\partial_2 - B\partial_3, \quad X_2 = B\partial_2 + (A - kB)\partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = (C - kD)dx^2 - Ddx^3, \quad \chi^2 = Ddx^2 + (C + kD)dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

$$A = e^{kx^1} \cos(ax^1), \quad B = -a^{-1}e^{kx^1} \sin(ax^1)$$

$$C = e^{-kx^1} \cos(ax^1), \quad B = -a^{-1}e^{-kx^1} \sin(ax^1)$$

$$k = q/2, \quad a = (1 - k^2)^{1/2} = (4 - q^2)^{1/2}/2.$$

Type VIII: $C^1_{32} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1$, $C^1_{23} = C^2_{13} = C^3_{21} = -1$

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = -\xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 + \frac{1}{2}(e^{x^3} - (x^2)^2e^{-x^3})\partial_2 - x^2e^{-x^3}\partial_3,$$

$$\xi_2 = \partial_3,$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 - \frac{1}{2}(e^{x^3} + (x^2)^2e^{-x^3})\partial_2 - x^2e^{-x^3}\partial_3,$$

$$X_1 = \frac{1}{2}(1 + (x^1)^2)\partial_1 + \frac{1}{2}(1 - 2x^1x^2)\partial_2 - x^1\partial_3,$$

$$X_2 = -x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + \partial_3,$$

$$X_3 = \frac{1}{2}(1 - (x^1)^2)\partial_1 - \frac{1}{2}(1 - 2x^1x^2)\partial_2 + x^1\partial_3,$$

$$\chi^1 = dx^1 + (1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 - x^2 - (x^1)^2x^2)dx^3,$$

$$\chi^2 = 2x^1dx^2 + (1 - 2x^1x^2)dx^3,$$

$$\chi^3 = dx^1 + (-1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 + x^2 - (x^1)^2x^2)dx^3,$$

Type IX: $C^1_{23} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1$, $C^1_{32} = C^2_{13} = C^3_{21} = -1$

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2$$

$$\xi_1 = \partial_2,$$

$$\xi_2 = \cos x^2\partial_1 - \cot x^1 \sin x^2\partial_2 + \frac{\sin x^2}{\sin x^1}\partial_3,$$

$$\xi_3 = -\sin x^2\partial_1 - \cot x^1 \cos x^2\partial_2 + \frac{\cos x^2}{\sin x^1}\partial_3,$$

$$X_1 = -\sin x^3\partial_1 + \frac{\cos x^3}{\sin x^1}\partial_2 - \cot x^1 \cos x^3\partial_3,$$

$$X_2 = \cos x^3\partial_1 + \frac{\sin x^3}{\sin x^1}\partial_2 - \cot x^1 \sin x^3\partial_3,$$

$$X_3 = \partial_3,$$

$$\chi^1 = -\sin x^3dx^1 + \sin x^1 \cos x^3dx^2,$$

$$\chi^2 = \cos x^3dx^1 + \sin x^1 \sin x^3dx^2,$$

$$\chi^3 = \cos x^1dx^2 + dx^3$$

表 2.3: 3次元実リ一群に対する対する不変基底と双対基底 (2)

Type I

Einstein 方程式 : 理想流体に対して

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho + \frac{\sigma^2}{3}, \quad (2.5.40a)$$

$$\dot{\sigma}_J^I = -3H\sigma_J^I, \quad (2.5.40b)$$

$$\dot{\rho} = -3(\rho + P)H. \quad (2.5.40c)$$

これより, 計量は常に対角化可能で,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 [b_1^2(dx^1)^2 + b_2^2(dx^2)^2 + b_3^2(dx^3)^2], \quad (2.5.41a)$$

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho + \frac{\Sigma^2}{3a^6}, \quad (2.5.41b)$$

$$\sigma_J^I = \frac{\Sigma_I}{a^3}\delta_J^I, \quad (2.5.41c)$$

$$\frac{\dot{b}_I}{b_I} = \frac{\Sigma_I}{a^3} \quad (2.5.41d)$$

が成り立つ. ここで, Σ_I は定数, $2\Sigma^2 = \sum_I \Sigma_I^2$ である.

Kasner 解 : Bianchi タイプ I の真空一般解は次の Kasner 解で与えられる.

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2\sigma_1}dx^2 + t^{2\sigma_2}dy^2 + t^{2\sigma_3}dz^2. \quad (2.5.42)$$

ここで, σ_I は次の2条件を満たす実数である.

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1, \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 1. \quad (2.5.43)$$

ただし,

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{4(\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2)}{t^4} + \frac{4\sum_I \sigma_I^2(\sigma_I - 1)^2}{t^4} \quad (2.5.44)$$

より, σ_I の2つがゼロ, 一つが1となる解は Minkowski 時空の一部と対応する (Rindler 時空). その他の解は, $t = 0$ に曲率特異点をもつ. $\Lambda \neq 0$: 真空で $\Lambda = \pm\omega^2/3 \neq 0$ の時の一般解は,

$$a(t)^3 = \frac{\sqrt{3}\Sigma}{\omega} S(\omega t), \quad (2.5.45a)$$

$$b_I(t)^2 = \left(\frac{|C(\omega t) - 1|}{C(\omega t) + 1} \right)^{q_I}, \quad (2.5.45b)$$

$$\Sigma_I = \sqrt{3}q_I\Sigma. \quad (2.5.45c)$$

ここで, $\Lambda > 0$ のとき $C(x) = \cosh(x)$, $S(x) = \sinh(x)$, $\Lambda < 0$ のとき $C(x) = \cos(x)$, $S(x) = \sin(x)$. また, q_I は次の条件を満たす数の組:

$$\sum_I q_I = 0, \quad \sum_I q_I^2 = \frac{2}{3}. \quad (2.5.46)$$

dust 解 : $P = 0$ の時の一般解は ,

$$a_I := ab_I = t^{2/3} \left(A + \frac{B}{t} \right)^{-q_I + 1/3}, \quad (2.5.47a)$$

$$\Sigma^2 = B^2/3. \quad (2.5.47b)$$

ここで , q_I は上記と同じ条件を満たす数の組 .

Type II

真空解 (Taube 1951): Type II の真空一般解は ,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -F^{-2}(\chi^1)^2 + F^2 [e^{2At}(\chi^2)^2 + e^{2Bt}(\chi^3)^2 - e^{2(A+B)t} dt^2]; \\ kF^2 &= \cosh(kt), \quad 4AB = k^2. \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

ここで A, B, k は定数 , また

$$\chi^1 = dx - zdy, \quad \chi^2 = dy, \quad \chi^3 = dz. \quad (2.5.49)$$

Type V

真空解 (Joseph 1969): Type V の真空一般解は ,

$$ds^2 = \sinh(2at) ((\chi^1)^2 - dt^2) + (\tanh at)^{\sqrt{3}}(\chi^2)^2 + (\tanh at)^{-\sqrt{3}}(\chi^3)^2. \quad (2.5.50)$$

ここで ,

$$\chi^1 = dx, \quad \chi^2 = e^x dy, \quad \chi^3 = e^x dz. \quad (2.5.51)$$

Type IX

Taub-NUT 解 : 局所的に回転対称性をもつ Bianchi IX 型の真空解は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -U^{-1} dt^2 + (2l)^2 U (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 + (t^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \\ U &= \frac{2mt + l^2 - t^2}{t^2 + l^2} \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

で与えられる . ここで , θ, ϕ, ψ は 3次元球面の Euler 角 , $m, l (l \neq 0)$ は定数である . この解の Killing ベクトルは , 一様性を表す ξ_1, ξ_2, ξ_3 と , 局所回転対称性を表す ∂_ψ である . この解の計量は

$$U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = t_\pm = m \pm \sqrt{m^2 + l^2} \quad (2.5.54)$$

で特異となるが , これは見かけの特異性で , 時空はこの面を超えて解析接続できる . この拡張された時空では , $t = t_\pm$ の面は光的となり , $t \geq t_+$ ないし $t \leq t_-$ では因果律が破れる .

 §2.6

高次元宇宙モデル

2.6.1 背景

標準モデル

- ゲージセクターの不完全な統一
running coupling constants の GUT スケール
での一致
- クォーク電荷の分数性とそのパターン
- 世代多重性, 質量項の構造
Cabibo mixing ⇒ GUT
- 弱い相互作用での CP の破れ
- 強い相互作用での CP 保存
- ニュートリノの質量と mixing
- バリオン非対称性の起源

- ダークマター問題 ⇒ SUSY

- Inflaton 問題
- 重力との統一 ⇒ 重力を含む統一理論
- 小さな正の宇宙項

大統一理論

- Gauge hierarchy problem ⇒ SUSY
- Running coupling constant mismatch

- GUT 群の起源
- Higgs sector の大きな不定性 ⇒ スカラセクターとベクトルセク
ターを統一する理論
- 世代多重性の起源

重力を含む統一理論

- 発散の問題
- ゲージセクターの非一意性 ($\Rightarrow D = 11$ 極小モデル)
- Chirality の破れの起源
- 次元低下・コンパクト化の問題
- モジュライ問題, ディラトン安定化問題
- SUSY breaking mechanism
- Inflation 問題
- 宇宙項問題

高次元超重力理論

- 理論の非一意性問題 (+ duality \Rightarrow M theory?)
- 理論の摂動論的性格 (+ duality, brane \Rightarrow M theory?)
- 次元低下・コンパクト化の問題
- モジュライ問題, ディラトン安定化問題
- SUSY breaking mechanism
- Inflation 問題
- 宇宙項問題

10次元超弦理論

2.6.2 Kaluza-Klein モデル

$(n + 1)$ 次元時空 M が $M = X_n \times S^1$ という位相構造をもつとすると, その計量は一般に,

$$ds_{n+1}^2 = G_{MN}dX^M dX^N = e^{2\sigma}(d\phi + A)^2 + e^{-\frac{2\sigma}{n-2}}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.6.1}$$

と表される. 特に, ∂_ϕ が Killing ベクトルで, $\sigma, A, g_{\mu\nu}$ が x^μ のみに依存するとき,

$$\int d^{n+1}X \sqrt{-G}^{n+1} R = L \int d^n x \sqrt{-g} \left[R - \alpha(D\sigma)^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha\sigma}|F|^2 \right] \tag{2.6.2}$$

と表される. ここで,

$$|F|^2 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad F = dA, \tag{2.6.3}$$

$$\alpha = \frac{n-1}{n-2}. \tag{2.6.4}$$

したがって, 重力場と相互作用するディラトンと電磁場に対する n 次元の理論が得られる.

さらに一般化して, $(n + m)$ 次元時空が $M = X_n \times Y_m$ という構造をもつとき, その計量は一般に

$$ds^2 = e^{\frac{2\sigma}{m}}\Phi_{ab}(dy^a + A^a)(dy^b + A^b) + e^{-\frac{2\sigma}{n-2}}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.6.5}$$

と表される．いま， Y の変換群 G に対して， $\Phi_{ab}(x, y)$ が Y_x 上の計量として不変で， σ と $g_{\mu\nu}$ が y に依存せず， A^a が Y の無限小変換の基底 ξ_P^a を用いて

$$A^a = \xi_P^a(y) A_\mu^P(x) dx^\mu = \xi^a(A) \quad (2.6.6)$$

と表されるとする．このとき，

$$S = \int d^{n+m}x \sqrt{G^{n+m}} R \quad (2.6.7)$$

は

$$S = \int d^m x \sqrt{g} \left[R - \alpha (D\sigma)^2 - \frac{1}{2} G^{AB} D\phi_A D\phi_B + e^{-2\alpha\sigma} C - \frac{1}{4} e^{2\alpha\sigma} \gamma_{PQ} F^P \cdot F^Q \right] \quad (2.6.8)$$

と表される．ここで，

$$\alpha = \frac{1}{n-2} + \frac{1}{m}, \quad (2.6.9a)$$

$$1 = \int d^m y |\Phi|^{1/2}, \quad (2.6.9b)$$

$$\Phi_{ab} = \phi_A(x) \Phi_{ab}^A(y), \quad (2.6.9c)$$

$$G^{AB}(x) = \frac{1}{2} (\Phi^{ac} \Phi^{bd} - \Phi^{ab} \Phi^{cd}) \Phi_{ab}^A \Phi_{cd}^B, \quad (2.6.9d)$$

$$C(x) = \hat{R}(\Phi), \quad (2.6.9e)$$

$$\gamma_{PQ}(x) = \xi_P^a \xi_Q^b \Phi_{ab}. \quad (2.6.9f)$$

また， ξ^P が交換関係

$$[\xi^P, \xi^Q] = C_{PQ}^R \xi^R \quad (2.6.10)$$

を満たすとすると， F^P は

$$F^P = dA^P - \frac{1}{2} C_{QR}^P A^Q \wedge A^R \quad (2.6.11)$$

と表される．さらに， $g \in G$ に対応する Y の変換を f_g として

$$f(x, y) = (x, f_g(x)(y)) \quad (2.6.12)$$

と表される M の変換に対して， A は G の Lie 代数に値を取る 1 形式として

$$\bar{A} = g^{-1} A g + g^{-1} dg \quad (2.6.13)$$

と変換する．

したがって， G が非可換な群ならば，非可換ゲージ場とディラトンおよびモジュライ場が重力と結合した n 次元理論が得られる．例えば， $Y = S^m$ のとき $G = \text{SO}(m+1)$ ， $Y = M^{pqr} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times U(1)/\text{SU}(2) \times U(1)^2$ (7次元 Einstein 空間， $(p, q, r) \neq (0, 0, 1)$ ． p が奇数ならスピン構造をもつ) のとき， $G = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times U(1)$ ．

ただし，この理論には次のような問題点がある．

- Y が正曲率をもつ ($C > 0$) とすると, モジュライポテンシャルが負となる. また, Y がゼロ曲率のコンパクト Einstein 空間のとき, $Y = T^k \times Y'$ (Y' は連続な対称性を持たないゼロ曲率の Einstein 空間) となる. Y が負曲率のコンパクト Einstein 空間のときには, Killing ベクトルは存在しない. したがって, Y の等長変換群が現実的なゲージ群を含むとすると, 実質的に負の宇宙項が生じる.
- 一般的には, デイラトンが安定化されない (例外は, $C < 0$ かつ $\gamma_{PQ} F^P \cdot F^Q$ が正の値を取る場合).
- モジュライ場はゲージ場と結合せず, ゲージ対称性の自発的破れを産み出す Higgs 場とならない (質量をもつスカラ場はゲージ場と結合するが, その質量は一般に, Y のサイズを R とすると $1/R$ 程度と非常に大きくなる.)
- 高次元時空の次元や余剰次元のコンパクト化のタイプ (したがって, 対応するゲージ対称性) を規定するメカニズムが存在しない.
- スピノール場が存在しない (あるいは, その構造を規定する原理が含まれていない.)

2.6.3 $D = 11$ 超重力理論

理論の概要と問題点

基本場: 基本的な場は

$$\text{フレーム場: } e_A = (e_A^M); \quad G^{MN} = \eta^{AB} e_A^M e_B^N, \quad \theta^A(e_B) = \delta_{AB} \quad (2.6.14a)$$

$$\text{3形式場: } A_3 = \frac{1}{3!} A_{MPQ} dx^M \wedge dx^P \wedge dx^Q, \quad (2.6.14b)$$

$$\text{Majorana 3/2 場: } \Psi_M; \quad \bar{\Psi} = \Psi^T C^{-1}. \quad (2.6.14c)$$

ここで, ガンマ行列 Γ_A ($A = 0, \dots, 10$) を

$$\{\Gamma_A, \Gamma_B\} = -2\eta_{AB} \quad (2.6.15)$$

として,

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \Gamma_0. \quad (2.6.16)$$

また, C はつぎの条件により定義される荷電共役変換行列:

$$C^{-1} \Gamma_A C = -\Gamma_A^T, \quad C^T = -C. \quad (2.6.17)$$

作用積分 完全な作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int d^{11}x |\theta| \left[e_A^M e_B^N \mathcal{R}^{AB}{}_{MN}(\omega) - \frac{1}{2} |F_4|^2 + \frac{1}{6} * (F_4 \wedge F_4 \wedge A_3) \right. \\ \left. - i \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \left[\frac{1}{2} (\omega + \tilde{\omega}) \right] \Psi_P \right. \\ \left. + \frac{1}{192} [\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNPQXYZ} \Psi_N + 12 \bar{\Psi} \Gamma^{XY} \Psi^Z] (F_{WXYZ} + \tilde{F}_{WXYZ}) \right]$$

ここで,

$$\omega_{ABM} = \omega_{ABM}(e) + K_{MAB}, \quad (2.6.19a)$$

$$K_{MAB} = \frac{i}{8} [-\bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P - 4\bar{\Psi}_M \Gamma_{[A} \Psi_{B]} + 2\bar{\Psi}_B \Gamma_M \Psi_A], \quad (2.6.19b)$$

$$\tilde{\omega}_{ABM} = \omega_{ABM} + \frac{i}{8} \bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P, \quad (2.6.19c)$$

$$\Gamma_{A_1 \dots A_p} = \Gamma_{[A_1} \dots \Gamma_{A_p]}, \quad (2.6.19d)$$

$$D_M(\omega) = \partial_M - \frac{1}{4} \omega^{AB} \Gamma_{AB}, \quad (2.6.19e)$$

$$F = dA, \quad (2.6.19f)$$

$$\tilde{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} - \frac{3}{2} \bar{\Psi}_{[M} \Gamma_{NP} \Psi_{Q]}. \quad (2.6.19g)$$

基本場の次元は

$$[\kappa] = L^{9/2}, \quad [e_A^M] = L^0, \quad [A_{MNP}] = L^0, \quad [\Psi_M] = L^{-1/2}. \quad (2.6.20)$$

場の方程式:

$$R_{MN}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2} G_{MN} R(\tilde{\omega}) = \frac{1}{12} \tilde{F}_{MPQR} \tilde{F}_N{}^{PQR} - \frac{1}{4} G_{MN} |F_4|^2, \quad (2.6.21a)$$

$$\Gamma^{MNP} \tilde{D}_N(\tilde{\omega}) \Psi_P = 0, \quad (2.6.21b)$$

$$d * \tilde{F} + \frac{1}{2} \tilde{F} \wedge \tilde{F} = 0. \quad (2.6.21c)$$

ここで,

$$\tilde{D}_M(\tilde{\omega}) = D_M(\tilde{\omega}) + \frac{1}{2} T_M{}^{PQRS} \tilde{F}_{PQRS}, \quad (2.6.22)$$

$$T^{SMNPQ} = -\frac{i}{144} (\Gamma^{SMNPQ} - 8\Gamma^{[MNP} G^{Q]S}). \quad (2.6.23)$$

強エネルギー条件:

$$R_{MN} = \frac{1}{12} F_{MPQR} F_N{}^{PQR} - \frac{1}{6} G_{MN} |F_4|^2 \quad (2.6.24)$$

より,

$$R_{00} = \frac{1}{18} F_{TIJK} F_T{}^{IJK} + \frac{1}{144} F_{IJKL} F^{IKJK} \geq 0. \quad (2.6.25)$$

対称性:

- a) 一般共変性
- b) 局所 SO(10, 1) 変換
- c) $N = 1$ SUSY
- d) A_3 のゲージ変換
- e) T/P 変換

利点: $D = 11$ 超重力理論は次のような優れた点がある:

1. 超対称性が存在し得る最高次元である $D = 11$ では, 局所超対称性を要求すると, 作用積分のうち座標微分について2階までの部分は一意的に決まってしまう. 特に, 勝手に宇宙項を加えることは許されない [Cremmer, Julia & Scherk (1978)].
2. S^1 因子による KK 還元により, IIA 型超弦理論の長波長極限である $D = 10$ の IIA 型超重力理論が得られる. 逆に, $D = 11$ 超重力理論は $D = 10$ IIA 型超弦理論の強結合極限と見なすことができる.
3. 4-形式 F_4 の存在は, 11次元時空のなかで4次元が特殊な役割を果たすことを示唆する (e.g. 自発的コンパクト化 [Cremmer & Scherk (1976), Freund & Rubin (1980)]).
4. 4次元上の超重力理論の多くが, $D = 11$ 超重力理論からの KK 還元により得られる. 例えば, T^7 コンパクト化により大域 $E_7 \times$ 局所 $SU(8)$ 対称性をもつ $D = 4, N = 8$ 超対称理論 (Cremmer-Julia model(1979)).

問題点: $D = 11$ 超重力理論 (のコンパクト化による KK 還元) は, 次のような困難のため, 直ちに現実的な統一理論を与えない.

1. (Chirality 問題) コンパクト化による KK 還元で得られる4次元スピノール場のゲージ相互作用は ($F_{mnpq} = 0$ かつ torsion = 0 のとき) LR 対称性をもつ. [Witten E (1981)]
2. (Fermion 表現の問題) 等長変換群が $G_{SM} = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を含む空間によるコンパクト化は, 質量ゼロフェルミオンに対するゲージ群の現実的な表現を与えない. [Randjbar-Daemi S, Salam A & Strathdee J (1984), Pope CN (1984), Castellani L (1984), D'Auria R & Fré P (1984)]
3. (G_{SM}/G_{GUT} の起源) 1と2は, 標準モデルに現れるゲージ対称性が高次元の幾何学的対称性と直接結びついていないことを示唆している. 実際, chiral なフェルミオンを含む de Wit-Nicolai の $D = 4, N = 8$ 超対称理論 (局所 $SO(8) \times SU(8)$ 対称性をもつ) では, $SU(8)$ ゲージ場は複合場で kinetic term を持たない. また, 現実的な低エネルギー理論を与える可能性のある $D = 10$ Heterotic string 理論に対応する超重力理論では, $D = 10$ のレベルですでに $E_8 \times E_8$ ゲージ超場が重力超場以外に含まれている.
4. (インフレーション問題, 宇宙項問題) 一般に, $M_4 \times Y_7$ 型のコンパクト化では, 4次元宇宙の宇宙項が正とならない. これは11次元 SUGRA だけでなく, 10次元 SUGRA にも共通する (Gibbons の No-Go 定理). これを見るために, まず, これらのモデルでは11次元/10次元で強エネルギー条件が成り立つことに注意する:

$$R_{00} \geq 0. \quad (2.6.26)$$

いま，時空が $M_D = X_p \times Y$ という構造をもち，計量が

$$ds^2 = W(y)^2 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + g_{mn}(y) dy^m dy^n \quad (2.6.27)$$

と表されるとする (Warped コンパクト化) . このとき，

$$R_{\mu\nu} = {}^X R_{\mu\nu} + \frac{1}{pW^p} g_{\mu\nu} {}^Y \Delta(W^p) \quad (2.6.28)$$

が成り立つ . よって， Y がコンパクトで境界のないなめらかな多様体の時，

$${}^X R_{00} \int_Y d\Omega_Y W^p(y) = \int_Y d\Omega_Y R_{00} \geq 0 \quad (2.6.29)$$

を得る .

2.6.4 インフレーション問題

$D = 11$ 超重重力理論

Bosonic action: $\Psi_M = 0$ とおくと， $D = 11$ 超重重力理論の作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int dx^{11} (-G)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2} |F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (2.6.30)$$

場の方程式は

$$d * F_4 + \frac{1}{2} F_4 \wedge F_4 = 0. \quad (2.6.31)$$

また，エネルギー運動量テンソルは

$$2\kappa^2 T_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N{}^{ABC} - \frac{1}{4} |F_4|^2 G_{MN}. \quad (2.6.32)$$

よって，

$$R_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N{}^{ABC} - \frac{1}{6} |F_4|^2 G_{MN}. \quad (2.6.33)$$

Warped product 型時空: 計量が

$$ds^2 = A^2 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + B^2 \gamma_{pq}(y) dy^p dy^q \quad (2.6.34)$$

という形をもち， F_4 が

$$F_4 = cf \Omega(M_4); \quad \Omega(M_4) = \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (2.6.35)$$

と書けるとする . このとき，

$$dF_4 = 0 \Rightarrow f = f(x). \quad (2.6.36)$$

また，

$$*(A^4 \Omega(M_4)) = B^7 \Omega(X_7) \quad (2.6.37)$$

より,

$$d * F_4 = 0 \Rightarrow D_\mu (f A^{-4} B^7) = 0. \quad (2.6.38)$$

よって, $\gamma_{pq}(y)$ の再定義により

$$A = f(x)^{1/4} h(x, y)^{-5/4}, \quad B = h(x, y)^{-5/7}. \quad (2.6.39)$$

このとき,

$$|F_4|^2 = -(cfA^{-4})^2 = -c^2 h^{10}, \quad (2.6.40a)$$

$$F_{\mu ABC} F_\nu^{ABC} = -6c^2 h^{10} G_{\mu\nu}, \quad (2.6.40b)$$

$$F_{pABC} F_q^{ABC} = F_{\mu ABC} F_p^{ABC} = 0. \quad (2.6.40c)$$

よって, Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} = -\frac{c^2 h^{10}}{3} G_{\mu\nu}, \quad R_{\mu p} = 0, \quad R_{pq} = \frac{c^2 h^{10}}{6} G_{pq}. \quad (2.6.41)$$

まず,

$$R_{\mu p} = \frac{9}{28h} D_\mu \hat{D}_p h \quad (2.6.42)$$

より,

$$h = h_1(x) + h_2(y). \quad (2.6.43)$$

次に,

$$R_{pq} = \hat{R}_{pq} - V\gamma_{pq} + \frac{60}{7h} \hat{D}_p \hat{D}_q h_2 - \frac{1005}{196h^2} \hat{D}_p h_2 \hat{D}_q h_2 = \frac{c^2 h^{60/7}}{6} \gamma_{pq} \quad (2.6.44)$$

より, $D_\mu h_1 \neq 0$ なら,

$$\hat{D}_p h_2 \hat{D}_q h_2 = \frac{1}{7} (\hat{D} h_2)^2 \gamma_{pq}. \quad (2.6.45)$$

γ_{pq} が非退化より, $\hat{D}_p h_2 = 0$. よって, $h = h(x)$ または $h = h(y)$.

$h = h(x)$ の場合 このとき,

$$ds^2 = ds^2(M_4) + B^2 ds^2(X_7), \quad (2.6.46a)$$

$$B = h(x)^{-5/7}, \quad (2.6.46b)$$

$$F_4 = ch^5 \Omega(M_4). \quad (2.6.46c)$$

Einstein 方程式は

$$R_{pq} = \hat{R}_{pq} + \frac{5}{7} h^{-10/7} \left(\frac{\Delta h}{h} - 6 \frac{(Dh)^2}{h^2} \right) \gamma_{pq} = \frac{c^2 h^{60/7}}{6} \gamma_{pq}, \quad (2.6.47a)$$

$$R_{\mu\nu} = {}^4 R_{\mu\nu} - 7 \frac{D_\mu D_\nu B}{B} = -\frac{c^2 B^{-14}}{3} g_{\mu\nu}. \quad (2.6.47b)$$

よって,

$$\hat{R}_{pq} = 6\hat{K}\gamma_{pq}, \quad (2.6.48a)$$

$$\frac{\Delta h}{h} - 6\frac{(Dh)^2}{h^2} = \frac{7c^2}{30}h^{10} - \frac{42\hat{K}}{5}h^{10/7}, \quad (2.6.48b)$$

$${}^4R_{\mu\nu} = -5\frac{D_\mu D_\nu h}{h} + \frac{60}{7}\frac{D_\mu h D_\nu h}{h^2} - \frac{c^2 h^{10}}{3}g_{\mu\nu}. \quad (2.6.48c)$$

第2式より, 最後の式は Bianchi 恒等式を満たすので整合的.

これらの方程式より, $h = \text{const}$ となるためには,

$$\hat{K} = \frac{c^2}{36}h^{60/7} \geq 0 \quad (2.6.49)$$

でなければならないことが分かる. また, このとき

$${}^4R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}; \quad \Lambda = -\frac{c^2 h^{10}}{3} \leq 0 \quad (2.6.50)$$

となる (Fruend-Rubin 型コンパクト化).

$h = h(y)$ の場合 このとき,

$$ds^2 = A^2 ds^2(M_4) + ds^2(X_7), \quad (2.6.51a)$$

$$A = h(y)^{-5/4}, \quad (2.6.51b)$$

$$F_4 = c\Omega(M_4). \quad (2.6.51c)$$

Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} = {}^4R_{\mu\nu} - (A\hat{\Delta}A + 3(\hat{D}A)^2)g_{\mu\nu} = -\frac{c^2}{3}h^{10}A^2g_{\mu\nu}, \quad (2.6.52a)$$

$$R_{pq} = \hat{R}_{pq} - 4\frac{\hat{D}_p\hat{D}_q A}{A} = \frac{c^2}{6}h^{10}\gamma_{pq} \quad (2.6.52b)$$

より,

$${}^4R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.6.53a)$$

$$\frac{\hat{\Delta}h}{h} - 6\frac{(\hat{D}h)^2}{h^2} = -\frac{4c^2}{15}h^{10} - \frac{4\lambda}{5}h^{5/2}, \quad (2.6.53b)$$

$$\hat{R}_{pq} = -5\frac{\hat{D}_p\hat{D}_q h}{h} + \frac{45}{4h^2}\hat{D}_p h \hat{D}_q h + \frac{c^2}{6}h^{10}\gamma_{pq}. \quad (2.6.53c)$$

$h = h(t)$ の場合 $h = h(x)$ の特殊な場合として

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\sigma_3^2 + b(t)^2 ds^2(X_7), \quad (2.6.54a)$$

$$h = b^{-5/7} \quad (2.6.54b)$$

となる場合を考える．ここで， $d\sigma_3^2$ は断面曲率 k の定曲率空間の計量．このとき，Einstein 方程式は

$$\frac{\ddot{b}}{b} = \frac{6}{7} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) + 3 \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{2c^2}{21b^{14}}, \quad (2.6.55a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) - 7 \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{c^2}{3b^{14}}, \quad (2.6.55b)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 7 \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + 7 \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{c^2}{12b^{14}} + \frac{7\hat{K}}{b^2} = 0. \quad (2.6.55c)$$

ここで，

$$\hat{R}_{pq} = 6\hat{K}\gamma_{pq}. \quad (2.6.56)$$

これらより，

$$\begin{aligned} \frac{a^2 d^2b}{b da^2} = & \frac{1}{-24ka^{-2} + 2c^2b^{-14} - 168\hat{K}b^{-2}} \left[28 \left(\frac{12k}{a^2} + 2\frac{c^2}{b^{14}} \right) \left(\frac{a db}{b da} \right)^3 \right. \\ & + \left(\frac{312k}{a^2} + \frac{86c^2}{b^{14}} - \frac{1176\hat{K}}{b^2} \right) \left(\frac{a db}{b da} \right)^2 \\ & \left. + \left(\frac{72k}{a^2} + \frac{34c^2}{b^{14}} - \frac{840\hat{K}}{b^2} \right) \frac{a db}{b da} + \frac{4c^2}{b^{14}} - \frac{144\hat{K}}{b^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.6.57)$$

特に， $c = 0, k = 0, \hat{K} \neq 0$ のとき，この方程式は

$$\frac{d^2b}{da^2} = \frac{7}{b} \left(\frac{db}{da} \right)^2 + \frac{5 db}{a da} + \frac{6 b}{7 a^2}. \quad (2.6.58)$$

この方程式は

$$b = \frac{a}{v^{1/6}} \quad (2.6.59)$$

とおくと

$$\frac{d^2v}{da^2} - \frac{17}{a} \frac{dv}{da} + \frac{540}{7} \frac{v}{a^2} = 0. \quad (2.6.60)$$

この一般解は

$$v = a^9 \left(C_1 a^{3\sqrt{21}/7} + C_2 a^{-3\sqrt{21}/7} \right). \quad (2.6.61)$$

よって，

$$b = a^{-1/2} \left(C_1 a^{3\sqrt{21}/7} + C_2 a^{-3\sqrt{21}/7} \right)^{-1/6}, \quad (2.6.62a)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\hat{K}a}{3C_1C_2} \left(C_1 a^{3\sqrt{21}/7} + C_2 a^{-3\sqrt{21}/7} \right)^{7/3}. \quad (2.6.62b)$$

1) $\hat{K} > 0$: このとき, $C_1, C_2 > 0$. a のレンジは $0 < a < \infty$, t のレンジは $0 < t < t_0$:

$$t \sim 0: \quad a \propto t^{\frac{\sqrt{21}+1}{10}}, \quad b \propto a^{-\frac{7-\sqrt{21}}{14}}, \quad (2.6.63a)$$

$$t \rightarrow t_0 - 0 \quad a \sim \frac{1}{(t_0 - t)^{\frac{\sqrt{21}-1}{10}}}, \quad b \sim a^{-\frac{7+\sqrt{21}}{14}}. \quad (2.6.63b)$$

これより,

$$ab^{7/2} \sim \begin{cases} a^{\frac{\sqrt{21}-3}{4}}; & t \sim 0, \\ a^{-\frac{\sqrt{21}+3}{4}}; & t \rightarrow t_0 0, \end{cases} \quad (2.6.64)$$

よって, 4次元から見ると Bigbang-Bigcrunch 型.

2) $\hat{K} < 0$: このとき, $C_1 C_2 < 0$. まず, $C_1 > 0, C_2 < 0$ とすると, t のレンジは $-\infty < t < t_0$, a のレンジは $a_0 < a < \infty$. 漸近的振る舞いは, $t \sim t_0$ では $\hat{K} > 0$ と同じ. $t \sim -\infty$ では

$$a - a_0 \sim \frac{1}{(-t)^{1/6}}, \quad b \sim \frac{1}{a - a_0}^{1/6}. \quad (2.6.65)$$

これより,

$$ab^{7/2} \sim (-t)^{7/72}, \quad t \rightarrow -\infty \quad (2.6.66)$$

なので, 4次元から見ると, 単調に収縮して $t = t_0$ で crunch.

つぎに, $C_1 < 0, C_2 > 0$ のとき, t のレンジは $0 < t < \infty$ で, a のレンジは $0 < a < a_0$. $t = 0$ 近傍の振る舞いは, $\hat{K} > 0$ の場合と同じ. 一方, $t \sim \infty$ では

$$a - a_0 \sim \frac{1}{t^{1/6}}, \quad b \sim \frac{1}{a_0 - a}^{1/6}. \quad (2.6.67)$$

よって, 4次元から見たときのスケールは

$$ab^{7/2} \sim t^{7/72}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.6.68)$$

これは Townsend-Wohlfarth 解 (2003).

3) $\hat{K} = 0$: $c = k = 0$ のとき, 一般に

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} + 2\frac{\dot{a}}{a} + 7\frac{\dot{b}}{b} = 0 \quad (2.6.69)$$

より,

$$\dot{a}a^2b^7 = l^2 (= \text{const}). \quad (2.6.70)$$

また, さらに $\hat{K} = 0$ のとき,

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14} \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.6.71)$$

より,

$$b = a^{\frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14}}, \quad (2.6.72a)$$

$$\dot{a} = \frac{l^2}{a^{\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}}}. \quad (2.6.72b)$$

上の符号に対応する解は,

$$a = \left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2} l^2 t \right)^{\frac{\sqrt{21} + 1}{10}}, \quad (2.6.73a)$$

$$b^{7/2} = a^{-\frac{7 - \sqrt{21}}{4}} \propto t^{-\frac{-7 + 3\sqrt{21}}{20}}, \quad (2.6.73b)$$

$$ab^{7/2} = a^{\frac{\sqrt{21} - 3}{4}}. \quad (2.6.73c)$$

また, 下の符号に対応する解は,

$$a = \left(\frac{\sqrt{21} + 1}{2} l^2 (t_0 - t) \right)^{-\frac{\sqrt{21} - 1}{10}}, \quad (2.6.74a)$$

$$b^{7/2} = a^{-\frac{7 + \sqrt{21}}{4}} \propto (t_0 - t)^{\frac{7 + 3\sqrt{21}}{20}}, \quad (2.6.74b)$$

$$ab^{7/2} = a^{-\frac{\sqrt{21} + 3}{4}}. \quad (2.6.74c)$$

2.6.5 ブレインワールドモデル

Arkani-Hamed, Dimopoulos Devali モデル (1998)

D 次元時空が積構造 $M = X_4 \times Y_{D-4}$ をもち, 計量が

$$ds_D^2 = ds^2(X) + ds^2(Y) \quad (2.6.75)$$

で与えられるとする. このとき,

$$S_D = \frac{1}{2\kappa_D^2} \int_M d^D x \sqrt{-G} {}^D R \simeq \frac{V_Y}{2\kappa_D^2} \int_X d^4 x \sqrt{-g} {}^4 R \quad (2.6.76)$$

となる. よって, 4次元の重力定数は

$$\kappa_4^2 = \frac{\kappa_D^2}{V_Y}. \quad (2.6.77)$$

いま,

$$V_Y = L^{D-4}, \quad \kappa_D = M_D^{-(D-2)/2} \quad (2.6.78)$$

とおくと,

$$\frac{M_D}{M_4} = \left(\frac{L_{\text{pl}}}{L} \right)^{(D-4)/(D-2)} \quad (= (L_{\text{pl}}/L)^{3/4}, D = 10). \quad (2.6.79)$$

$M_4 = 10^{19} \text{GeV}$, $M_D = 1 \text{TeV}$ に対して, $D = 6$ のとき

$$L \simeq 10^{32} L_{\text{pl}} \simeq 1 \text{mm}. \quad (2.6.80)$$

このとき,

$$1/L \simeq 10^{-4} \text{eV}. \quad (2.6.81)$$

また, $D = 10$ のとき,

$$L \simeq 10^{64/3} L_{\text{pl}} \sim 10^{-12} \text{cm}. \quad (2.6.82)$$

ただし, このとき

$$1/L \sim 1 \text{GeV}. \quad (2.6.83)$$

Randall-Sundrum モデル (1999)

5次元時空の計量が

$$ds^2 = e^{2y/\ell} ds^2(X) + dy^2 \quad (2.6.84)$$

と表される。いま，我々が4次元の $y = 0$ 面上に局在するとして，5次元時空の $0 \leq y \leq y_0$ の領域を考えると，

$$S_D \simeq \frac{V_Y}{2\kappa_D^2} \int_X d^4x \sqrt{-g}^4 R, \quad (2.6.85)$$

$$V_Y = \frac{\ell}{2} e^{2y_0/\ell} \quad (2.6.86)$$

となる。よって，4次元の重力定数は

$$\frac{M_4}{M_5} \sim \left(\frac{\ell}{L_{\text{pl}}} \right)^{1/3} e^{2y_0/(3\ell)}. \quad (2.6.87)$$

したがって， $M_5 \sim 1/\ell \sim 1\text{TeV}$ としても

$$y_0/\ell \simeq 37 \quad (2.6.88)$$

と取れば， $M_4 = 10^{19}\text{GeV}$.

例えば，

$$ds^2 = dy^2 + e^{2y/\ell} dx \cdot dx \quad (2.6.89)$$

は $\Lambda = -6/\ell^2$ の AdS^5 となる。

ブラックストリング解： 計量を

$$ds_{n+1}^2 = dy^2 + W(y)^2 ds^2(X_n) \quad (2.6.90)$$

とおく。このとき， $(n+1)$ 次元における真空 Einstein 方程式

$${}^{n+1}R_{MN} = \frac{2\Lambda}{n-1} g_{MN} \quad (2.6.91)$$

は次のようになる。まず， $y = \text{const}$ 面の外部曲率は

$$K_\nu^\mu = \frac{W'}{W} \delta_\nu^\mu. \quad (2.6.92)$$

これより，

$$\begin{aligned} K' &= -K_\nu^\mu K_\mu^\nu - {}^{n+1}R_0^0 \\ \Rightarrow n \left(\frac{W'}{W} \right)' &= -n \left(\frac{W'}{W} \right)^2 - \frac{2\Lambda}{n-1}, \end{aligned} \quad (2.6.93a)$$

$$\begin{aligned} (K_\nu^\mu)' &= -{}^{n+1}R_\nu^\mu + W^{-2} R_\nu^\mu - K K_\nu^\mu \\ \Rightarrow \left(\frac{W'}{W} \right)' \delta_\nu^\mu &= W^{-2} R_\nu^\mu(X) - \left(\frac{2\Lambda}{n-1} + n \left(\frac{W'}{W} \right)^2 \right) \delta_\nu^\mu, \end{aligned} \quad (2.6.93b)$$

$$\begin{aligned} -W^{-2} R(X) + K^2 - K_\nu^\mu K_\mu^\nu &= 2 {}^{n+1}G_{nn} \\ \Rightarrow -W^{-2} R(X) + n(n-1) \left(\frac{W'}{W} \right)^2 &= -2\Lambda, \end{aligned} \quad (2.6.93c)$$

$$\nabla_\nu K_\mu^\nu - \nabla_\mu K = 0. \quad (2.6.93d)$$

最後の式は常に成り立つ．よって，

$$\frac{W''}{W} + \frac{2\Lambda}{n(n-1)} = 0, \quad (2.6.94a)$$

$$R_{\nu}^{\mu}(X) = \left[(n-1)(W')^2 + \frac{2\Lambda}{n}W^2 \right] \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (2.6.94b)$$

第2式の左辺は x のみの関数，右辺は y のみの関数．これより，

$$R_{\mu\nu}(X) = (n-1)\lambda g_{\mu\nu}(X), \quad (2.6.95a)$$

$$(W')^2 + \frac{2\Lambda}{n(n-1)}W^2 = \lambda. \quad (2.6.95b)$$

このとき，第1式は成り立つ．ただし， $\Lambda \geq 0$ のとき $\lambda \geq 0$ ．例えば， $\Lambda < 0, \lambda = 0$ のとき，

$$\left(\frac{W'}{W} \right)^2 = \frac{1}{\ell^2}; \quad \Lambda = -\frac{n(n-1)}{2\ell^2}. \quad (2.6.96)$$

すなわち， y を適当に取れば，

$$W = e^{2y/\ell}. \quad (2.6.97)$$

よって， X_n における任意の真空解 $g_{\mu\nu}(x)$ に対して一意的に $(n+1)$ 次元解が存在．特に， X_n 上のブラックホール解に対応するこの解をブラックストリング解とよぶ．

ワープしたコンパクト化 計量が

$$ds^2(M_{n+4}) = W(y)^2 ds^2(X_4) + ds^2(Y_n) \quad (2.6.98)$$

とすると，

$$R(M) = W^{-2}R(X) + R(Y) - 8\frac{\Delta_Y W}{W} - 12\frac{(D_Y W)^2}{W^2}. \quad (2.6.99)$$

これより

$$\begin{aligned} S(M) &= \frac{1}{2\kappa_{n+4}^2} \int_M d^{n+4}x \sqrt{-g(M)} R(M) \\ &= \frac{1}{2\kappa_{n+4}^2} \int d^4x \sqrt{g} (AR(X) + B). \end{aligned} \quad (2.6.100)$$

ここで，

$$A = \int_Y d^n y \sqrt{\gamma} W^2, \quad (2.6.101a)$$

$$B = \int_Y d^n y \sqrt{\gamma} (W^2 R(Y) - 4(D_Y W)^2). \quad (2.6.101b)$$

よって，

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{A}{\kappa_{n+4}^2}. \quad (2.6.102)$$

いま, 我々が $y = y_0$ の部分空間にすんでいるとして $W(y_0) = 1$ と規格化したときの $W(y)$ の最大値を W_m , Y 空間のスケールを L , $\kappa_{n+4}^2 \sim L^{n+2}$ とすると,

$$L \sim W_m L_{\text{pl}} \quad (2.6.103)$$

を得る. したがって, ワープ因子 W_m が十分大きいと, 高次元の物理を特徴づけるスケール L と 4次元の Planck スケールの間に大きな違いを生み出すことができる.

Israel の接続条件: $(n+1)$ 次元時空 $(M_{n+1}, \tilde{g}_{MN})$ 内の時間的超曲面を Σ とし, Σ に関する Gauss 正規座標系を (y, x^μ) とする:

$$d\tilde{s}^2 = dy^2 + g_{\mu\nu}(y, x) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.6.104)$$

このとき, $(n+1)$ 分解の公式より

$$\tilde{G}_\nu^\mu = G_\nu^\mu - K K_\nu^\mu + \frac{1}{2}(K^2 + K_\beta^\alpha K_\alpha^\beta) \delta_\nu^\mu - \partial_y(K_\nu^\mu - K \delta_\nu^\mu). \quad (2.6.105)$$

\tilde{T}_ν^μ が Σ 上に δ -関数的分布をもち K_ν^μ が有界, $g_{\mu\nu}$ が y に関して連続とすると, この式を y について積分して,

$$[K_\nu^\mu - K \delta_\nu^\mu] = - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy \tilde{G}_\nu^\mu = -\kappa^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy \tilde{T}_\nu^\mu = -\kappa^2 T_\nu^\mu. \quad (2.6.106)$$

よって,

$$[K_\nu^\mu] = -\kappa^2 \left(T_\nu^\mu - \frac{T}{n-1} \delta_\nu^\mu \right). \quad (2.6.107)$$

RS モデルにおける \mathbb{Z}_2 ブレインの運動: 時空

$$ds_5^2 = dy^2 + W^2 dx \cdot dx; \quad W = e^{y/\ell} \quad (2.6.108)$$

の Christoffel symbol は

$${}^5\Gamma_{y\nu}^\mu = \frac{1}{\ell} \delta_\nu^\mu, \quad {}^5\Gamma_{\mu\nu}^y = -\frac{W^2}{\ell} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.6.109)$$

この時空内の時間的超曲面 $\Sigma : t = t(\tau), y = y(\tau)$ に誘導される計量は

$$ds_4^2 = -d\tau^2 + a^2 d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.6.110)$$

$$a = W(y(\tau)), \quad (2.6.111)$$

$$W^2 \dot{t}^2 - \dot{y}^2 = 1. \quad (2.6.112)$$

この面の $\mathbf{x} = \text{const}$ 方向の未来向き単位接ベクトル u および単位法ベクトルは

$$u = (\dot{t}, \dot{y}, 0), \quad n = \mp(W^{-1}\dot{y}, W\dot{t}, 0). \quad (2.6.113)$$

Σ が \mathbb{Z}_2 対称変換の対称面とすると,

$$[K_\nu^\mu] = 2K_\nu^\mu \quad (2.6.114)$$

より, Σ 内のエネルギー-運動量テンソル T_{ν}^{μ} が空間的に一様等方として, Israel の接続条件は

$$K_{\tau}^{\tau} = \frac{\kappa_5^2}{6}(2\rho + 3P), \quad (2.6.115a)$$

$$K_j^i = -\frac{\kappa_5^2}{6}\rho\delta_j^i. \quad (2.6.115b)$$

ここで,

$$K_{\mu\nu} = {}^5\nabla_{\mu}n_{\nu} \quad (2.6.116)$$

より,

$$K_j^i = \mp \frac{a\dot{t}}{\ell}\delta_j^i. \quad (2.6.117)$$

よって,

$$\frac{a\dot{t}}{\ell} = \pm \frac{\kappa_5^2}{6}\rho. \quad (2.6.118)$$

一方,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\dot{y}^2}{\ell^2} = \frac{1}{\ell^2}(a^2\dot{t}^2 - 1). \quad (2.6.119)$$

ゆえに

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{\ell^2}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 1\right). \quad (2.6.120)$$

ここで,

$$\rho_0 = \pm \frac{6}{\kappa_5^2\ell}. \quad (2.6.121)$$

いま,

$$\rho = \pm(|\rho_0| + \rho_m) \quad (2.6.122)$$

とおくと

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_m\left(1 + \frac{\rho_m}{2|\rho_0|}\right). \quad (2.6.123)$$

ここで,

$$\kappa^2 = \frac{\kappa_5^2}{\ell}. \quad (2.6.124)$$

したがって, ブレイン上の宇宙の膨張則は, $\rho_m \gtrsim |\rho_0|$ で通常のものからずれる.

一方, Σ 上の拘束条件

$$\nabla_\nu K_\mu^\nu - \nabla_\mu K = 0 \quad (2.6.125)$$

より, T_ν^μ は Σ 上で通常のモデルと同じエネルギー方程式

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0 \quad (2.6.126)$$

に従う. 特に, 今の場合

$$\dot{\rho} = -3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.6.127)$$

よって,

$$P = \pm(-|\rho_0| + P_m) \quad (2.6.128)$$

とおくと,

$$\dot{\rho}_m = -3(\rho_m + P_m)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.6.129)$$

例えば, $P_m = \rho_m/3$ のとき, 初期特異点近傍 $a \sim 0$ で

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \frac{1}{a^8} \Rightarrow a \propto t^{1/4}. \quad (2.6.130)$$

以上の膨張方程式およびエネルギー方程式の解 $a(\tau), \rho(\tau)$ が与えられるとバルク時空中におけるブレインの運動は

$$\dot{t} = \pm a \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \dot{y} = \ell \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.6.131)$$

より決まる.

3

摂動論

§3.1

背景時空

対称性 : 背景時空は, $G = \text{SO}(n+1), \text{SO}_+(n, 1)$, ないし $\text{ISO}(n)$ (Euclidean 群) で不変で, その軌道は空間的 n 次元部分空間であるとする :

$$M^{n+m} \approx N^m \times \mathcal{H}^n \ni (z^M) = (y^a, x^i). \quad (3.1.1)$$

計量 :

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{MN} dz^M dz^N = g_{ab}(y) dy^a dy^b + r(y)^2 d\sigma_n^2. \quad (3.1.2)$$

ここで, $d\sigma_n^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ は断面曲率 K をもつ n 次元定曲率空間の計量である .

エネルギー-運動量テンソル : \bar{T}_{MN}

$$\bar{T}_{ab} = \bar{T}_{ab}(y), \quad \bar{T}_{ai} = 0, \quad \bar{T}_j^i = \bar{P}(y) \delta_j^i. \quad (3.1.3)$$

Einstein 方程式 : $\bar{G}_{MN} + \bar{\Lambda} \bar{g}_{MN} = \bar{\kappa}^2 \bar{T}_{MN}$

$$\bar{G}_{ab} + \bar{\Lambda} g_{ab} = \bar{\kappa}^2 \bar{T}_{ab}, \quad (3.1.4a)$$

$$\bar{G}_i^i = n(\bar{\kappa}^2 \bar{P} - \bar{\Lambda}). \quad (3.1.4b)$$

Notation : 共変微分

$$d\bar{s}^2 \Rightarrow \bar{\nabla}_M, \bar{\Gamma}_{NL}^M(z), \bar{R}_{MNLS}(z), \quad (3.1.5)$$

$$g_{ab}(y) dy^a dy^b \Rightarrow D_a, {}^m \Gamma_{bc}^a(y), {}^m R_{abcd}(y), \quad (3.1.6)$$

$$d\sigma_n^2 \Rightarrow \hat{D}_i, \hat{\Gamma}_{jk}^i(x), \hat{R}_{ijkl}(x) = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}). \quad (3.1.7)$$

例1 : (Robertson-Walker universe) $m = 1$ のとき, 背景時空は Robertson-Walker 宇宙

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\sigma_n^2, \quad (3.1.8)$$

をあらわし, エネルギー運動量テンソルは

$$T_{tt} = \rho, \quad T_i^t = 0, \quad T_j^i = P\delta_j^i \quad (3.1.9)$$

となる. また, Einstein 方程式は次の2式に帰着される:

$$H^2 := \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2\kappa^2}{n(n-1)}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{2}{n(n-1)}\Lambda, \quad (3.1.10a)$$

$$\dot{\rho} = -n(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.1.10b)$$

例2 : (Brane-world model) Schwarzschild ブラックホール時空は $m = 2$ の場合 ($G = \text{SO}(n+1)$) に当たる. この場合は, プレインが FRW 宇宙を表すようなプレインワールドモデルも含む.

例3 : ($m \geq 3$) このケースは, 宇宙ひも的な特異部分空間をもつ時空の摂動に対応する.

例4 : (軸対称な時空) $n = 1$ の場合は軸対称な時空と対応する.

§3.2

摂動変数とゲージ自由度

ゲージ自由度 : 時空構造や物質の配位 $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\Phi})$ を固定した背景時空 (M, g, Φ) からの摂動として記述するために, 適当な写像

$$F : \text{background } M \rightarrow \tilde{M}, \quad (3.2.1)$$

を用いて背景時空上での摂動変数を次のように定義する:

$$h := \delta g = F^* \tilde{g} - g, \quad (3.2.2a)$$

$$\phi := \delta \Phi = F^* \tilde{\Phi} - \Phi. \quad (3.2.2b)$$

異なる写像 F' を取るとこれらの摂動変数は値を変えるが, この値の変化は物理的意味を持たず, 一種のゲージ自由度と見なされる. F と F' は共に微分同相なので, 摂動変数の変化は微分同相変換 $f = F'^{-1}F$ による変数の変換と一致する. 線形摂動の枠内では, F の無限小の取り替えのみを考えればよいので, f は無限小変換 ξ^M を用いて

$$\bar{\delta} z^M = z^M(f(p)) - z^M(p) = \xi^M. \quad (3.2.3)$$

と表される．対応する摂動変数のゲージ変換は

$$\bar{\delta}h = -\mathcal{L}_\xi g, \quad (3.2.4a)$$

$$\bar{\delta}\phi = -\mathcal{L}_\xi \Phi. \quad (3.2.4b)$$

となる．

具体的な変換則 : $h_{MN} = \delta\bar{g}_{MN}$ のゲージ変換は

$$\bar{\delta}h_{ab} = -D_a\xi_b - D_b\xi_a, \quad (3.2.5a)$$

$$\bar{\delta}h_{ai} = -r^2 D_a \left(\frac{\xi_i}{r^2} \right) - \hat{D}_i \xi_a, \quad (3.2.5b)$$

$$\bar{\delta}h_{ij} = -\hat{D}_i \xi_j - \hat{D}_j \xi_i - 2r D^a r \xi_a \gamma_{ij} \quad (3.2.5c)$$

$\tau_{MN} = \delta\bar{T}_{MN}$ のゲージ変換は

$$\bar{\delta}\tau_{ab} = -\xi^c D_c \bar{T}_{ab} - \bar{T}_{ac} D_b \xi^c - \bar{T}_{bc} D_a \xi^c, \quad (3.2.6a)$$

$$\bar{\delta}\tau_{ai} = -\bar{T}_{ab} \hat{D}_i \xi^b - r^2 \bar{P} D_a (r^{-2} \xi_i), \quad (3.2.6b)$$

$$\bar{\delta}\tau_{ij} = -\xi^a D_a (r^2 \bar{P}) \gamma_{ij} - \bar{P} (\hat{D}_i \xi_j + \hat{D}_j \xi_i) \quad (3.2.6c)$$

と表される．

ゲージ自由度を取り除く2つの方法

- i) ゲージ固定法 : この方法は直接的であるが，異なるゲージ固定で得られる変数の間の関係を具体的に求めるのは一般にはやっかいである．
- ii) ゲージ不変な変数を用いる方法 : 一般に，元の摂動変数によるゲージ不変量の表式は非局所的となる．

これら2つのアプローチは数学的には同等で，ゲージ不変な変数は常にあるゲージ条件での摂動変数と見なすことができる．したがって，ゲージ不変量に対する表式が非局所的となることは，異なるゲージ固定で得られる摂動変数の間の対応が非局所的であることを意味する．

§3.3

テンソルの既約分解

計量の摂動

$$\delta\bar{g}_{MN} = h_{MN}(z). \quad (3.3.1)$$

物質の摂動

$$\delta\bar{T}_{ab} = \tau_{ab}(z), \quad \delta\bar{T}_i^a = \tau_i^a(z), \quad \delta\bar{T}_j^i = \tau_j^i(z). \quad (3.3.2)$$

テンソル型

- i) 空間的スカラー: h_{ab}, τ_{ab}
- ii) 空間的ベクトル: h_{ai}, τ_i^a
- iii) 空間的テンソル: h_{ij}, τ_j^i

ベクトルの既約分解 : \hat{D} を \mathcal{H} 上の共変微分として

$$v_i = \hat{D}_i v^{(s)} + v_i^{(t)}; \quad (3.3.3a)$$

$$\hat{D}_i v^{(t)i} = 0, \quad (3.3.3b)$$

$$\hat{\Delta} v^{(s)} = \hat{D}_i v^i. \quad (3.3.3c)$$

テンソルの既約分解 :

$$t_{ij} = \frac{1}{n} t g_{ij} + \hat{D}_i \hat{D}_j s - \frac{1}{n} \hat{\Delta} s g_{ij} + \hat{D}_i t_j + \hat{D}_j t_i + t_{ij}^{(tt)}; \quad (3.3.4a)$$

$$\hat{D}_i t^i = 0, \quad t_i^{(tt)i} = 0, \quad \hat{D}_i t_j^{(tt)i} = 0, \quad (3.3.4b)$$

$$t = t^i_i, \quad (3.3.4c)$$

$$\hat{\Delta}(\hat{\Delta} + nK)s = \frac{n}{n-1} \left(\hat{D}_i \hat{D}_j t^{ij} - \frac{1}{n} \hat{\Delta} t \right), \quad (3.3.4d)$$

$$[\hat{\Delta} + (n-1)K]t^i = (\delta_j^i - \hat{D}^i \hat{\Delta}^{-1} \hat{D}_j)(\hat{D}_m t^{jm} - n^{-1} \hat{D}^j t). \quad (3.3.4e)$$

既約タイプ :

- i) スカラー型: $v^i = \hat{D}^i v^{(s)}, t_{ij} = \frac{1}{n} t g_{ij} + \hat{D}_i \hat{D}_j s - \frac{1}{n} \hat{\Delta} s g_{ij}$.
- ii) ベクトル型: $v = v_i^{(t)}, t = \hat{D}_i t_j + \hat{D}_j t_i$.
- iii) テンソル型: $v^i = 0, t_j^i = t_j^{(tt)i}$.

今考えている K が一様等方な場合には, 計量テンソル γ_{ij} を除くと背景場にベクトル型やテンソル型の量が存在しないので, 異なる既約テンソルタイプの変数は Einstein 方程式の線形化された式において互いに相互作用しない.

§3.4

テンソル型摂動

3.4.1 Tensor Harmonics

$$(\hat{\Delta} + k^2)\mathbb{T}_{ij} = 0; \quad \mathbb{T}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j \mathbb{T}_i^j = 0. \quad (3.4.1)$$

この定義より，コンパクトな定曲率空間では

$$2D_{[i}T_{j]k}D^{[i}T^{j]k} = 2D^i(T_{jk}D^{[i}T^{j]k}) + T_{jk}(-\Delta + nK)T^{jk}, \quad (3.4.2a)$$

$$2D_{(i}T_{j)k}D^{(i}T^{j)k} = 2D^i(T_{jk}D^{(i}T^{j)k}) + T_{jk}(-\Delta - nK)T^{jk}. \quad (3.4.2b)$$

これより，

$$k^2 \geq n|K| \quad (3.4.3)$$

が得られる．例えば， $\mathcal{N}^n = S^n$ （単位球面， $K = 1$ ）のとき，

$$k^2 = \ell(\ell + n - 1) - 2, \quad (\ell = 2, 3, \dots) \quad (3.4.4)$$

3.4.2 調和テンソル展開

Tensor harmonics を用いて，計量とエネルギー運動量テンソルのテンソル型摂動は，次のように展開される：

$$h_{ab} = 0, \quad h_{ai} = 0, \quad h_{ij} = 2r^2 H_T \mathbb{T}_{ij}, \quad (3.4.5)$$

$$\tau_{ab} = 0, \quad \tau_i^a = 0, \quad \tau_j^i = \tau_T \mathbb{T}_j^i, \quad (3.4.6)$$

3.4.3 ゲージ不変量

座標変換はテンソル型の成分を持たないので，摂動変数 H_T と τ_T はそのままゲージ不変である：

$$\xi^M = \bar{\delta}z^M = 0; \quad (3.4.7a)$$

$$\bar{\delta}H_T = 0, \quad \bar{\delta}\tau_T = 0. \quad (3.4.7b)$$

3.4.4 Einstein 方程式

(i, j) -成分のみがテンソル成分を持つ：

$$-\square H_T - \frac{n}{r} Dr \cdot DH_T + \frac{k^2 + 2K}{r^2} H_T = \bar{\kappa}^2 \tau_T. \quad (3.4.8)$$

ここで， $\square = D^a D_a$ は m 次元時空 \mathcal{N} 上の D'Alembertian である．

3.4.5 RW 宇宙でのテンソル型摂動

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\sigma_n^2. \quad (3.4.9)$$

より, $r = a(t)$. $\tau_T = 0$ の場合には

$$\ddot{H}_T + n \frac{\dot{a}}{a} \dot{H}_T + \frac{k^2 + 2K}{a^2} H_T = 0. \quad (3.4.10)$$

これは

$$(a^{n/2} H_T)'' + \left[\frac{k^2 + 2K}{a^2} - \frac{n \ddot{a}}{2a} - \frac{n(n-2)}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] (a^{n/2} H_T) = 0 \quad (3.4.11)$$

と同等. また, 関係式

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + (n-2 + nw) \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] = 0; \quad w = P/\rho, \quad (3.4.12)$$

を用いると, この式は次のようにも書き換えられる.

$$(a^{n/2} H_T)'' + \left[\frac{k^2 + 2K}{a^2} + \frac{n^2 w}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{n(n-2 + nw)K}{4a^2} \right] (a^{n/2} H_T) = 0. \quad (3.4.13)$$

したがって, H_T は, $k/a, \sqrt{|K|}/a \ll \dot{a}/a$ となる superhorizon モードに対して,

$$H_T \simeq A + B \int \frac{dt}{a^n}, \quad (3.4.14)$$

subhorizon モードに対して

$$H_T \simeq a^{-(n-1)/2} (C \cos \Omega + D \sin \Omega); \quad \Omega = k \int \frac{dt}{a}. \quad (3.4.15)$$

と振る舞う.

§3.5

ベクトル型摂動

3.5.1 ベクトル型 harmonics

Harmonic vector :

$$(\hat{\Delta} + k^2) \mathbb{V}_i = 0; \quad \hat{D}_i \mathbb{V}^i = 0. \quad (3.5.1)$$

Harmonic tensor :

$$\mathbb{V}_{ij} = -\frac{1}{2k} (\hat{D}_i \mathbb{V}_j + \hat{D}_j \mathbb{V}_i); \quad (3.5.2)$$

$$\left[\hat{\Delta} + k^2 - (n+1)K \right] \mathbb{V}_{ij} = 0, \quad (3.5.3)$$

$$\mathbb{V}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j \mathbb{V}_i^j = \frac{k^2 - (n-1)K}{2k} \mathbb{V}_i. \quad (3.5.4)$$

n 次元 Einstein 空間

$$R_{ij} = (n-1)K g_{ij} \quad (3.5.5)$$

の上では,

$$2D_{[i}V_{j]}D^{[i}V^{j]} = 2D_i(V_j D^{[i}V^{j]}) + V_j[-\Delta + (n-1)K]V^j, \quad (3.5.6a)$$

$$2D_{(i}V_{j)}D^{(i}V^{j)} = 2D_i(V_j D^{(i}V^{j)}) + V_j[-\Delta - (n-1)K]V^j. \quad (3.5.6b)$$

これより, k のスペクトルは

$$k^2 \geq (n-1)|K| \quad (3.5.7)$$

となる. 特に, $\mathcal{H}^n = S^n$ に対して,

$$k^2 = \ell(\ell+n-1) - 1, \quad (\ell = 1, 2, \dots). \quad (3.5.8)$$

ただし, 次の固有値に対する調和ベクトル場 \mathbb{V}_i は Killing ベクトルと一致し, 例外的である.

$$k^2 = (n-1)K > 0 \Rightarrow \mathbb{V}_{ij} \equiv 0. \quad (3.5.9)$$

3.5.2 Harmonic expansion

計量およびエネルギー-運動量テンソルのベクトル型摂動は次のように展開される:

$$h_{ab} = 0, \quad h_{ai} = r f_a \mathbb{V}_i, \quad h_{ij} = 2r^2 H_T \mathbb{V}_{ij}, \quad (3.5.10)$$

$$\tau_{ab} = 0, \quad \tau_i^a = r \tau_a \mathbb{V}_i, \quad \tau_j^i = \tau_T \mathbb{V}_j^i. \quad (3.5.11)$$

3.5.3 ゲージ不変量

ベクトル型摂動量のゲージ変換は

$$\xi_a = 0, \quad \xi_i = r L \mathbb{V}_i; \quad (3.5.12)$$

$$\bar{\delta} f_a = -r D_a \left(\frac{L}{r} \right), \quad \bar{\delta} H_T = \frac{k}{r} L, \quad \bar{\delta} \tau_a = 0, \quad \bar{\delta} \tau_T = 0. \quad (3.5.13)$$

で与えられるので, 基本ゲージ不変量は次のようになる:

$$\text{generic modes:} \quad \tau_a, \tau_T, F_a = f_a + \frac{r}{k} D_a H_T \quad (3.5.14)$$

$$\text{exceptional modes:} \quad \tau_a, F_{ab}^{(1)} = r D_a \left(\frac{f_b}{r} \right) - r D_b \left(\frac{f_a}{r} \right) \quad (3.5.15)$$

3.5.4 Einstein 方程式

Generic modes :

$$\frac{1}{r^{n+1}} D^b \left[r^{n+2} \left\{ D_b \left(\frac{F_a}{r} \right) - D_a \left(\frac{F_b}{r} \right) \right\} \right] - \frac{k^2 - (n-1)K}{r^2} F_a = -2\bar{\kappa}^2 \tau_a, \quad (3.5.16a)$$

$$\frac{k}{r^n} D_a (r^{n-1} F^a) = -\bar{\kappa}^2 \tau_T. \quad (3.5.16b)$$

Exceptional modes : $k^2 = (n-1)K > 0$.

$$\frac{1}{r^{n+1}} D^b \left(r^{n+1} F_{ab}^{(1)} \right) = -2\bar{\kappa}^2 \tau_a. \quad (3.5.17)$$

3.5.5 RW 宇宙でのベクトル型摂動

$$(\rho + P)V = -\tau_t, \quad \sigma_g = F_t, \quad \pi_T = \tau_T, \quad (3.5.18)$$

とおくと, Einstein 方程式は

$$2\bar{\kappa}^2 a^2 (\rho + P)V = -[k^2 - (n-1)K]\sigma_g, \quad (3.5.19a)$$

$$k(a^{n-1}\sigma_g)' = \bar{\kappa}^2 a^n \pi_T. \quad (3.5.19b)$$

と表される. したがって, RW 宇宙におけるベクトル型摂動は, 非等方圧力摂動 π_T による生成が起きないときには, 常に宇宙膨張に伴って急速に減衰する.

§3.6

スカラ型摂動

3.6.1 スカラ型 Harmonics

$$(\hat{\Delta} + k^2)\mathbb{S} = 0. \quad (3.6.1)$$

Harmonic vector:

$$\mathbb{S}_i = -\frac{1}{k} \hat{D}_i \mathbb{S}, \quad (3.6.2)$$

$$[\hat{\Delta} + k^2 - (n-1)K]\mathbb{S}_i = 0, \quad (3.6.3)$$

$$\hat{D}_i \mathbb{S}^i = k\mathbb{S}. \quad (3.6.4)$$

Harmonic tensor:

$$\mathbb{S}_{ij} = \frac{1}{k^2} \hat{D}_i \hat{D}_j \mathbb{S} + \frac{1}{n} \gamma_{ij} \mathbb{S}, \quad (3.6.5)$$

$$\mathbb{S}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j \mathbb{S}_i^j = \frac{n-1}{n} \frac{k^2 - nK}{k} \mathbb{S}_i, \quad (3.6.6)$$

$$[\hat{\Delta} + k^2 - 2nK] \mathbb{S}_{ij} = 0. \quad (3.6.7)$$

\mathcal{K}^n がコンパクト Einstein 空間

$$R_{ij} = (n-1)K g_{ij}$$

のとき, Q_{ij} を

$$Q_{ij} := D_i D_j Y - \frac{1}{n} g_{ij} \Delta Y$$

とおくと,

$$Q_{ij} Q^{ij} = D^i (D^i Y D_i D_j Y - Y D_i \Delta Y - R_{ij} D^j Y) + Y [\Delta(\Delta + (n-1)K)] Y - \frac{1}{n} (\Delta Y)^2.$$

これより, k のスペクトルは

$$k^2 \geq \begin{cases} nK & K > 0 \\ 0 & K \leq 0 \end{cases} \quad (3.6.8)$$

特に, $\mathcal{K}^n = S^n$ に対しては,

$$k^2 = \ell(\ell + n - 1), \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.6.9)$$

また, $K > 0$ に対しては次の例外モードが存在する:

- i) $k = 0$: $\mathbb{S}_i \equiv 0, \mathbb{S}_{ij} \equiv 0$.
- ii) $k^2 = nK$: $\mathbb{S}_{ij} \equiv 0$.

3.6.2 Harmonic expansion

計量テンソルとエネルギー運動量テンソルに対するスカラ型摂動は次のように展開される:

$$h_{ab} = f_{ab} \mathbb{S}, \quad h_{ai} = r f_a \mathbb{S}_i, \quad h_{ij} = 2r^2 (H_L \gamma_{ij} \mathbb{S} + H_T \mathbb{S}_{ij}), \quad (3.6.10)$$

$$\tau_{ab} = \tau_{ab} \mathbb{S}, \quad \tau_i^a = r \tau_a \mathbb{S}_i, \quad \tau_j^i = \delta \bar{P} \delta_j^i \mathbb{S} + \tau_T \mathbb{S}_j^i. \quad (3.6.11)$$

3.6.3 ゲージ不変量

スカラ型摂動変数の一般モード ($k^2(k^2 - nK) > 0$) に対するゲージ変換は次のようになる：

$$\xi_a = T_a \mathbb{S}, \quad \xi_i = r L \mathbb{S}_i; \quad (3.6.12)$$

$$\bar{\delta} f_{ab} = -D_a T_b - D_b T_a, \quad (3.6.13a)$$

$$\bar{\delta} f_a = -r D_a \left(\frac{L}{r} \right) + \frac{k}{r} T_a, \quad (3.6.13b)$$

$$\bar{\delta} H_L = -\frac{k}{nr} L - \frac{D^a r}{r} T_a, \quad (3.6.13c)$$

$$\bar{\delta} H_T = \frac{k}{r} L, \quad (3.6.13d)$$

$$\bar{\delta} \tau_{ab} = -T^c D_c \bar{T}_{ab} - \bar{T}_{ac} D_b T^c - \bar{T}_{bc} D_a T^c, \quad (3.6.13e)$$

$$\bar{\delta} \tau_a = \frac{k}{r} (\bar{T}_{ab} T^b - \bar{P} T_a), \quad (3.6.13f)$$

$$\bar{\delta} (\delta \bar{P}) = -T^a D_a \bar{P}, \quad (3.6.13g)$$

$$\bar{\delta} \tau_T = 0. \quad (3.6.13h)$$

これより，

$$\bar{\delta} X_a = T_a; \quad (3.6.14)$$

$$X_a = \frac{r}{k} \left(f_a + \frac{r}{k} D_a H_T \right). \quad (3.6.15)$$

したがって，基本ゲージ不変量は， τ_T および

$$F = H_L + \frac{1}{n} H_T + \frac{1}{r} D^a r X_a, \quad (3.6.16a)$$

$$F_{ab} = f_{ab} + D_a X_b + D_b X_a, \quad (3.6.16b)$$

$$\Sigma_{ab} = \tau_{ab} + \bar{T}_b^c D_a X_c + \bar{T}_a^c D_b X_c + X^c D_c \bar{T}_{ab}, \quad (3.6.16c)$$

$$\Sigma_a = \tau_a - \frac{k}{r} (\bar{T}_a^b X_b - \bar{P} X_a), \quad (3.6.16d)$$

$$\Sigma = \delta \bar{P} + X^a D_a \bar{P}. \quad (3.6.16e)$$

で与えられる．

3.6.4 Einstein 方程式

 δG_{ab} :

$$\begin{aligned}
& -\square F_{ab} + D_a D_c F_b^c + D_b D_c F_a^c \\
& + n \frac{D^c r}{r} (-D_c F_{ab} + D_a F_{cb} + D_b F_{ca}) + {}^m R_a^c F_{cb} \\
& + {}^m R_b^c F_{ca} - 2 {}^m R_{abcd} F^{cd} + \left(\frac{k^2}{r^2} - \bar{R} + 2\bar{\Lambda} \right) F_{ab} \\
& - D_a D_b F_c^c - 2n \left(D_a D_b F + \frac{1}{r} D_a r D_b F + \frac{1}{r} D_b r D_a F \right) \\
& - \left[D_c D_d F^{cd} + \frac{2n}{r} D^c r D^d F_{cd} \right. \\
& \left. + \left(-{}^m R^{cd} + \frac{2n}{r} D^c D^d r + \frac{n(n-1)}{r^2} D^c r D^d r \right) F_{cd} \right. \\
& \left. - 2n \square F - \frac{2n(n+1)}{r} D r \cdot D F + 2(n-1) \frac{k^2 - nK}{r^2} F \right. \\
& \left. - \square F_c^c - \frac{n}{r} D r \cdot D F_c^c + \frac{k^2}{r^2} F_c^c \right] g_{ab} = 2\bar{\kappa}^2 \Sigma_{ab}, \tag{3.6.17}
\end{aligned}$$

 δG_i^a :

$$\begin{aligned}
& \frac{k}{r} \left[-\frac{1}{r^{n-2}} D_b (r^{n-2} F_a^b) + r D_a \left(\frac{1}{r} F_b^b \right) + 2(n-1) D_a F \right] \\
& = 2\bar{\kappa}^2 \Sigma_a, \tag{3.6.18}
\end{aligned}$$

Trace-free part of δG_j^i :

$$-\frac{k^2}{2r^2} [2(n-2)F + F_a^a] = \bar{\kappa}^2 \tau_T, \tag{3.6.19}$$

 δG_j^i :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} D_a D_b F^{ab} - \frac{n-1}{r} D^a r D^b F_{ab} + \left[\frac{1}{2} {}^m R^{ab} \right. \\
& \left. - \frac{(n-1)(n-2)}{2r^2} D^a r D^b r - (n-1) \frac{D^a D^b r}{r} \right] F_{ab} \\
& + \frac{1}{2} \square F_c^c + \frac{n-1}{2r} D r \cdot D F_c^c - \frac{n-1}{2n} \frac{k^2}{r^2} F_c^c \\
& + (n-1) \square F + \frac{n(n-1)}{r} D r \cdot D F \\
& - \frac{(n-1)(n-2)}{n} \frac{k^2 - nK}{r^2} F = \bar{\kappa}^2 \Sigma. \tag{3.6.20}
\end{aligned}$$

例外モード $k^2 = nK > 0$ に対しては、第3式は存在せず、またモード $k^2 = 0$ に対しては第2式と第3式が存在しない。他の方程式はそのまま成立するが、上記の変数はゲージ不変ではない。

3.6.5 エネルギー-運動量保存則

$$\delta(\bar{\nabla}_M \bar{T}_i^M) = 0:$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{n+1}} D_a (r^{n+1} \Sigma^a) - \frac{k}{r} \Sigma + \frac{n-1}{n} \frac{k^2 - nK}{kr} \tau_T \\ + \frac{k}{2r} (\bar{T}^{ab} F_{ab} - \bar{P} F_a^a) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

$$\delta(\bar{\nabla}_M \bar{T}_a^M) = 0:$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} D_b [r^n (\Sigma_a^b - \bar{T}_a^c F_c^b)] + \frac{k}{r} \Sigma_a - n \frac{D_a r}{r} \Sigma \\ + \bar{T}_a^b D_b F - \bar{P} D_a F + \frac{1}{2} (\bar{T}_a^b D_b F_c^c - \bar{T}^{bc} D_a F_{bc}) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

これらの方程式が成り立つという条件下で，Einstein 方程式の第4式は残りの式の線形結合となる．さらに，Einstein 方程式の第2式と第3式が成り立つことを要求すると，第1式のうち $m(m-1)/2$ 個の成分のみが独立となる．ただし，具体的にそれらの独立な成分を取り出すことは一般には難しい．

3.6.6 長波長極限

単純に考えると，長波長極限におけるゆらぎは，背景時空の一樣な摂動により記述されると思われる．しかし，空間的に一樣な背景時空の力学的自由度は，一般に $k \neq 0$ のゆらぎの力学的自由度より小さい．これは，長波長極限でのゆらぎと背景時空の一樣な摂動とが一對一に対応していないことを意味している．

Longitudinal gauge : この対応を見るためには，

$$f_a = 0, \quad H_T = 0, \quad (3.6.23)$$

で定義される longitudinal ゲージを用いるのが便利である．その理由は，一樣摂動，すなわち $k = 0$ の摂動モードがこの条件を満たしているからである．一樣摂動に対しては，さらに

$$\tau_a = 0 \quad (3.6.24)$$

が成り立つ．Longitudinal ゲージは， $k \neq 0$ のモードに対して，ゲージを完全に固定し，基本ゲージ不変量は摂動変数により次のように表される．

$$F = H_L, \quad F_{ab} = f_{ab}, \quad (3.6.25a)$$

$$\Sigma_{ab} = \tau_{ab}, \quad \Sigma_a = \tau_a, \quad \Sigma = \delta \bar{P}. \quad (3.6.25b)$$

これらの変数で表すと，摂動方程式 Eqs.(3.6.17)-(3.6.20) に現れる k はすべて正のべきを持つ．したがって，これらの方程式に対する任意の解の $k \rightarrow 0$ 極限は，同じ極限において Σ_a が

$$\Sigma_a = O(k) \quad (3.6.26)$$

と振る舞い，かつ他の変数が有限な極限を持つ場合には，背景時空の一様等方な摂動に対する方程式の解を与える．

微妙な点：

- 1) (3.6.18) と (3.6.19) は $k = 0$ モードに対しては存在しない．したがって， $k \rightarrow 0$ 極限は， $k = 0$ モードに対する方程式に加えて，つぎの2つの方程式を満たさねばならない．

$$-\frac{1}{r^{n-2}}D_b(r^{n-2}F_a^b) + rD_a\left(\frac{F_b^b}{r}\right) + 2(n-1)D_aF = 2r^{n-2}\zeta_a;$$

$$\zeta_a = \bar{\kappa}^2 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r\Sigma_a}{k}, \quad (3.6.27a)$$

$$2(n-2)F + F_a^a = -2r^2\bar{\kappa}^2 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tau_T}{k^2}. \quad (3.6.27b)$$

- 2) $k = 0$ モードに対して， F, F_{ab}, Σ_{ab} および Σ は個別にはゲージ不変ではなく，次のゲージ自由度を持つ：

$$\bar{\delta}F_{ab} = -D_aT_b - D_bT_a, \quad (3.6.28a)$$

$$\bar{\delta}F = -\frac{D_a r}{r}T^a, \quad (3.6.28b)$$

$$\bar{\delta}\Sigma_{ab} = -T^aD_c\bar{T}_{ab} - \bar{T}_{ac}D_bT^c - \bar{T}_{bc}D_aT^c. \quad (3.6.28c)$$

$$\bar{\delta}\Sigma = -T^aD_a\bar{P}. \quad (3.6.28d)$$

$k = 0$ 摂動モードに対するゲージ条件：以後，

$$\tau_T = 0. \quad (3.6.29)$$

を仮定する．この仮定の下で，条件 (3.6.27b) は

$$2(n-2)F + F_a^a = 0. \quad (3.6.30)$$

と表される．ゲージ変換則

$$\bar{\delta}[2(n-2)F + F_a^a] = -\frac{2}{r^{n-2}}D_a(r^{n-2}T^a), \quad (3.6.31)$$

より，条件 (3.6.30) を $k = 0$ 摂動に対するゲージ条件として課することができる．このとき，条件 (3.6.27a) は

$$-D_b(r^{n-2}F_a^b) + 2D_a(r^{n-2}F) = 2r^{n-2}\zeta_a. \quad (3.6.32)$$

と表される．

力学的自由度 : Σ_a が流体の速度などのベクトル型の独立な力学自由度に対応する場合には, (3.6.32) は単に, $k \rightarrow 0$ 極限における Σ_a の振る舞いを $k = 0$ モードの変数で表す式となる. したがって, ゲージ条件 (3.6.30) を満たす各 $k = 0$ 摂動は, $k \neq 0$ モードに対する摂動方程式の解の $k \rightarrow 0$ 極限を与える. 特に, (3.6.30) を保つ $k = 0$ 摂動に対するゲージ自由度 T^a は, $k \rightarrow 0$ 極限でのゲージ不変な力学自由度の一部と対応する. この自由度の数は $m - 1$ となる. $D_a(r^{n-1}\zeta^a)$ は有限で, Bianchi 恒等式 (ないしエネルギー-運動量保存則) より $k = 0$ モードに対する摂動変数で表されるので, $m - 1$ はちょうど ζ_a のうち $k = 0$ モードの変数で決まらない自由度の数と一致する. これに対して, 物質がスカラー場からなる場合のように, Σ_a が有限な $k \rightarrow 0$ 極限を持つ他の変数で完全に表される場合には, (3.6.32) は $k = 0$ 摂動に対する付加的な条件となる.

3.6.7 RW 宇宙でのスカラー型摂動

スカラー型摂動 :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 + 2\alpha\mathcal{S})dt^2 - 2a\beta\mathcal{S}_i dt dx^i + a^2[\gamma_{ij} + 2H_L\mathcal{S}\gamma_{ij} + 2H_T\mathcal{S}_{ij}] \\ \delta T_t^t &= -\delta\rho\mathcal{S}, \quad \delta T_i^t = (\rho + P)(v - \beta)\mathcal{S}_i, \quad \delta T_j^i = \delta P\mathcal{S}\delta_j^i + \pi_T\mathcal{S}_j^i. \end{aligned} \quad (3.6.34)$$

一般公式との対応 :

$$r = a, \quad (3.6.35a)$$

$$f_{tt} = -2\alpha, \quad f_t = -\beta, \quad (3.6.35b)$$

$$\tau_{tt} = \delta\rho + 2\alpha\rho, \quad \tau^t = -(\rho + p)(v - \beta), \quad \tau_T = \pi_T, \quad (3.6.35c)$$

$$X_t = \frac{a}{k}\sigma_g; \quad \sigma_g = -\beta + \frac{a}{k}\dot{H}_T, \quad (3.6.36a)$$

$$F = \mathcal{R} - \frac{\dot{a}}{k}\sigma_g = \Phi; \quad \mathcal{R} = H_L + \frac{1}{n}H_T, \quad (3.6.36b)$$

$$F_t^t = 2\alpha - 2\left(\frac{a}{k}\sigma_g\right)' = 2\Psi, \quad (3.6.36c)$$

$$\Sigma_{tt} = \rho\Delta_s + 2\rho\Psi, \quad (3.6.36d)$$

$$\Sigma^t = (\rho + P)\left(v - \frac{a}{k}\dot{H}_T\right) = (\rho + P)V, \quad (3.6.36e)$$

$$\Sigma = \Gamma + c_s^2\rho\Delta_s, \quad (3.6.36f)$$

ここで

$$\rho\Delta_s = \delta\rho - \frac{a}{k}\sigma_g\dot{\rho}, \quad (3.6.37)$$

$$\Gamma = \delta P - c_s^2\delta\rho. \quad (3.6.38)$$

Einstein 方程式は次のようになる.

(*tt*)-component:

$$n\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \frac{k^2 - nK}{a^2}\Phi - n\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\Psi = \frac{\kappa^2}{n-1}\rho\Delta_s. \quad (3.6.39)$$

(*ti*)-component:

$$\frac{k}{a} \left(\dot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a} \Psi \right) = -\frac{\kappa^2}{n-1} (\rho + P) V. \quad (3.6.40)$$

(*ij*)-component:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + n \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + \frac{n-2}{n} \frac{k^2 - nK}{a^2} \Phi + \left[\frac{k^2}{na^2} - (n-2) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right] \Psi \\ = \frac{\kappa^2}{n-1} (\Gamma + c_s^2 \rho \Delta_s), \end{aligned} \quad (3.6.41)$$

$$(n-2)\Phi + \Psi = -\frac{a^2}{k^2} \kappa^2 \pi_T. \quad (3.6.42)$$

(3.6.39)-(3.6.40) は Poisson 方程式を与える :

$$\frac{k^2 - nK}{a^2} \Phi = \frac{\kappa^2}{n-1} \rho \Delta. \quad (3.6.43)$$

ここで ,

$$\rho \Delta = \rho \Delta_s + n(\rho + P) \frac{\dot{a}}{k} V = \delta \rho - \frac{a}{k} \dot{\rho} (v - \beta). \quad (3.6.44)$$

これらの方程式は , 密度および速度の摂動に対する閉じた発展方程式を与える :

$$(a^n \rho \Delta) \cdot = -C_K a^{n-1} k (\rho + P) V - (n-1) C_K a^{n-1} \dot{a} \pi_T, \quad (3.6.45a)$$

$$(\rho + P)(aV) \cdot = k(c_s^2 \rho \Delta + \Gamma) + k(\rho + P)\Psi - k C_K \frac{n-1}{n} \pi_T. \quad (3.6.45b)$$

ここで , $C_K = 1 - nK/k^2$ である . また , Ψ は (3.6.42)-(3.6.44) を用いると $\rho \Delta$ により表される .

3.6.8 断熱モード

Δ の方程式 :

$$\frac{d^2}{da^2} (f a^n \rho \Delta) + \frac{1}{a^2} \left[C_K c_s^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^2 - \frac{n-2}{n-1} \frac{\kappa^2 (\rho + P)}{H^2} - a^2 \frac{f_{aa}}{f} \right] (f a^n \rho \Delta) = 0. \quad (3.6.46)$$

ここで ,

$$f = \left(\frac{H}{a^{n-3}(\rho + P)} \right)^{1/2}. \quad (3.6.47)$$

Subhorizon scale の摂動 : $c_s k/aH \gg 1, c_s k \gg K$ のとき, WKB 近似を適用して,

$$f a^n \rho \Delta \sim \left(\frac{k c_s}{a^2 H} \right)^{-1/2} \exp i \int da \frac{c_s k}{a^2 H} \quad (3.6.48)$$

より,

$$\Delta \simeq \left(\frac{1+w}{c_s a^{n+1} \rho} \right)^{1/2} (A \cos \theta + B \sin \theta); \quad (3.6.49)$$

$$\theta = k \int \frac{dt}{a} c_s. \quad (3.6.50)$$

たとえば, 物質が輻射とダストからなるとき,

- 輻射優勢時 : $w \simeq c_s^2 = 1/n, \rho \propto 1/a^{n+1} \Rightarrow \Delta$ の振幅は一定 .
- 物質優勢時 (decoupling の前) : $w, c_s^2 \propto 1/a, \rho \propto 1/a^n \Rightarrow \Delta$ の振幅 $\propto 1/a^{1/4}$.
- 物質優勢時 (decoupling の後) : $\Delta \propto a^{n-2}$.
- 曲率優勢時 : Δ は一定 .

曲率優勢時の振る舞い : $w = c_s^2 = 0, K < 0$ のもとで, 曲率優勢時には

$$H^2 \simeq -\frac{K}{a^2}, \quad f \propto a \quad (3.6.51)$$

より,

$$\frac{d^2}{da^2} (f a^n \rho \Delta) \simeq 0. \quad (3.6.52)$$

よって,

$$\Delta \simeq C_1 + \frac{C_2}{a}. \quad (3.6.53)$$

Superhorizon scale の摂動 : $|K|/(H^2 a^2) \ll 1, k \gg |K|, \pi_T = 0$ を仮定 . このとき,

$$\mathcal{A} := A - (\mathcal{R}/H) \cdot = \Psi - (\Phi/H) \cdot, \quad (3.6.54)$$

$$Z := \mathcal{R} - \frac{aH}{k} (v - B) = \Phi - \frac{aH}{k} V \quad (3.6.55)$$

とおくと, 摂動方程式より

$$\mathcal{A} = -\frac{n}{2} (1+w) Z, \quad (3.6.56)$$

$$\frac{\dot{Z}}{H} = -\frac{2c_s^2}{n(1+w)} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \Phi - \frac{\Gamma}{\rho + P} \quad (3.6.57)$$

を得る．これより， $\Gamma = O(\Delta) = O((k^2/a^2)\Phi)$ を仮定すると，

$$\frac{\dot{Z}}{H} = O\left(c_s^2 \frac{k^2}{a^2 H^2}\right) \quad (3.6.58)$$

となる．これより，superhorizon scale $c_s^2(k/aH)^2 \ll 1$ では， Z は定数となる．一方， $\Psi = -(n-2)\Phi$ と \mathcal{A} の定義より，

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{a^{n-2}} \left(\frac{a^{n-2}\Phi}{H} \right). \quad (3.6.59)$$

これを Φ について解くと，

$$\Phi = \frac{H}{a^{n-2}} \left[C + \frac{n}{2} \int dt (1+w) a^{n-2} Z \right]. \quad (3.6.60)$$

また，

$$\Delta = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \Phi, \quad V = -\frac{k}{aH} (Z - \Phi). \quad (3.6.61)$$

$$\dot{H} = -\frac{n}{2} (1+w) H^2 \quad (3.6.62)$$

を用いると，これらの表式は次のように書き換えられる：

$$\Phi \simeq C \frac{H}{a^{n-2}} + Z \left(1 - (n-2) \frac{H}{a^{n-2}} \int da \frac{a^{n-3}}{H} \right), \quad (3.6.63a)$$

$$\Delta \simeq C \frac{k^2}{nHa^n} + \frac{1}{n} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 Z \left(1 - (n-2) \frac{H}{a^{n-2}} \int da \frac{a^{n-3}}{H} \right), \quad (3.6.63b)$$

$$V \simeq C \frac{k}{a^{n-1}H} - (n-2) Z \frac{k}{a^{n-1}} \int da \frac{a^{n-3}}{H}. \quad (3.6.63c)$$

たとえば， $w = \text{一定}$ とすると，

$$\rho \propto a^{-n(1+w)} \Rightarrow H \propto a^{-n(1+w)/2} \quad (3.6.64)$$

および

$$\int da \frac{a^{n-3}}{H} = \frac{2}{n(3+w)-4} \frac{a^{n-2}}{H} \quad (3.6.65)$$

より，

$$\Phi \simeq C \frac{H}{a^{n-2}} + \frac{n(1+w)}{n(3+w)-4} Z, \quad (3.6.66a)$$

$$\Delta \simeq C \frac{k^2}{na^n H} + \frac{1+w}{n(3+w)-4} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 Z, \quad (3.6.66b)$$

$$V \simeq C \frac{k}{a^{n-1}H} - \frac{2(n-2)}{n(3+w)-4} \left(\frac{k}{aH} \right) Z \quad (3.6.66c)$$

を得る．

3.6.9 Δ_n の固有値

$K = 1$ のとき, S^n の Laplacian Δ_n は

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \frac{1}{\sin^{n-1} \chi} \frac{d}{d\chi} \left(\sin^{n-1} \chi \frac{d}{d\chi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \chi} \Delta_{n-1} \\ &= (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - nx \frac{d}{dx} + \frac{1}{1-x^2} \Delta_{n-1}.\end{aligned}\quad (3.6.67)$$

ここで, $x = \cos \chi$. したがって, 固有値方程式 $\Delta_n u = -\lambda_n u$ は

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - nx \frac{du}{dx} + \left(\lambda_n - \frac{\lambda_{n-1}}{1-x^2} \right) u = 0. \quad (3.6.68)$$

この解は,

$$u = (1-x^2)^{-\frac{n-2}{4} + \frac{\mu}{2}} \left[AF \left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}, \frac{\mu - \nu}{2}, \frac{1}{2}; x^2 \right) + Bx F \left(\frac{\nu + \mu}{2} + 1, \frac{\mu - \nu}{2} + 1, \frac{3}{2}; x^2 \right) \right]. \quad (3.6.69)$$

ここで,

$$\mu^2 = \lambda_{n-1} + \left(\frac{n-2}{2} \right)^2, \quad (3.6.70)$$

$$\lambda_n = \nu(\nu + 1) - \frac{n(n-2)}{4}. \quad (3.6.71)$$

この解に現れる超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ に対して, $\alpha + \beta - \gamma = \mu > 0$ より,

$$z \rightarrow 1: \quad F \sim \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{(1-z)^\mu}. \quad (3.6.72)$$

ここで, u のノルムは

$$\|u\|^2 = \int d\chi \sin^{n-1} \chi |u|^2 \quad (3.6.73)$$

となるので, Δ_n の自己共役性より

$$x \rightarrow \pm 1: \quad \sin^{n-1} \chi u \frac{du}{d\chi} \rightarrow 0 \Rightarrow (1-x^2)^{\frac{n-2}{4}} u \rightarrow 0. \quad (3.6.74)$$

したがって, 上記の解が固有関数となるのは, α ないし β が Γ 関数の極となっているとき. これより,

$$\nu = \mu + m: \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6.75)$$

を得る. すなわち,

$$\lambda_n = (\mu + m)(\mu + m + 1) - \frac{n(n-2)}{2} \quad (3.6.76)$$

となる. これを帰納的に解くと,

$$\lambda_n = l_n(l_n + n - 1), \quad (3.6.77a)$$

$$\mu = l_{n-1} + \frac{n-2}{2}, \quad (3.6.77b)$$

$$l_n = l_{n-1} + m: \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.6.77c)$$

を得る.

4

ブラックホール

§4.1

Einstein ブラックホール

定義 : 時空が d 次元等長変換群 G をもち, その軌道が n 次元の空間的面, 時間的面, 光的面となるとき, それぞれ $G_d(n, S)$ 型, $G_d(n, T)$ 型, $G_d(n, N)$ 型の対称性を持つという.

4.1.1 一般化された球対称時空

計量 : 計量が

$$ds^2 = g_{ab}(y)dy^a dy^b + r^2(y)d\sigma_n^2(\mathcal{K}) \quad (4.1.1)$$

と表される $D = n + 2$ 次元時空を考える. ここで

$$d\sigma_n^2(\mathcal{K}) = \gamma_{AB}(z)dz^A dz^B \quad (4.1.2)$$

は n 次元 Einstein 空間

$$R_{AB}(\mathcal{K}) = (n - 1)K\gamma_{AB} \quad (4.1.3)$$

である. $G_{n(n+1)/2}(n, S)$ 型の対称性を持つときは, 時空計量は常にこの形で表され, \mathcal{K}^n は断面曲率 K の定曲率空間となる. ただし, $n \leq 3$ のときは Einstein 空間は常に定曲率空間となる.

Einstein テンソル :

$$G_{ab} = -\frac{n}{r}D_a D_b r - \left(\frac{n(n-1)K - (Dr)^2}{2r^2} - \frac{n}{r}\square r \right) g_{ab}, \quad (4.1.4a)$$

$$G_B^A = \left[-\frac{1}{2}{}^2R - \frac{(n-1)(n-2)K - (Dr)^2}{2r^2} + \frac{n-1}{r}\square r \right] \delta_B^A \quad (4.1.4b)$$

$$\bar{G}_{aA} = 0. \quad (4.1.4c)$$

Weyl テンソル :

$$C^{ab} = \frac{n-1}{n+1} X dy^a \wedge dy^b, \quad (4.1.5a)$$

$$C^{aA} = -\frac{n-1}{n(n+1)} X dy^a \wedge dz^A, \quad (4.1.5b)$$

$$C^{AB} = \frac{2}{n(n+1)} X dz^A \wedge dz^B + \frac{1}{r^2} C^{AB}(\mathcal{K}). \quad (4.1.5c)$$

ここで,

$$X = \frac{1}{2} {}^2R + \frac{\square r}{r} + \frac{K - (Dr)^2}{r^2}. \quad (4.1.6)$$

また, $C^{AB}(\mathcal{K})$ は \mathcal{K} の Weyl 曲率形式.

4次元時空 : 特に, $D = 4$ のとき

$$+{}_{\mathcal{L}}\mathcal{E}^{ab} = \frac{X}{3} \epsilon^{ab} (-\theta^0 \wedge \theta^1 + i\theta^2 \wedge \theta^3), \quad (4.1.7a)$$

$$+{}_{\mathcal{L}}\mathcal{E}^{AB} = \frac{i}{2} \epsilon^{AB} \epsilon_{ab} +{}_{\mathcal{L}}\mathcal{E}^{ab}, \quad (4.1.7b)$$

$$+{}_{\mathcal{L}}\mathcal{E}^{aA} = -\frac{X}{6} \left(\theta^a \wedge \theta^A - \frac{i}{2} \epsilon_{ab} \epsilon_{AB} \theta^b \wedge \theta^B \right) \quad (4.1.7c)$$

より,

$$Q_{11} = \frac{X}{3}, \quad Q_{1A} = 0, \quad Q_{AB} = -\frac{X}{6} \delta_{AB}. \quad (4.1.8)$$

よって, 4次元球対称時空は常に Petrov タイプ D で

$$\Psi_2 = -\frac{X}{6}. \quad (4.1.9)$$

4.1.2 Birkhoff の定理

Einstein-Maxwell 系 : $n+2$ 次元時空での電磁場に対する作用積分は

$$S_{EM} = - \int d^{n+2}x \sqrt{|g|} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.1.10)$$

で与えられるので, そのエネルギー-運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.1.11)$$

【命題 4.1.1】 $G_{n(n+1)/2}(n, S)$ 型の対称性を持つ $n+2$ 次元時空における自由電磁場に対する電磁テンソルは次式で与えられる:

$$F = E dy^0 \wedge dy^1 + \frac{1}{2} F_{AB} dz^A \wedge dz^B; \quad (4.1.12)$$

$$E = \frac{q_e}{r^n}, \quad (4.1.13)$$

$$F_{AB} = \begin{cases} \frac{q_m}{r^2} \epsilon_{AB}; & n = 2 \\ 0; & n > 2 \end{cases} \quad (4.1.14)$$

対応するエネルギー運動量テンソルは

$$T_{ab} = -\frac{q^2}{2r^{2n}}g_{ab}, \quad T_{AB} = \frac{q^2}{2r^{2n}}g_{AB} \quad (4.1.15)$$

となる。ただし, $q^2 = q_e^2 + q_m^2$. □

Proof. $n > 2$ のとき, n 次元定曲率空間上に不変な反対称 2 階テンソル場は存在しないので, $F_{AB} = 0$. $n = 2$ の時は, $F_{AB} = B\epsilon_{AB}$. まず,

$$dF = \frac{1}{2}\partial_a(r^n B)(\epsilon_{AB}/r^n)dy^a \wedge dz^A \wedge dz^B = 0 \quad (4.1.16)$$

より,

$$B = \frac{q_m}{r^n}. \quad (4.1.17)$$

さらに, 一般に反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ に対して

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) \quad (4.1.18)$$

が成り立つことより, 残りの Maxwell 方程式は

$$\nabla_\nu F^{a\mu} = \frac{1}{r^n}\epsilon^{ab}D_b(r^n E) = 0. \quad (4.1.19)$$

よって,

$$E = \frac{q_e}{r^n}. \quad (4.1.20)$$

□

【定理 4.1.2】 真空 Einstein-Maxwell 方程式 (宇宙項 Λ) を満たし, 計量が (4.1.1) で与えられる $n + 2$ 次元時空は次のいずれかに限られる。

(1) Schwarzschild/Reissner-Nordstrom タイプ ($Dr \neq 0$):

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{N^2(r)} + r^2 d\sigma_n^2; \quad (4.1.21)$$

$$N^2(r) = K - \frac{2M}{r^{n-1}} - \frac{2\Lambda}{n(n+1)}r^2 + \frac{Q^2}{r^{2n-2}}. \quad (4.1.22)$$

(2) 成相解 ($Dr = 0$): 2次元定曲率時空 \mathcal{N}^2 と n 次元 Einstein 空間の積

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^2 \times \mathcal{K}^n. \quad (4.1.23)$$

ここで, \mathcal{N}^2 の Ricci スカラを 2R , \mathcal{K}^n の平均断面曲率を K/r^2 ($K = 0, \pm 1$) とすると, 次の関係が成り立つ:

$$\frac{K}{r^2} = \frac{2}{n(n-1)}\Lambda + \frac{Q^2}{r^{2n}}, \quad (4.1.24)$$

$${}^2R = \frac{2}{n}\Lambda - 2(n-1)^2\frac{Q^2}{r^{2n}}. \quad (4.1.25)$$

□

Proof. 真空の Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (4.1.26)$$

は

$$D_a D_b r = \left(-\frac{n-1}{2} \frac{K - (Dr)^2}{r} + \square r + \frac{n+1}{2} \lambda r + \frac{(n-1)Q^2}{2r^{2n-1}} \right) g_{ab}, \quad (4.1.27)$$

$${}^2R = -(n-1)(n-2) \frac{K - (Dr)^2}{r^2} + \frac{2(n-1)}{r} \square r + n(n+1)\lambda - n(n-1) \frac{Q^2}{r^{2n}}. \quad (4.1.28)$$

ただし,

$$\lambda := \frac{2\Lambda}{n(n+1)} \quad (4.1.29)$$

$$Q^2 = \frac{\kappa^2 q^2}{n(n-1)}. \quad (4.1.30)$$

これらは, 次の3式と同値:

$$D_a D_b r = \frac{1}{2} \square r g_{ab}, \quad (4.1.31)$$

$$\square r = (n-1) \frac{K - (Dr)^2}{r} - (n+1)\lambda r - \frac{(n-1)Q^2}{r^{2n-1}}, \quad (4.1.32)$$

$${}^2R = \frac{n}{r} \square r + 2(n+1)\lambda - 2(n-1)^2 \frac{Q^2}{r^{2n}}. \quad (4.1.33)$$

第1式より,

$$2D^b D_a D_b r = D_a \square r \Rightarrow D_a \square r = -{}^2R D_a r \quad (4.1.34)$$

となるので, 第2式の微分と第3式より

$$D_a {}^2R = (n+1) \left(-{}^2R + 2\lambda + \frac{2(2n-1)(n-1)^2 Q^2}{n+1} \frac{Q^2}{r^{2n}} \right) \frac{D_a r}{r} \\ \Rightarrow D_a [r^{n+1} ({}^2R - 2\lambda) + 2(n-1)(2n-1)Q^2 r^{1-n}] = 0. \quad (4.1.35)$$

よって,

$${}^2R = 2\lambda + 2n(n-1) \frac{M}{r^{n+1}} - 2(n-1)(2n-1) \frac{Q^2}{r^{2n}}, \quad (4.1.36)$$

$$(Dr)^2 = N^2(r) := K - \lambda r^2 - \frac{2M}{r^{n-1}} + \frac{Q^2}{r^{2n-2}}, \quad (4.1.37)$$

$$\square r = (N^2)'. \quad (4.1.38)$$

ここで, $Dr \neq 0$ とすると, 計量は

$$ds^2 = -V dt^2 + \frac{dr^2}{N^2} + r^2 d\sigma_n^2 \quad (4.1.39)$$

と表される．このとき，

$$\square r = (N^2)' + \frac{1}{2}\partial_r \ln(V/N^2) \quad (4.1.40)$$

より， V/N^2 は t のみの関数となる．よって，時間の定義を変更することにより， $V = N^2$ とできる．一方， $Dr \equiv 0$ とすると， r は定数となり

$$\frac{K}{r^2} = \frac{n+1}{n-1}\lambda + \frac{Q^2}{r^{2n}}, \quad (4.1.41)$$

$${}^2R = 2(n+1)\lambda - 2(n-1)^2 \frac{Q^2}{r^{2n}}. \quad (4.1.42)$$

□

4.1.3 Schwarzschild BH

計量

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{N^2(r)} + r^2 d\Omega_n^2; \quad (4.1.43)$$

$$N^2(r) = 1 - \frac{2M}{r^{n-1}}. \quad (4.1.44)$$

Weyl テンソル

$$\Psi_2 = \frac{n(n+1)}{12} \frac{M}{r^{n+1}}. \quad (4.1.45)$$

Future Finkelstein 座標 : (v, r) .

$$r_* = \int \frac{dr}{N^2(r)}, \quad (4.1.46)$$

$$v = t + r_* \quad (4.1.47)$$

とおくと，

$$ds^2 = 2dvdr - N^2(r)dv^2 + r^2 d\Omega_n^2 \quad (4.1.48)$$

より，時空は $r > r_H (r_H^{n-1} = 2M)$ から $r > 0$ に解析的に正則に拡張される． $\xi = \partial_t$ とおくと，

$$\xi = \partial_v \quad (4.1.49)$$

より，

$$k = -\partial_r, \quad l = \partial_v + \frac{1}{2}N^2(r)\partial_r \quad (4.1.50)$$

は， $r > r_H$ において未来向き null ベクトル：

$$\xi \cdot k = -1, \quad \xi \cdot l = -\frac{1}{2}N^2(r), \quad (4.1.51)$$

$$k \cdot k = l \cdot l = 0, \quad k \cdot l = -1. \quad (4.1.52)$$

よって， $r = r_H$ 面は $r > r_H$ の領域にとって future null 面 (future horizon) .

図 4.1: Future Finkelstein 座標

Past Finkelstein 座標 : (u, r) .

$$u = t - r_* \tag{4.1.53}$$

とおくと ,

$$ds^2 = -2dudr - N^2(r)du^2 + r^2d\Omega_n^2 \tag{4.1.54}$$

より , 時空は $r > r_H (r_H^{n-1} = 2M)$ から $r > 0$ に解析的に正則に拡張される .

$$\xi = \partial_u \tag{4.1.55}$$

より ,

$$k = \partial_r, \quad l = \partial_u - \frac{1}{2}N^2(r)\partial_r \tag{4.1.56}$$

は , $r > r_H$ において未来向きの null ベクトル :

$$\xi \cdot k = -1, \quad \xi \cdot l = -\frac{1}{2}N^2(r), \tag{4.1.57}$$

$$k \cdot k = l \cdot l = 0, \quad k \cdot l = -1. \tag{4.1.58}$$

よって , $r = r_H$ 面は $r > r_H$ の領域にとって past null 面 (past horizon) .

図 4.2: Past Finkelstein 座標

Szekeres 座標 : (U, V) . 4次元時空 ($n = 2$) において , Null 座標 (u, v) を用いると計量は

$$ds^2 = -N^2(r)dudv + r^2d\Omega_2^2. \tag{4.1.59}$$

今 , $r > r_H = 2M$ において

$$U = -2Me^{-u/4M}, \quad V = 2Me^{v/4M} \tag{4.1.60}$$

とおくと,

$$UV = -2M(r - 2M)e^{r/2M}, \tag{4.1.61}$$

$$|V/U| = e^{t/2M}. \tag{4.1.62}$$

この座標では計量は

$$ds^2 = -\frac{8M}{r}e^{-r/2M}dUdV + r^2d\Omega_2^2, \tag{4.1.63}$$

となり,

$$\frac{d(UV)}{dr} = -re^{r/2M} < 0 \tag{4.1.64}$$

より, 出発点の領域 $U < 0, V > 0$ から $r > 0$ に対応する領域 $UV < 4M^2$ に解析的に拡張される.

共形図式

$$U = 2M \tan \frac{T - R}{2}, \quad V = 2M \tan \frac{T + R}{2}; \tag{4.1.65}$$

$$|T - R| < \pi, \quad |T + R| < \pi. \tag{4.1.66}$$

とおくと,

$$dUdV = \frac{M^2}{\cos^2 \frac{T-R}{2} \cos^2 \frac{T+R}{2}} (dT^2 - dR^2). \tag{4.1.67}$$

ここで,

$$1 - \frac{UV}{4M^2} = \frac{\cos T}{\cos \frac{T-R}{2} \cos \frac{T+R}{2}} \tag{4.1.68}$$

より, $UV < 4M^2$ は $|T| < \pi/2$ に対応.

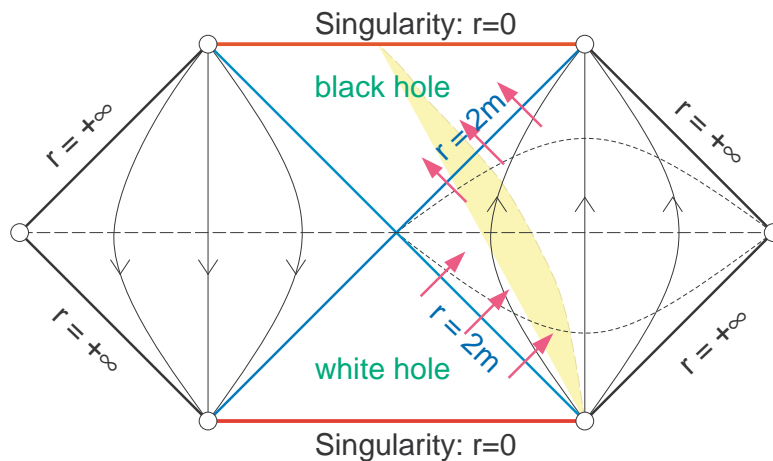


図 4.3: Szekeres 座標

4.1.4 2次元共形図式

Minkowski 時空 : 2次元 Minkowski 時空の計量

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (4.1.69)$$

は null 座標

$$u = t - x, \quad v = t + x \quad (4.1.70)$$

を用いて表すと,

$$ds^2 = -dudv. \quad (4.1.71)$$

いま,

$$u = \tan \frac{T - X}{2}, \quad v = \tan \frac{T + X}{2} \quad (4.1.72)$$

とおくと, 元の座標領域 $-\infty < u, v < \infty$ は, 有界なダイヤモンド領域

$$D_M : |T - X| < \pi, \quad |T + X| < \pi \quad (4.1.73)$$

に写され, 計量は

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{T-X}{2} \cos^2 \frac{T+X}{2}} (-dT^2 + dX^2) \quad (4.1.74)$$

と表される. 元の計量は, 測地的に完備なので, 時空をこのダイヤモンド領域の外に拡張することはできない.

無限遠 : この共形図式より, 2次元 Minkowski 時空の無限遠は次の3種類の部分から成ることが分かる:

- 空間的無限遠: i^0
- 光的無限遠: \mathcal{I}^\pm
- 時間的無限遠: i^\pm

高次元 Minkowski 時空 : 3次元以上の Minkowski 時空の計量は球座標のもとで

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_n^2 \quad (4.1.75)$$

と書かれる. この計量の2次元部分 $-dt^2 + dr^2$ は, 2次元 Minkowski 時空の計量と一致するので, 上で説明した方法で共形図式を作ることができる. ただし, 今の場合 $r \geq 0$ なので, 有界領域は D_M の半分の三角領域となる:

$$D'_M : |T - X| < \pi, \quad |T + X| < \pi, \quad X \geq 0 \quad (4.1.76)$$

計量は,

$$ds^2 = \Omega^2[-dT^2 + dX^2 + \sin^2 X d\Omega_n^2]; \quad (4.1.77)$$

$$\Omega = \frac{1}{2 \cos \frac{T-X}{2} \cos \frac{T+X}{2}}. \quad (4.1.78)$$

したがって, 光的無限遠の位相構造の違いを除いて, 無限遠の構造は2次元Minkowski時空と同じ:

- 空間的無限遠: i^0
- 光的無限遠: $\mathcal{I}^\pm \approx \mathbb{R} \times S^n$
- 時間的無限遠: i^\pm

図 4.4: Minkowski 時空の共形図式

球対称時空の2次元断面 : 計量

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{N^2(r)} \quad (4.1.79)$$

は, null 座標

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_*; \quad (4.1.80)$$

$$r_* = \int \frac{dr}{N^2(r)} \quad (4.1.81)$$

のもとで,

$$ds^2 = -N^2(r)dudv \quad (4.1.82)$$

$N^2(r)$ が1次の零点を持つ場合 : $N^2(r)$ が $r = r_H$ で零となり, $r_1 < r < r_2$ において

$$N^2(r) = (r - r_H)g(r); \quad g(r) > 0 \quad (4.1.83)$$

と表されるとする ($r_1 < r_H < r_2$). このとき, 表面重力 κ を

$$\kappa = \frac{1}{2}(N^2)'(r_H) \quad (4.1.84)$$

とおくと,

$$r_* = \frac{1}{2\kappa} \ln 2\kappa |r - r_H| + h(r) \quad (4.1.85)$$

と表される．ここで, $h(r)$ はなめらかな関数．したがって,

$$r_H < r < r_2 \quad \Leftrightarrow \quad -\infty < v - u < 2r_*(r_2). \quad (4.1.86)$$

いま, この領域において座標 (U, V) を

$$U = -\frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa u}, \quad V = \frac{1}{2\kappa} e^{\kappa v} \quad (4.1.87)$$

により導入すると,

$$UV = -\frac{1}{2\kappa} (r - r_H) e^{h(r)}, \quad |V/U| = e^{2\kappa t} \quad (4.1.88)$$

より, 対応する (U, V) の動く範囲は

$$I: U < 0, V > 0, -\frac{1}{2\kappa} (r_2 - r_H) e^{2\kappa h(r_2)} < UV < 0. \quad (4.1.89)$$

(U, V) 座標の元で, 計量は

$$ds^2 = -\frac{2g(r)}{\kappa} e^{-2\kappa h(r)} dU dV, \quad (4.1.90)$$

となり, 領域 I の境界 $U = 0$ および $V = 0$ で正則．よって,

$$\frac{d(UV)}{dr} = -\frac{1}{g(r)} e^{h(r)} \quad (4.1.91)$$

となることを考慮すると, 時空は領域 I から領域

$$D_1: -\frac{1}{2\kappa} (r_2 - r_H) e^{h(r_2)} < UV < \frac{1}{2\kappa} (r_H - r_1) e^{h(r_1)} \quad (4.1.92)$$

へ正則に解析接続される．この領域にさらに Minkowski 時空と同じ共形写像を施すと, 有界ダイヤモンド領域 D_M の $T = \pm X (UV = 0)$ を含む部分領域に写される．また, $U = 0$ と $V = 0$ では $r = r_H$ となり, それぞれ領域 I の未来および過去の horizon となる．

図 4.5: 球対称時空の 2 次元断面の共形図式

$f(r)$ が2次の零点を持つ場合 : $N^2(r)$ が $r = r_H$ で零となり, $r_1 < r < r_2$ において

$$N^2(r) = (r - r_H)^2/g(r); \quad g(r) > 0 \quad (4.1.93)$$

と表されるとする ($r_1 < r_H < r_2$) . このとき,

$$\frac{v - u}{2} = r_* = -\frac{\mu}{r - r_H} + \nu \ln |r - r_H| + h(r - r_H). \quad (4.1.94)$$

ただし, $\mu = g(r_H) > 0, \nu = g'(r_H)$ で, $h(r - r_H)$ はなめらかな関数 . いま, U を

$$\frac{1}{2}u = -\frac{\mu}{U} + \nu \ln |U| + h_1(U) \quad (4.1.95)$$

により定義する . ただし, $h_1(U)$ は $U = 0$ の近傍では $h(U)$ と一致し, $du/dU > 0$ かつ, $U \rightarrow -\infty$ で $u \rightarrow -\infty$ となる関数 (常に存在) . このとき, r は (U, v) の関数として領域 I: $U \leq 0, -\infty < v < +\infty$ を含む開領域 D_2 で正則な正值関数で, 計量は

$$ds^2 = -N_1 dU dv; \quad (4.1.96)$$

$$N_1 = 2(h'_1(U) - h'(U))N^2(r) + \frac{(r - r_H)^2}{U^2} \frac{2g(U + r_H)}{g(r)} \quad (4.1.97)$$

と表される . v を一定にして, $U \rightarrow 0$ の極限を取ると, $r \rightarrow r_H$ かつ $(r - r_H)/U \rightarrow -1$ となるので, $N_1(U, v)$ は D_2 で正則な正值関数となる . したがって, 時空は $v =$ 一定曲線に沿って領域 I から $r = r_H$ を越えて解析接続される . $r = r_H(U = 0)$ は領域 I の未来の horizon となる .

注 : ホライズンでの表面重力 κ が零でないとき, 領域 I でホライズンに近づく $t =$ 一定曲線の長さは有限となり, 端点はホライズンの交点となる . これに対して, $\kappa = 0$ の場合は, この曲線の長さは無限となる . したがって, この場合の上の議論で u と v の役割を変え, $u =$ 一定曲線に沿って過去向きに $r = r_H$ を越えた解析接続が存在するが, この過去のホライズンと未来のホライズンは交叉できない .

4.1.5 ホライズンと特異点

Killing ホライズン : 前節で見たように, 真空ないし電磁場のみの存在する球対称時空の計量を静的時間 (Killing 時間) を用いて表した (4.1.21) 式に現れる $N^2(r) = -g_{tt}(r)$ の零点 $r = r_H$ は, 時空の特異点でなく, 座標系の取り方により生じた見かけの特異点である . このことは, Weyl テンソル (4.1.5) が $r > 0$ でなめらかな関数

$$X = n(n+1)\frac{M}{r^{n+1}} - n(2n-1)\frac{Q^2}{r^{2n}} \quad (4.1.98)$$

に比例していることから分かる .

関数 $N^2(r)$ は, 計量 (4.1.21) の Killing ベクトル $\xi = \partial_t$ のノルム (の2乗) となっている :

$$N^2(r) = -\xi \cdot \xi. \quad (4.1.99)$$

$r = r_H$ 面は, $N^2(r_H) = 0$ より, ちょうど Killing ベクトルが接する光的面で, かつその光的接ベクトル (null geodesic generator) と Killing ベクトルが平行となっている. このような光的面は, 一般に Killing ホライズンと呼ばれる. ただし, Killing ホライズン上で, ξ は一般に生成光的測地線のアフィンパラメーターに関する接ベクトルとはなっていない. 実際, Killing 方程式より,

$$\nabla_\xi \xi_\mu = -\xi_\nu \nabla_\mu \xi^\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu N^2 = \frac{1}{2} (N^2)'(r) \nabla_\mu r \quad (4.1.100)$$

となり,

$$(\nabla r)^2 = N^2(r) \quad (4.1.101)$$

より $r = r_H$ で $\nabla r \parallel \xi$ となるが, 一般に $\nabla_\mu r \neq 0, (N^2)'(r) \neq 0$ である. 例えば, (v, r) 座標では,

$$\xi = \partial_v, \quad \nabla r = \partial_v + N^2(r) \partial_r \quad (4.1.102)$$

より, $r = r_H$ で $\xi = \nabla r$ となる. 同様に, (u, r) 座標では $\xi = -\nabla r$ となる. したがって, Killing ホライズン上では

$$\nabla_\xi \xi = \pm \kappa \xi \quad (4.1.103)$$

となる. ここで, $\kappa = \frac{1}{2} (N^2)'(r_H)$ は表面重力強度である. いま, Killing ホライズンの生成光的測地線のアフィンパラメータを $\lambda = \lambda(\tau) (\xi^\mu \partial_\mu \tau = 1)$, λ に関する接ベクトルを k とおくと, $\xi = \dot{\lambda} k$ および $\nabla_k k = 0$ より $\kappa \neq 0$ のとき

$$\ddot{\lambda} / \dot{\lambda} = \pm \kappa \Rightarrow \lambda = a e^{\pm \kappa \tau} + b \quad (4.1.104)$$

を得る. $\pm \kappa > 0 (< 0)$ のとき, $\tau \rightarrow \infty (-\infty)$ で $\lambda \rightarrow \pm \infty$ となるが, $\tau \rightarrow -\infty (\infty)$ では λ は有限な値に収束する. これは, Killing ホライズンが測地的に完備でないためではなく, Killing ホライズンが交叉する2つの面からなり, Killing ベクトル ξ がその交わりでゼロとなることによる. 実際, Szekeres 型の座標 (U, V) を用いると ξ は

$$\xi = \kappa (V \partial_V - U \partial_U) \quad (4.1.105)$$

となり, Killing ベクトルは $U = V = 0$ でゼロとなる. このように, 交叉する Killing ホライズンは分岐型ホライズンと呼ばれる. これに対して, extrem Reissner-Nordstrom ブラックホールのホライズンのように $\kappa = 0$ となる Killing ホライズンは分岐せず, 退化型ホライズンと呼ばれる.

大域的雙曲性 : Σ を時空領域 D 内の非因果的超曲面とする. D の任意の点を通る任意の因果的曲線が十分延長すれば必ず Σ と交わるとき, Σ は D の Cauchy 面といわれる. また, Cauchy 面が存在する時空領域は大域的に雙曲的であるといわれる. 任意の時空 M において, 任意の非因果的超曲面 Σ に対してそれを Cauchy 面とする最大の領域が $D(\Sigma)$ が存在する. この時空領域は Σ の Cauchy 発展領域といわれる. Cauchy 発展領域は, 雙曲型偏微分方程式の解が Σ 上での初期データにより一意的に定まる最大領域である (解が存在するとは限らない).

Cauchy ホライズン : 時空 M において, 非因果的超曲面 Σ の Cauchy 発展領域 $D(\Sigma)$ が M と一致しないとき, $D(\Sigma)$ は境界をもつ. この境界は Σ の Cauchy ホライズンと呼ばれ, $H(\Sigma)$ と表される. 時空が大域的に双曲型でないときには, どのように Σ をとつても常に Cauchy ホライズンが存在する. 特に, 漸近的に平坦なブラックホール時空では, \mathcal{I}^\pm の近傍を含む極大な大域的な双曲型領域の境界を Cauchy ホライズンと呼ぶことが多い. 負の質量をもつ Schwarzschild 時空や Reissner-Nordstrom 時空は Cauchy ホライズンをもつ. これらの例から分かるように, Cauchy ホライズンの存在は (局所的) 裸の特異点の存在と結びついている.

4.1.6 静的球対称時空での粒子の運動

時空計量

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{N^2(r)} + r^2 d\Omega_n^2. \quad (4.1.106)$$

エネルギー保存 計量が時間推進の Killing ベクトル $\xi = \partial_t$ をもつことより, 自由粒子に対して

$$E := -u \cdot \xi = -u_t = N^2 \dot{t} \quad (4.1.107)$$

は保存される.

等方座標系 ρ 座標を

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{rN(r)} \quad (4.1.108)$$

により定義すると, 静的球対称計量は

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h(\rho)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_n^2) \quad (4.1.109)$$

と書き直される. ここで,

$$h(\rho) = \frac{r}{\rho}. \quad (4.1.110)$$

この ρ を用いて, 空間座標 X^I を

$$X^I = \rho \Omega_n^I \quad (4.1.111)$$

により導入すると, 計量は

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h(\rho)^2 d\mathbf{X}^2 \quad (4.1.112)$$

と表される.

例えば, Schwarzschild 計量に対しては, $2GM = 1$ となる単位系を取ると

$$N(r)^2 = 1 - \frac{1}{r^{n-1}} \quad (4.1.113)$$

となるので, ρ と r の関係は

$$\rho^{n-1} = \frac{1 + \sqrt{1 - N^2}}{1 - \sqrt{1 - N^2}}, \quad (4.1.114a)$$

$$r = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho^{n-1} + 1}{2} \right)^{\frac{2}{n-1}} \quad (4.1.114b)$$

となる. 特に, ホライズン $r = 1$ は $\rho = 1$ に対応する. また, 計量は

$$ds^2 = - \left(\frac{\rho^{n-1} - 1}{\rho^{n-1} + 1} \right)^2 dt^2 + \left(\frac{\rho^{n-1} + 1}{2\rho^{n-1}} \right)^{\frac{4}{n-1}} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_n^2) \quad (4.1.115)$$

となる. この計量は,

$$X = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{n-1}} \rho \Omega \quad (4.1.116)$$

とおくと,

$$ds^2 = - \left(\frac{\rho^{n-1} - 1}{\rho^{n-1} + 1} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{1}{\rho^{n-1}} \right)^{\frac{4}{n-1}} d\mathbf{X}^2. \quad (4.1.117)$$

角運動量保存 $\rho = |\mathbf{X}|$ なので, この計量は空間回転

$$X'^I = R^I{}_J X^J; \quad R \in \text{SO}(n+1) \quad (4.1.118)$$

あるいはその無限小変換

$$\delta X^I = \epsilon_{IJ} X^J, \quad \delta t = 0; \quad \epsilon_{JI} = -\epsilon_{IJ} \quad (4.1.119)$$

に対して不変である. したがって,

$$\eta_{IJ} := X^I \frac{\partial}{\partial X^J} \quad (4.1.120)$$

は空間回転を生成する Killing ベクトルとなり, 対応して

$$L_{IJ} := u \cdot \eta_{IJ} = X^I u_J - X^J u_I = h^2 (X^I \dot{X}^J - X^J \dot{X}^I) = r^2 (\Omega^I \dot{\Omega}^J - \Omega^J \dot{\Omega}^I) \quad (4.1.121)$$

は自由粒子に対する保存量となる. これより, 特に,

$$L^2 := \frac{1}{2} \sum_{I,J} L_{IJ}^2 = \rho^2 (\dot{X})^2 - (X \cdot \dot{X})^2 = r^4 |\dot{\Omega}|^2 \quad (4.1.122)$$

は保存される.

さらに, ある時刻 $\tau = 0$ では,

$$X_I(0) = \dot{X}_I(0) = 0, \quad I = 3, \dots, n+1 \quad (4.1.123)$$

となるよう X 座標を取ることが常にできる. このとき, $L_{JI} = 0$ ($I = 3, \dots, n+1$) ことと, 一般に

$$L^2 X^I = \left((X \cdot \dot{X}) X^J - \rho^2 \dot{X}^J \right) L_{JI} \quad (4.1.124)$$

が成り立つことより, X^I ($I = 3, \dots, n+1$) は常にゼロとなる. すなわち, 運動は, 2次元面 (X^1, X^2) にとどまる ($L = 0$ のときは直線運動).

運動方程式

保存則より，運動方程式は次の1階方程式系に置き換えられる：

$$-N^2\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{N^2} + r^2\dot{\phi}^2 = -\epsilon \quad (\epsilon = 0, 1), \quad (4.1.125a)$$

$$f\dot{t} = E, \quad (4.1.125b)$$

$$r^2\dot{\phi} = L. \quad (4.1.125c)$$

これらより，

$$\dot{r}^2 + V(r) = E^2; \quad (4.1.126)$$

$$V(r) := N^2 \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2} \right). \quad (4.1.127)$$

また，

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} (E^2 - V)^{-1/2}. \quad (4.1.128)$$

Schwarzschild 時空での運動

光子の運動 光子の運動方程式は $\epsilon = 0$ とおくことにより得られる．特に，有効ポテンシャルは

$$V = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{r^{n-1}} \right). \quad (4.1.129)$$

この導関数

$$V' = L^2 \frac{n+1 - 2r^{n-1}}{r^{n+2}} \quad (4.1.130)$$

となるので， V は $r > 1$ で最大点を一個だけもち，極小点は存在しない．したがって，安定な拘束軌道は存在せず，不安定な円軌道が1個だけ存在する．その半径とエネルギーは

$$r = \left(\frac{n+1}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (n = 2 : r = \frac{3}{2}r_H = 3M), \quad (4.1.131a)$$

$$E^2 = \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{2}{n-1}} L^2. \quad (4.1.131b)$$

正質量粒子の運動 正質量粒子に対しては， $\epsilon = 1$ より

$$V = \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{1}{r^{n-1}} \right), \quad (4.1.132a)$$

$$V' = -\frac{2L^2}{r^3} + \frac{n-1}{r^n} + \frac{(n+1)L^2}{r^{n+2}}. \quad (4.1.132b)$$

特に，

$$V(1) = 0, \quad V'(1) > 0. \quad (4.1.133)$$

V の振る舞いは， n に依存する．

$n = 2$: $D = 4$ のとき,

$$V' = \frac{r^2 - 2L^2r + 3L^2}{r^4} \quad (4.1.134)$$

より,

- $L^2 \leq 3$ のとき: V は単調増加で拘束軌道は全く存在しない.
- $L^2 > 3$ のとき: V は極大点を 1 個, 極小点を 1 個もつ:

極小点 安定な円軌道と対応し, その半径とエネルギーは

$$r = L(L + \sqrt{L^2 - 3}) \geq 3, \quad (4.1.135a)$$

$$E^2 = 1 - \frac{L\sqrt{L^2 - 3} + L^2 - 2}{L(L + \sqrt{L^2 - 3})^3}. \quad (4.1.135b)$$

極大点 不安定な円軌道に対応し, その半径とエネルギーは

$$r = L(L - \sqrt{L^2 - 3}) \leq 3, \quad (4.1.136a)$$

$$E^2 = 1 + \frac{(L + \sqrt{L^2 - 3})(L^2 - 6 + L\sqrt{L^2 - 3})}{27L}. \quad (4.1.136b)$$

$n = 3$:

$$V' = -\frac{2(L^2 - 1)}{r^3} + \frac{4L^2}{r^5} \quad (4.1.137)$$

より

- $L^2 \leq 1$ のとき: V は単調増加で拘束軌道は全く存在しない.
- $L^2 > 1$ のとき: V は極大点を 1 個もち極小点は存在しない. したがって, 不安定円軌道のみが拘束軌道として存在:

$$r^2 = \frac{2L^2}{L^2 - 1} > 2, \quad (4.1.138a)$$

$$E^2 = 1 + \frac{(L^2 - 1)^2}{4L^2} \geq 1. \quad (4.1.138b)$$

$n \geq 4$:

$$V' = \frac{-2L^2r^{n-1} + (n-1)r^2 + (n+1)L^2}{r^{n+2}}. \quad (4.1.139)$$

V は常に最大点を 1 個持ち, 極小点は存在しない. したがって, 拘束軌道としては, 不安定円軌道が 1 個存在するのみ.

§4.2

Hodge 双対

【定義 4.2.1 (微分形式の内積)】 2つの1形式の内積 $\langle \omega, \chi \rangle = g^{ab} \omega_a \chi_b$ を用いて, 1形式の系 $\omega^1, \dots, \omega^p, \chi^1, \dots, \chi^p$ から作られる2つの p 形式 $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p, \chi^1 \wedge \dots \wedge \chi^p$ の内積を

$$\langle \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p, \chi^1 \wedge \dots \wedge \chi^p \rangle = \det \langle \omega^j, \chi^k \rangle$$

で定義する. これより, 一般の p 形式 $\omega = (1/p!) \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \chi = (1/p!) \chi_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$, の内積が誘導される.

$$\langle \omega, \chi \rangle = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \chi^{\mu_1 \dots \mu_p}.$$

□

【定義 4.2.2 (Hodge 双対)】 対応

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \mapsto *(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(n-p)!} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-p}}^{\mu_1 \dots \mu_p}$$

により, p 形式の空間 A^p から $(n-p)$ 形式の空間 A^{n-p} への線形写像が定義される. この写像を Hodge 双対と呼ぶ. 一般の p 形式 ω に対して Hodge 双対は

$$(*\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}}^{\nu_1 \dots \nu_p} \omega_{\nu_1 \dots \nu_p}$$

と表される. また, Ω を体積形式とすると, $*\omega$ は, 任意の p 形式 χ に対して

$$*\omega \wedge \chi = \langle \omega, \chi \rangle \Omega$$

が成り立つ $(n-p)$ 形式として特徴づけられる. □

【命題 4.2.3】 $\omega, \chi \in A^p, |\eta| = \det(\eta_{ab})$ とするとき, Hodge 双対に対して次の諸公式が成り立つ:

- i) $*1 = \Omega, *\Omega = |\eta|.$
- ii) $\omega \wedge *\chi = \chi \wedge *\omega.$
- iii) $* *\omega = (-1)^{p(n-p)} |\eta| \omega.$
- iv) $\langle *\omega, *\chi \rangle = |\eta| \langle \omega, \chi \rangle.$
- v) $(*d*\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} = |\eta| (-1)^{np+1} \nabla_{\nu} \omega^{\nu}_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}}.$

□

【定義 4.2.4】 ベクトル X に対して, p 形式の空間から $(p-1)$ 形式の空間への線形写像を

$$(I_X \omega)(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$$

により定義し, I_X を内積作用素と呼ぶ. □

【命題 4.2.5】 内積作用素に関して次の公式が成り立つ .

- i) $*I_X * \omega = (-1)^{pn} |\eta| X_* \wedge \omega \iff I_X * \omega = (-1)^{n-p-1} *(X_* \wedge \omega).$
- ii) $(*I_X * I_Y + (-1)^n I_Y * I_X) \omega = |\eta| (-1)^{(p+1)n} g(X, Y) \omega.$
- iii) $\mathcal{L}_X = dI_X + I_X d.$
- iv) $[\mathcal{L}_X, I_Y] = I_{[X, Y]}.$

□

§4.3

定常軸対称時空

【定義 4.3.1】 時空 (M, g) が可換な 2 次元等長変換群 G_2 をもち, G_2 を生成する 2 つの Killing ベクトル ξ, η がある領域でそれぞれ時間的および空間的となり, かつ η の軌道が閉じた閉曲線となり, かつ η がゼロとなる点 (対称軸) が存在するとき, 時空は定常軸対称であるという . □

【定理 4.3.2 (Frobenius)】

- i) n 次元多様体の r 個の 1 次独立なベクトル場 X_1, \dots, X_r が各点で接する r 次元部分多様体の $n - r$ 次元族が存在する, すなわち各点の近傍で $X_I y^p = 0 (I = 1, \dots, r)$ となる $n - r$ 個の独立な関数系 $y^p (p = r + 1, \dots, n)$ が存在するための必要十分条件は, 適当な関数の組 $f_{JK}^I(x)$ に対して

$$[X_I, X_J] = f_{IJ}^K X_K \quad (I, J, K = 1, \dots, r)$$

が成り立つことである .

- ii) n 次元多様体上の $n - r$ 個の 1 次独立な 1 形式 $\omega^P (P = r + 1, \dots, n)$ に対して, $\omega^P = \Lambda_Q^P df^P$ となる関数の組 $\Lambda_Q^P(x)$ および $f^P(x)$ が存在するための必要十分条件は, $(n - r)^2$ 個の 1 形式 Ω_Q^P が存在して

$$d\omega^P = \Omega_Q^P \wedge \omega^Q$$

が成り立つことである .

□

【命題 4.3.3】 4次元 Riemann 空間(時空)において, 2つの1次独立なベクトル場 ξ, η に直交する曲面族が存在するための必要十分条件は,

$$\xi \wedge \eta \wedge d\xi = 0, \xi \wedge \eta \wedge d\eta = 0$$

で与えられる. 特に, ξ, η が可換な Killing ベクトルでいずれかが不動点をもつ時, この条件は

$$\xi^d R_{d[a\xi_b\eta_c]} = 0, \eta^d R_{d[a\xi_b\eta_c]} = 0$$

と表される. □

Proof. ξ, η に直交する曲面族が存在するための必要十分条件は, 適当な関数 f, g, p, q, r, s が存在して, $\xi = pdf + qdg, \eta = rdf + sdg$ と表されることである. これは, Frobenius の定理より, 適当な1形式 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が存在して,

$$d\xi = \alpha \wedge \xi + \beta \wedge \eta, d\eta = \gamma \wedge \xi + \delta \wedge \eta$$

と表されることと同値で, さらにこの条件は題意の条件と同等である. 特に, ξ, η が Killing ベクトルの時, $\Delta\xi_\mu = -R_\mu^\nu \xi^\nu$ および $\mathcal{L}_\eta \xi = 0$ より,

$$\begin{aligned} d*(\eta \wedge \xi \wedge d\xi) &= -dI_\eta *(\xi \wedge d\xi) = I_\eta d*(\xi \wedge d\xi) - \mathcal{L}_\eta *(\xi \wedge d\xi) \\ &= I_\eta I_\xi d(*d\xi) = -I_\eta I_\xi *\Delta\xi = -dx^\mu \epsilon_\mu^{\nu\lambda\sigma} \eta_\nu \xi_\lambda R_{\sigma\alpha} \xi^\alpha. \end{aligned}$$

同様にして,

$$d*(\xi \wedge \eta \wedge d\eta) = -dx^\mu \epsilon_\mu^{\nu\lambda\sigma} \xi_\nu \eta_\lambda R_{\sigma\alpha} \eta^\alpha.$$

よって, 命題の前半の条件が満たされれば後半の条件が満たされる. 逆に, 後半の条件が満たされれば, $*(\eta \wedge \xi \wedge d\xi), *(\xi \wedge \eta \wedge d\eta)$ は共に定数となるが, ξ ないし η が零点をもつとその値はゼロとなり, 前半の条件が得られる. □

【命題 4.3.4】

i) 自由な電磁場に対する Maxwell 方程式は, 複素電磁テンソル

$$\mathcal{F} = F + i *F$$

をもちいて

$$d\mathcal{F} = 0$$

と表される. また, 電磁場のエネルギー運動量テンソルは

$$T_{ab} = \frac{1}{8\pi} \mathcal{F}_a^c \bar{\mathcal{F}}_{bc}.$$

ii) 定常軸対称時空において, 複素電磁テンソルは

$$\mathcal{L}_\xi \Phi = 0, \mathcal{L}_\eta \Phi = 0$$

を満たす複素ポテンシャル Φ を用いて,

$$\sqrt{G} \mathcal{F} = e^{-2U} [d\Phi \wedge \xi + i*(d\Phi \wedge \xi)]$$

と表される. ただし, $e^{2U} = -g(\xi, \xi)$.

□

Proof. 前半は明らか .

$$0 = \mathcal{L}_\xi \mathcal{F} = dI_\xi \mathcal{F} + I_\xi d\mathcal{F} = dI_\xi \mathcal{F}$$

より , 適当な複素関数 Φ が存在して

$$\sqrt{G} I_\xi \mathcal{F} = d\Phi$$

と書ける . このとき , $I_\xi^2 = 0$ より , $I_\xi d\Phi = \mathcal{L}_\xi \Phi = 0$. また , $0 = \mathcal{L}_\eta d\Phi = d\mathcal{L}_\eta \Phi$ および η がゼロ点を持つことより , $\mathcal{L}_\eta \Phi = 0$. 次に , 恒等式

$$*I_\xi *I_\xi \mathcal{F} + I_\xi *I_\xi * \mathcal{F} = -g(\xi, \xi) \mathcal{F} = e^{2U} \mathcal{F}$$

と $*\mathcal{F} = -i\mathcal{F}$ より

$$\sqrt{G} e^{2U} \mathcal{F} = *I_\xi *d\Phi + i * (*I_\xi *d\Phi).$$

ここで , $*I_\xi *d\Phi = d\Phi \wedge \xi$ を用いると題意の式を得る .

□

【命題 4.3.5】 軸対称定常な Einstein-Maxwell 系の時空計量は

$$ds^2 = e^{-2U} [e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + W^2 d\phi^2] - e^{2U} (dt + Ad\phi)^2 \quad (4.3.1)$$

と表される . ただし , U, k, W, A は ρ と z のみの関数である . また , 複素電磁テンソル \mathcal{F} は ρ と z のみに依存する複素ポテンシャル Φ を用いて ,

$$\sqrt{G} \mathcal{F} = e^{-2U} [d\Phi \wedge \xi + i *(d\Phi \wedge \xi)]$$

と表される . ただし ,

$$\xi = -e^{2U} (dt + Ad\phi), \quad \eta = e^{-2U} W^2 d\phi + A\xi$$

である .

□

Proof. ξ, η に直交する 2次元曲面の一つを Σ とし , Σ の座標を ρ, z とする . この座標を ξ, η に沿って一定という条件で時空全体に広げる . さらに ,

$$\Sigma \rightarrow \Sigma_{t,\phi} = \exp(t\xi + \phi\eta)\Sigma$$

により t, ϕ 座標を定義すると , 時空計量は

$$ds^2 = g_{\rho\rho} d\rho^2 + 2g_{\rho z} d\rho dz + g_{zz} dz^2 + e^{-2U} W^2 d\phi^2 - e^{2U} (dt + Ad\phi)^2 \quad (4.3.2)$$

と表される . 2次元空間は共形的に平坦なので , ρ, z 座標を適当にとると , 題意の表式が得られる .

□

(注) 2次元空間の共形的平坦性: Laplace 方程式 $\Delta\phi = 0$ の解に対して, $d*d\phi = 0$ より $*d\phi = d\psi$ となる ψ が存在. さらに $d\phi \cdot d\psi = 0, d\phi \cdot d\phi = d\psi \cdot d\psi$. よって, $ds^2 = e^{2k}(d\phi^2 + d\psi^2)$.

(注) Laplace 方程式の解の局所的存在: 小さなコンパクト領域 D において, 汎関数

$$N[\phi] := \int_D d^n x (\nabla\phi)^2; \quad \phi|_{\partial D} = f; \text{fixed} \tag{4.3.3}$$

を考えると, $N[\phi]$ が $\inf_{\phi} N[\phi]$ に収束する $N[\phi]$ -Cauchy 列が存在することが直ちに言える. この列はさらに $H^2(D)$ である ϕ_0 に収束し, $N[\phi_0] = \inf_{\phi} N[\phi]$ となることが言える. さらに, ϕ_0 が超関数の意味で $\Delta\phi_0 = 0$ を満たすことも確かめられる. ただし, $\phi_0 \in C^2(D)$ となることを示すのは難しい.

§4.4

静的軸対称ブラックホール

4.4.1 静的時空

【命題 4.4.1】 ベクトル場 ξ^μ が超曲面族に垂直となるための必要十分条件は,

$$\xi \wedge d\xi = 0$$

が成り立つことである. □

Proof. ベクトル場 ξ^μ が超曲面の族 $f = \text{一定}$ に垂直となる条件は, $\xi_\mu = k\partial_\mu f$ と表されるので, 1形式 $\xi = \xi_\mu dx^\mu$ は

$$\xi \wedge d\xi = 0 \tag{4.4.1}$$

を満たす. 逆に, ξ がこの条件を満たすとき, $\xi = 0$ となる部分多様体を除いた領域では, ξ を含む適当な 1形式の基底を用いて $d\xi$ を表すことにより, $d\xi = \chi \wedge \xi$ となる 1形式 χ が存在することが分かる. したがって, Frobenius の定理より, $\xi = kdf$ となる関数の組 k, f が存在する. □

【定義 4.4.2】 4次元時空におけるベクトル場 ξ に対して,

$$\omega := *(\xi \wedge d\xi) = -I_\xi *d\xi$$

すなわち,

$$\omega^\mu := \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \xi_\nu \nabla_\lambda \xi_\sigma$$

で定義されるベクトル場 ω^μ ないし対応する 1形式を ξ の回転という. 特に, 回転がゼロとなる時間的 Killing ベクトルが存在する時空は静的であるという. □

4.4.2 Weyl クラス

定常軸対称時空の計量 4.3.1 において, $\xi = -e^U(dt + Ad\phi)$ に対して

$$\xi \wedge d\xi = -e^{2U} dt \wedge d\phi \wedge dA \quad (4.4.2)$$

となる. よって, 時空が静的である条件は $A = \text{定数}$ となる. このとき, $t + A\phi \rightarrow t$ と置き換えることにより, $A = 0$ としてよいので, 静的軸対称時空の計量は

$$ds^2 = e^{-2U} [e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + W^2 d\phi^2] - e^{2U} dt^2 \quad (4.4.3)$$

と表される.

この計量に $(3+1)$ 分解の公式を適用すると, $N = e^U$ として $K_{ij} = 0$ より

$$\tilde{R}_t^t = -\frac{1}{N} \Delta N = -W^{-1} e^{2(U-k)} \partial \cdot (W \partial U), \quad (4.4.4)$$

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N = R_{ij} - e^{-U} \nabla_i \nabla_j e^U \quad (4.4.5)$$

を得る. ここで, ∂ は (ρ, z) 平面における自然な平坦接続である. 3次元計量にさらに $(2+1)$ 分解を施すと,

$$R_\phi^\phi = -W^{-1} e^U \Delta_2 (W e^{-U}) = -W^{-1} e^{3U-2k} \partial^2 (W e^{-U}) \quad (4.4.6)$$

を得る. よって

$$e^{-U} \nabla_\phi^2 e^U = -\Gamma_{\phi\phi}^a \partial_a U = e^{-2k} W (\partial W - W \partial U) \cdot \partial U \quad (4.4.7)$$

を考慮すると,

$$\tilde{R}_{\phi\phi} = W e^{-2k} (-\partial^2 W + \partial \cdot (W \partial U)) \quad (4.4.8)$$

を得る. したがって, 真空の Einstein 方程式 $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$ が成り立つと,

$$\partial^2 W = 0, \quad (4.4.9)$$

$$\partial \cdot (W \partial U) = 0 \quad (4.4.10)$$

が成り立つ. このうち, 第1式は $W = \rho$ となるように ρ を取れることを保証している. そこで, 以下 $W = \rho$ とする.

同様にして, $a, b = \rho, z$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ab} = & \rho^{-1} \partial_a \rho \partial_b k + \rho^{-1} \partial_b \rho \partial_a k - 2 \partial_a U \partial_b U \\ & + \left[\frac{1}{2} {}^2 R e^{2(k-U)} - \rho^{-1} \partial \rho \cdot \partial (k-U) \right] \delta_{ab} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

を得る. ただし, ${}^2 R$ は

$${}^2 R = -2e^{2(U-k)} \partial^2 (k-U) \quad (4.4.12)$$

で与えられる．これより，対応する Einstein 方程式は

$$\partial_z k = 2\rho\partial_\rho U\partial_z U, \quad (4.4.13)$$

$$\partial_\rho k = \rho [(\partial_\rho U)^2 - (\partial_z U)^2], \quad (4.4.14)$$

$$\partial^2 k + (\partial U)^2 = 0 \quad (4.4.15)$$

と表される．ここで，第3の方程式は， $\partial \cdot (\rho\partial U) = 0$ のもとで，残り2つより導かれる．以上より，次の定理を得る．

【定理 4.4.3 (Weyl)】 4次元真空 Einstein 方程式に対する静的軸対称解は，2次元空間 (ρ, z) における Laplace 方程式

$$\partial_\rho(\rho\partial_\rho U) + \rho\partial_z^2 U = 0 \quad (4.4.16)$$

の解 $U(\rho, z)$ を用いて

$$ds^2 = e^{-2U} [e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - e^{2U} dt^2 \quad (4.4.17)$$

と表される．ただし， $k(\rho, z)$ は1階方程式

$$\partial_z k = 2\rho\partial_\rho U\partial_z U, \quad (4.4.18)$$

$$\partial_\rho k = \rho [(\partial_\rho U)^2 - (\partial_z U)^2] \quad (4.4.19)$$

の解である． □

一般解 : 極座標

$$\rho = \Sigma \sin \vartheta, \quad z = \Sigma \cos \vartheta \quad (4.4.20)$$

を用いると，漸近的に平坦な一般解は

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Sigma^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta), \quad (4.4.21)$$

$$k = - \sum_{l,m=0}^{\infty} a_l a_m \frac{(l+1)(m+1)}{l+m+2} \frac{P_l P_m - P_{l+1} P_{m+1}}{\Sigma^{l+m+2}}. \quad (4.4.22)$$

4.4.3 Schwarzschild 計量

Weyl 座標表示 : (ρ, z) 座標のもとで，Schwarzschild 解は

$$U = \frac{1}{2} \ln \frac{\Sigma_+ + \Sigma_- - 2m}{\Sigma_+ + \Sigma_- + 2m} = -\frac{1}{2} \ln \frac{m - z + \Sigma_-}{-m - z + \Sigma_+}, \quad (4.4.23)$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{(\Sigma_+ + \Sigma_-)^2 - 4m^2}{4\Sigma_+ \Sigma_-}, \quad (4.4.24)$$

$$\Sigma_{\pm} = [\rho^2 + (z \pm m)^2]^{1/2} \quad (4.4.25)$$

で与えられる．通常の Schwarzschild 座標は， ρ, z と

$$\rho = \sqrt{r(r-2m)} \sin \theta, \quad z = (r-m) \cos \theta \quad (4.4.26)$$

の関係にある．したがって， U, k の特異点集合： $\rho = 0, |z| \leq m$ はちょうどホライズン $r = 2m$ に対応する．

偏球座標表示 : Weyl 座標の代わりに

$$\rho = m\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}, \quad z = mxy \quad (4.4.27)$$

により定義される偏球座標を用いると,

$$\Sigma_{\pm} = |x \pm y| \quad (4.4.28)$$

より, Schwarzschild 解に対する Weyl ポテンシャルは

$$U = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}, \quad (4.4.29)$$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \quad (4.4.30)$$

とずっと簡単な表式で表される. 実際,

$$d\rho^2 + dz^2 = m^2(x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right). \quad (4.4.31)$$

に注意すると, U の方程式は

$$\partial_x((x^2 - 1)\partial_x U) + \partial_y((1 - y^2)\partial_y U) = 0, \quad (4.4.32)$$

k の方程式は

$$k_x = (1 - y^2) \frac{x[(x^2 - 1)u_x^2 - (1 - y^2)u_y^2] - 2y(x^2 - 1)u_x u_y}{x^2 - y^2}, \quad (4.4.33a)$$

$$k_y = (x^2 - 1) \frac{-y[(x^2 - 1)u_x^2 - (1 - y^2)u_y^2] - 2x(1 - y^2)u_x u_y}{x^2 - y^2}, \quad (4.4.33b)$$

となり, 上記の U と k がこれらの方程式の解であることは容易に確かめられる. ただし,

$$x = \frac{r - m}{m}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - y^2} \quad (4.4.34)$$

より, この座標系では, ホライズンは線分 $x = 1, |y| \leq 1$ に, ホライズンの外の z 軸は $x \geq 1, y = \pm 1$ に対応する.

4.4.4 Israel-Kahn 解

Weyl 解は同次線形の Laplace 方程式の解で決定されるので, 2 つの解の重ね合わせが可能となる. 特に, z 軸上に中心をもつ Schwarzschild ブラックホールの列に対応する解は, Israel-Kahn 解 (1964) と呼ばれる. ただし, この解は, ブラックホールをつなぐ z 軸上で conic singularity をもつ.

2つの Schwarzschild BH の重ね合わせ : z 軸上の $z = 0$ に中心をもつ質量 m のブラックホールと $z = z_0$ に中心をもつ質量 m' のブラックホールを重ね合わせて得られる Israel-Kahn 解では, ホライズン $-m < z < m, -m' + z_0 < z < m' + z_0$ の外の z 軸上での k の値は有限となり

$$k = \begin{cases} 0 & ; z < -m, z > z_0 + m' \\ \ln \frac{z_0^2 - (m+m')^2}{z_0^2 - (m-m')^2} & ; m < z < z_0 - m' \end{cases} \quad (4.4.35)$$

で与えられる. $m < z < z_0 - m'$ では, $k < 0$ なので, z 軸の周りの角度 $e^{-k}\phi$ は一周で $2\pi e^{-k} > 2\pi$ 変化することになる.

4.4.5 Zipoy-Voorhees 解

計量

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} \left[e^{2k}(x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + \rho^2 d\phi^2 \right]; \quad (4.4.36)$$

$$e^{2U} = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta, \quad (4.4.37a)$$

$$e^{2k} = m^2 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right)^{\delta^2}, \quad (4.4.37b)$$

$$\rho^2 = m^2(x^2 - 1)(1 - y^2). \quad (4.4.37c)$$

この計量は, $\delta = 0$ のとき Minkowski 時空を, $\delta = 1$ のとき正質量 Schwarzschild BH を, $\delta = -1$ のとき負質量 Schwarzschild BH を表す. また, $\delta = 2$ の解は, 等質量 $m/2$ の 2BH に対応する Israel-Kahn 解において 2 つの BH の中心が一致した極限に当たる.

Weyl テンソル 基底

$$\theta^0 = e^U dt, \theta^1 = e^{-U} \rho d\phi, \theta^2 = e^{k-U} d\rho, \theta^3 = e^{k-U} dz \quad (4.4.38)$$

に関して,

$$\Psi_2 = \frac{\delta(x-\delta)(x^2 - y^2)^{\delta^2-1}}{(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}}, \quad (4.4.39a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 + \Psi_4 = & \frac{\delta(x^2 - y^2)^{\delta^2-3}}{(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}} \left[3(x-1)(x^2 - y^2)(2x^2y^2 - x^2 - y^2) \right. \\ & + (\delta-1) \{ (-8(\delta+1)x^3 + 6x^2 + 6(\delta+1)x - 3) y^4 \\ & \left. + (-6x^3 + 10(\delta+1)x^2 - 6(\delta+1)) xy^2 + 3x^4 - 2(\delta+1)x^3 \} \right], \quad (4.4.39b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(\Psi_0 - \Psi_4) = & -\frac{2\delta\rho y(x^2 - y^2)^{\delta^2-3}}{(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}} \left[3x(x-1)(x^2 - y^2) \right. \\ & \left. + (\delta-1) \{ (-4(\delta+1)x^2 + 3x + \delta+1) y^2 - 3x^3 + 3(\delta+1)x^2 \} \right]. \quad (4.4.39c) \end{aligned}$$

基底によらない不変量 ($+C_{0I0J}$ の固有値) は,

$$-2\Psi_2, \quad \Psi_2 \pm \sqrt{\Psi_0\Psi_4}. \quad (4.4.40)$$

特に,

$$9\Psi_2^2 - \Psi_0\Psi_4 = \frac{\delta^2(\delta^2 - 1)(x^2 - y^2)^{2\delta^2 - 3}(y^2 - 1)(3x^2 - 3\delta x + \delta^2 - 1)}{[(x - 1)^{\delta^2 - \delta + 1}(x + 1)^{\delta^2 + \delta + 1}]^2}. \quad (4.4.41)$$

この量がゼロとなることと Petrov 型 D となることは同等.

この曲率の式より, Weyl 解は $\delta \neq 0, 1$ のとき $x = 1, y^2 < 1$ ($\rho = 0, |z| < m$) に裸の曲率特異点をもつことがわかる.

4.4.6 C-metric

4次元計量

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x - y)^2} \left[H(y)dt^2 - \frac{dy^2}{H(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + G(x)d\phi^2 \right]; \quad (4.4.42)$$

$$H(y) = \nu - Ky^2 - 2MAy^3, \quad (4.4.43)$$

$$G(x) = 1 - Kx^2 - 2MAx^3, \quad (4.4.44)$$

は, 宇宙項

$$\Lambda = -3A^2(1 - \nu) \quad (4.4.45)$$

をもつ Einstein 方程式に対する, Petrov 型 D の静的軸対称真空解となる.

特に, $\nu = 1$ のとき,

$$\rho = \frac{\sqrt{-H(y)G(x)}}{A^2(x - y)^2}, \quad z = \frac{xy[K + MA(x + y)]}{A^2(x + y)} \quad (4.4.46)$$

と定義すると, 計量は Weyl 形式で表され, ポテンシャルは

$$e^{2U} = -\frac{H(y)}{A^2(x - y)^2}, \quad (4.4.47)$$

$$e^{2k} = -\frac{H(y)}{A^4(x - y)^4(G\rho_x^2 - H\rho_y^2)} \quad (4.4.48)$$

で与えられる. これらが, Weyl 解に対する方程式を満たすことは直接代入することにより確かめられる.

幾何学的意味 : $M = 0$ のとき, 変換

$$r = \frac{\sqrt{y^2 - \nu x^2}}{A(x - y)}, \quad \rho = \sqrt{\frac{1 - Kx^2}{y^2 - \nu x^2}} \quad (4.4.49)$$

により, C 計量は

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2/\ell^2 + \nu} + r^2 \left[-(K - \nu\rho^2)dt^2 + \frac{d\rho^2}{K - \nu\rho^2} + \rho^2 d\phi^2 \right] \quad (4.4.50)$$

と表される. ここで,

$$\ell^2 = \frac{1}{A^2(1 - \nu)} \quad (4.4.51)$$

である.

特に, $\nu = 1, K = 1$ のとき, $\rho = \sin\theta$ とおいて, (r, θ, ϕ) に対応するデカルト座標 (x, y, z) を導入すると, 計量は

$$ds^2 = -z^2 dt^2 + dz^2 + dx^2 + dy^2 \quad (4.4.52)$$

となる. これは, Minkowski 計量の Rindler 座標での表示である. 実際,

$$T = z \sinh t, \quad Z = z \cosh t, \quad X = x, \quad Y = y, \quad (4.4.53)$$

とおくと, 計量は

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2 \quad (4.4.54)$$

と表される.

一方, $\nu = 1, M \neq 0$ に対して,

$$r = -\frac{1}{Ay}, \quad \bar{t} = \frac{t}{A} \quad (4.4.55)$$

を一定に保って, $A \rightarrow 0$ の極限を取ると, C 計量は質量 M の Schwarzschild ブラックホール解に収束する. これらのことより, C 計量は, 等加速度運動するブラックホール解を表すと解釈できる.

Horizons : 以下, $\nu = 1, K = 1$ の場合 ($H(x) = G(x)$) を考える. $\mu = MA$ とおくと, $0 < \mu \ll 1$ のとき, $G(x)$ は3つの零点 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$ をもち, $x_1 \simeq 1/(2\mu)$, $x_2 \simeq -1 - \mu$, $x_3 \simeq 1 - \mu$ となる. したがって, $M = 0$ の場合の平坦領域に対応する漸近的平坦な領域は

$$D_1 : x_2 < x < x_3, \quad x_1 < y < x_2 \quad (4.4.56)$$

に対応する. この四角形の4辺のうち, $x = x_2$ と $x = x_3$ は z 軸 (回転対称の軸) に対応する. また, 残りの2辺は Killing ホライズンを与える. それらのうち, $y = x_2$ は平坦な場合の Rindler ホライズン ($y = -1$) に対応するので, 加速ホライズンと呼ばれる. これに対して, $y = x_1$ は, $A \rightarrow 0$ で $r = 2M$ と対応するのでブラックホールホライズンを表す.

Conic singularity : 無限遠 $y = x$ に到達する z 軸 $x = x_2$ の近傍で, $x = x_2 + G'(x_2)\rho^2/4$ とおくと, x, ϕ の計量は

$$\frac{dx^2}{G(x)} + G(x)d\phi^2 \simeq d\rho^2 + \frac{G'(x_2)^2}{4}\rho^2 d\phi^2 \quad (4.4.57)$$

となるので, 軸上で計量が正則とすると, 2π の周期をもつ角度座標 ϕ_2 は

$$\phi_2 = G'(x_2)\phi/2 \simeq (1 - 2\mu)\phi \quad (4.4.58)$$

となる. ところが, 同様にして, 加速ホライズンと交わる z 軸の周りの正則な角度座標 ϕ_3 は

$$\phi_3 = |G'(x_3)|\phi/2 \simeq (1 + 4\mu)\phi_2 \quad (4.4.59)$$

で与えられるので, 計量が無限遠で大域的に漸近的平坦とすると, この軸上で計量は余剰角 $\simeq 8\mu\pi$ の円錐型特異性を持つことになる (正のテンションをもつひもでないし棒).

4.4.7 String 計量

静的円筒対称解

$U = U(\rho)$ と仮定すると, Weyl 方程式より

$$U = a \ln \rho + \text{const}, \quad (4.4.60a)$$

$$k = a^2 \ln \rho + \text{const} \quad (4.4.60b)$$

を得る. 対応する時空計量は

$$ds^2 = -\rho^{2a} dt^2 + C^2 \rho^{2a(a-1)} dz^2 + C^2 \rho^{2a(a-1)} d\rho^2 + \rho^{2(1-a)} d\phi^2. \quad (4.4.61)$$

Weyl 曲率は

$$C^{0\phi}{}_{0\phi} = \frac{a(a-1)}{C^2} \rho^{-2(a^2-a+1)}, \quad (4.4.62a)$$

$$[C^{0\rho}{}_{0\rho}, C^{0z}{}_{0z}] = a(a-1)\rho^{-2(a^2-a+1)}[a-1, -a], \quad (4.4.62b)$$

$$C^{\rho z}{}_{\rho z} = \frac{a(a-1)}{C^2} \rho^{-2(a^2-a+1)}, \quad (4.4.62c)$$

$$[C^{\phi\rho}{}_{\phi\rho}, C^{\phi z}{}_{\phi z}] = \frac{a(a-1)}{6} \rho^{-2(a^2-a+1)}[1-6a, 6a-5]. \quad (4.4.62d)$$

よって, $a \neq 0, 1$ のとき $\rho = 0$ は曲率特異. ただし, $a = 0, 1$ の時は, 平坦. また, 計量は常に, 漸近的に平坦!

いま,

$$x = \frac{C}{a^2 - a + 1} \rho^{a^2 - a + 1}, \quad y \propto \phi \quad (4.4.63)$$

とおくと,

$$ds^2 = -x^{2\alpha} dt^2 + dx^2 + x^{2\beta} dy^2 + x^{2\gamma} dz^2. \quad (4.4.64)$$

(Kasner 型計量) . ここで,

$$\alpha = \frac{a}{a^2 - a + 1}, \quad \beta = \frac{1 - a}{a^2 - a + 1}, \quad \gamma = \frac{a^2 - a}{a^2 - a + 1}. \quad (4.4.65)$$

これらの係数は次の関係式を満たす:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (4.4.66a)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (4.4.66b)$$

特に,

$$-1 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1 \quad (4.4.67)$$

で, いずれかが 1 となるとき ($a = 0, 1, \infty$) 他の値はゼロで, 計量は平坦.

例えば, $a = 1$ のとき,

$$\tilde{x} = x \cosh t, \quad \tilde{t} = x \sinh t \quad (4.4.68)$$

とおくと,

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.4.69)$$

また, $a \neq 0, 1$ のとき,

$$\tilde{t} = x^\alpha t, \quad \tilde{y} = x^\beta y, \quad \tilde{z} = x^\gamma z \quad (4.4.70)$$

とおくと,

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + dx^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 - 2 \left(-\frac{\alpha t d\tilde{t}}{x^{1-\alpha}} + \frac{\beta y d\tilde{y}}{x^{1-\beta}} + \frac{\gamma z d\tilde{z}}{x^{1-\gamma}} \right) dx \\ + \left(-\frac{\alpha^2 t^2}{x^{2(1-\alpha)}} + \frac{\beta^2 y^2}{x^{2(1-\beta)}} + \frac{\gamma^2 z^2}{x^{2(1-\gamma)}} \right) dx^2 \quad (4.4.71)$$

となり, 漸近的に平坦な形に書かれる.

string 解の物理的解釈

円筒座標で表された計量

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + A^2 (dz + \beta_z dt)^2 + d\rho^2 + B^2 \rho^2 (d\phi + \gamma_t dt + \gamma_z dz)^2 \quad (4.4.72)$$

に対して, $t = \text{const}$ 面のスカラ曲率は

$${}^3R = {}^2R - 2\partial_\rho k - k^2 - k_B^A k_A^B. \quad (4.4.73)$$

ここで, 2R は $t = \text{const}, \rho = \text{const}$ 円筒面のスカラ曲率で

$${}^2R = -\frac{2}{AB} \left[\left(\frac{B_z - (B\gamma_z)_\phi}{A} \right)_z + \frac{1}{\rho^2} \left(\left(\frac{A_\phi}{B} + \frac{\gamma_z}{A} (-B_z + (B\gamma_z)_\phi) \right)_\phi \right) \right]. \quad (4.4.74)$$

また, k_{AB} は同じ面の $t = \text{const}$ 超曲面ないでの外部曲率で

$$(k_B^A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial_\rho A}{A} & \frac{\rho B}{2A} \partial_\rho \gamma_z \\ \frac{\rho B}{2A} \partial_\rho \gamma_z & \frac{\partial_\rho(\rho B)}{\rho B} \end{pmatrix}. \quad (4.4.75)$$

これより,

$$k = \frac{1}{\rho} + \frac{\partial_\rho A}{A} + \frac{\partial_\rho B}{B}, \quad (4.4.76a)$$

$$k_B^A k_A^B = \frac{1}{\rho^2} + \frac{2\partial_\rho B}{\rho B} + \left(\frac{\partial_\rho A}{A} \right)^2 + \left(\frac{\partial_\rho B}{B} \right)^2 + \frac{\rho^2 B^2}{2A^2} (\partial_\rho \gamma_z)^2. \quad (4.4.76b)$$

Hamiltonian 拘束条件は

$$2G_{00} \equiv {}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 2\kappa^2 T_{00} \quad (4.4.77)$$

よって, $K_j^i K_i^j, \partial_\rho \gamma_z, A, B, \partial_\rho A$ が $\rho = 0$ 近傍で一様有界, ${}^2R = O(1/\rho)$ とすると,

$$\begin{aligned} \rho B^3 R &= -2\partial_\rho \left(\frac{\rho B}{A} \partial_\rho A \right) + 2\frac{\rho B}{A^2} (\partial_\rho A)^2 - 2\partial_\rho (\rho \partial_\rho B + B) \\ &\quad + \rho B^2 R - \frac{\rho^3 B}{2A^2} (\partial_\rho \gamma_z)^2 \end{aligned} \quad (4.4.78)$$

より

$$2\kappa^2 \int_0^\rho B \rho d\rho T_{00} = -2(B + \rho \partial_\rho B - 1) + O(\rho) \quad (4.4.79)$$

よって,

$$T_{00} = \mu \delta^2(*) \quad (4.4.80)$$

となる極限で,

$$\delta\phi := 2\pi(1 - B) = \kappa^2 \mu. \quad (4.4.81)$$

z 軸上で正則となる条件 Einstein 方程式より

$$R_0^0 \equiv -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K + K_j^i K_i^j - \frac{\Delta N}{N} = \frac{\kappa^2}{2} (T_0^0 - T_I^I) \quad (4.4.82)$$

よって, z 軸で正則となるためには, $T_0^0 - T_I^I$ が有界であることが必要.

軸対称定常ブラックホール

4.5.1 Ernst 形式

Ernst ポテンシャル : Einstein-Maxwell 系において, 時間的 Killing ベクトル ξ の回転を ω とする: $\omega = -I_\xi *d\xi$. このとき, p 形式に対して

$$I_X * \omega = (-1)^{p+1} *(X \wedge \omega), \quad I_X \omega = *(X \wedge * \omega) \quad (4.5.1)$$

が成り立つこと, および Killing ベクトル ξ に対して,

$$(*d*d\xi)_\mu = -\nabla_\nu(\nabla^\nu \xi_\mu - \nabla_\mu \xi^\nu) = -2\Delta \xi_\mu = 2R_\mu^\nu \xi_\nu \quad (4.5.2)$$

が成り立つことより,

$$\begin{aligned} d\omega &= I_\xi d*d\xi - \mathcal{L}_\xi *d\xi = I_\xi d*d\xi \\ &= *(\xi \wedge *d*d\xi) = 2*(\xi \wedge (R\xi)) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

となる. ここで, Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} = G\mathcal{F}_{\mu\lambda}\mathcal{F}_\nu{}^\lambda \quad (4.5.4)$$

より

$$\begin{aligned} R\xi &= Gdx^\mu \mathcal{F}_{\mu\lambda}\mathcal{F}_\nu{}^\lambda \xi^\nu = \sqrt{G}dx^\mu \mathcal{F}_{\mu\lambda}(d\bar{\Phi})^\lambda \\ &= -\sqrt{G}I_{d\bar{\Phi}}\mathcal{F} = -e^{-2U}I_{d\bar{\Phi}}[d\bar{\Phi} \wedge \xi + i*(d\bar{\Phi} \wedge \xi)] \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} d\omega &= -2ie^{-2U}*(\xi \wedge I_{d\bar{\Phi}}*(d\bar{\Phi} \wedge \xi)) \\ &= 2ie^{-2U}*(\xi \wedge *(d\bar{\Phi} \wedge d\bar{\Phi} \wedge \xi)) \\ &= 2ie^{-2U}I_\xi(d\bar{\Phi} \wedge d\bar{\Phi} \wedge \xi) = -2id\bar{\Phi} \wedge d\bar{\Phi} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

を得る. したがって,

$$d(\omega + 2i\bar{\Phi}d\bar{\Phi}) = 0 \quad (4.5.7)$$

が成り立つ. よって,

$$d\mathcal{E} = d(e^{2U}) + i\omega - 2\bar{\Phi}d\bar{\Phi} \quad (4.5.8)$$

となる関数 \mathcal{E} が存在する. この関数は, Ernst ポテンシャルと呼ばれる.

【定理 4.5.1】 真空 Einstein-Maxwell 系が $\xi = \partial_t$ で不変であるとき, 時空計量は, t に依存しない関数 $U(y)$, 3次元ベクトル場 $A_i(y)$, 3次元計量 $\gamma_{ij}(y)$ を用いて

$$ds^2 = -e^{2U}(dt + A_i dy^i)^2 + e^{-2U}\gamma_{ij}dy^i dy^j, \quad (4.5.9)$$

複素電磁テンソル \mathcal{F} は, t に依存しない複素電磁ポテンシャル $\Phi(y)$ を用いて,

$$\sqrt{G}\mathcal{F} = e^{-2U}[d\Phi \wedge \xi_* + i*(d\Phi \wedge \xi_*)] \quad (4.5.10)$$

と表される ($\xi_* = \xi_\mu dx^\mu = -e^{2U}(dt + A_i dy^i)$). Einstein 方程式および Maxwell 方程式は, Ernst ポテンシャル

$$d\mathcal{E} = \Gamma - 2\bar{\Phi}d\Phi; \Gamma = d(e^{2U}) + i\omega \quad (4.5.11)$$

および複素電磁ポテンシャル Φ を計量 $\gamma_{ij}(y)$ をもつ 3 次元空間 Σ 上の関数と見なすとき, 次の連立方程式で与えられる.

$$\Delta_3 \mathcal{E} = e^{-2U} \gamma(\Gamma, d\mathcal{E}), \quad (4.5.12)$$

$$\Delta_3 \Phi = e^{-2U} \gamma(\Gamma, d\Phi), \quad (4.5.13)$$

$${}^3R_{ij} = \frac{1}{2}e^{-4U} \Gamma_{(i} \bar{\Gamma}_{j)} - 2e^{-2U} \partial_{(i} \Phi \partial_{j)} \bar{\Phi}. \quad (4.5.14)$$

$A_i(y)$ は, $A = A_i dy^i$ とおくとき, U および ω から Σ 上の次の方程式の解として決まる:

$$dA = e^{-4U} {}^3_* \omega. \quad (4.5.15)$$

ただし, ${}^3_* \omega$ は (Σ, γ) における ω の Hodge 双対 2 形式である. \square

【定理 4.5.2 (Neugebauer-Kramer(1969))】 真空 Einstein-Maxwell 系に対する定常解 $(\mathcal{E}, \Phi, \gamma_{ij})$ に対して, 次の変換の組み合わせにより得られる新たな組 $(\mathcal{E}', \Phi', \gamma_{ij})$ は再び定常解を与える:

- i) $\mathcal{E}' = |\alpha|^2 \mathcal{E}, \Phi' = \alpha \Phi$
- ii) $\mathcal{E}' = \mathcal{E} + ib, \Phi' = \Phi$
- iii) $\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{1+ic\mathcal{E}}, \Phi' = \frac{\Phi}{1+ic\mathcal{E}}$
- iv) $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - 2\bar{\beta}\Phi - |\beta|^2, \Phi' = \Phi + \beta$
- v) $\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{1-2\bar{\mu}\Phi-|\mu|^2\mathcal{E}}, \Phi' = \frac{\Phi+\mu\mathcal{E}}{1-2\bar{\mu}\Phi-|\mu|^2\mathcal{E}}$

ここで, α, β, μ は複素定数, b, c は実定数である. \square

Proof. $(\mathcal{E}, \Phi, \gamma_{ij})$ に対する方程式は, 作用積分

$$S = \int_{\Sigma} d^3y \sqrt{\gamma} \left[{}^3R - \frac{1}{2}e^{-4U} \gamma^{ij} (\partial_i \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \partial_i \Phi) (\partial_j \bar{\mathcal{E}} + 2\Phi \partial_j \bar{\Phi}) + 2e^{-2U} \gamma^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \bar{\Phi} \right] \quad (4.5.16)$$

に対する変分方程式となっている. ところが, i)-v) の変換はこの作用積分を不変にしている. \square

【定理 4.5.3 (Kinnersley(1973))】 (\mathcal{E}, Φ) 系に対する方程式は, Killing vector が光的でないとき, $SU(2, 1)$ 変換群に対して不変である. \square

Proof. 変数

$$(Y^\mu) = (u, v, w)$$

に対するノルムを

$$|Y|^2 \equiv \bar{Y} \cdot Y := \bar{u}u + \bar{v}v - \bar{w}w$$

により定義する. このとき, Lagrangian 密度

$$L = \sqrt{\gamma} \left[{}^3R + \frac{2\gamma^{ab}}{|Y|^4} (\bar{Y}^\mu Y_{\mu,a} Y^\nu \bar{Y}_{\nu,b} - |Y|^2 \bar{Y}^\mu{}_{,a} Y_{\mu,b}) \right]$$

は, 任意の $SU(2, 1)$ 変換

$$Y' = UY; \quad U \in SU(2, 1)$$

に対して不変となっている. ところが,

$$\mathcal{E} = \frac{u-w}{u+w}, \quad \Phi = \frac{v}{u+w} \tag{4.5.17}$$

とおくと, 上記の Lagrangian 密度は (\mathcal{E}, Φ) 系に対する Lagrangian 密度と一致する. \square

(注) Neugebauer-Kramer 変換との対応: Neugebauer-Kramer 変換の無限小変換は

$$\xi_1 := i(\partial_{\mathcal{E}} - \partial_{\bar{\mathcal{E}}}), \tag{4.5.18a}$$

$$\xi_2 := -i(\mathcal{E}^2 \partial_{\mathcal{E}} + \Phi \mathcal{E} \partial_{\Phi} - cc), \tag{4.5.18b}$$

$$\xi_3 := \mathcal{E} \partial_{\mathcal{E}} + \bar{\mathcal{E}} \partial_{\bar{\mathcal{E}}} + \Phi \partial_{\Phi}, \tag{4.5.18c}$$

$$\xi_4 := -2\bar{\Phi} \partial_{\bar{\mathcal{E}}} + \partial_{\Phi}, \tag{4.5.18d}$$

$$\xi_5 := 2\mathcal{E} \bar{\Phi} \partial_{\bar{\mathcal{E}}} + \mathcal{E} \partial_{\Phi} + 2\bar{\Phi}^2 \partial_{\bar{\Phi}} \tag{4.5.18e}$$

および $\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4, \bar{\xi}_5$ により生成される. これらを用いると, $SU(2, 1)$ の Lie 代数の標準生成元 (Weyl 基底) は次のように表される:

$$h_1 \equiv E_1^1 - E_3^3 = i(\xi_1 + \xi_2), \tag{4.5.19a}$$

$$h_2 \equiv E_2^2 - E_3^3 = \frac{1}{2}h_1 + \xi_3 - \bar{\xi}_3, \tag{4.5.19b}$$

$$E_1^2 = -(\bar{\xi}_4 + \bar{\xi}_5), \tag{4.5.19c}$$

$$E_2^1 = \xi_4 + \xi_5, \tag{4.5.19d}$$

$$E_1^3 = -\frac{1}{2}(\xi_3 + \bar{\xi}_3) + \frac{i}{2}(-\xi_1 + \xi_2), \tag{4.5.19e}$$

$$E_3^1 = -\frac{1}{2}(\xi_3 + \bar{\xi}_3) - \frac{i}{2}(-\xi_1 + \xi_2), \tag{4.5.19f}$$

$$E_2^3 = \xi_4 - \xi_5, \tag{4.5.19g}$$

$$E_3^2 = \bar{\xi}_4 - \bar{\xi}_5. \tag{4.5.19h}$$

4.5.2 Ernst 方程式

【定理 4.5.4 (Ernst 方程式)】 軸対称定常な Einstein-Maxwell 系の時空計量は, ρ, z の関数 U, k, A を用いて,

$$ds^2 = -e^{2U}(dt + Ad\phi)^2 + e^{-2U}[e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad (4.5.20)$$

と表される. また, 電磁ポテンシャル Φ も ρ, z のみの関数となり, Einstein-Maxwell 方程式は, \mathcal{E}, Φ に対する平坦な 2 次元空間 (ρ, z) 上の微分方程式

$$e^{2U} \rho^{-1} \partial \cdot (\rho \partial \mathcal{E}) = \partial \mathcal{E} \cdot (\partial \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \partial \Phi), \quad (4.5.21)$$

$$e^{2U} \rho^{-1} \partial \cdot (\rho \partial \Phi) = \partial \Phi \cdot (\partial \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \partial \Phi) \quad (4.5.22)$$

に帰着される. U, A, k は \mathcal{E}, Φ を用いて

$$e^{2U} = \text{Re } \mathcal{E} + |\Phi|^2, \quad (4.5.23)$$

$$\partial_\zeta A = \rho e^{-4U} [i \partial_\zeta (\text{Im } \mathcal{E}) + \bar{\Phi} \partial_\zeta \Phi - \Phi \partial_\zeta \bar{\Phi}], \quad (4.5.24)$$

$$\partial_\zeta k = 2\rho \left[\frac{e^{-4U}}{4} (\partial_\zeta \mathcal{E} + 2\bar{\Phi} \partial_\zeta \Phi) (\partial_\zeta \bar{\mathcal{E}} + 2\Phi \partial_\zeta \bar{\Phi}) - e^{-2U} \partial_\zeta \Phi \partial_\zeta \bar{\Phi} \right] \quad (4.5.25)$$

と表される. ただし, $\zeta = \rho + iz, \partial_\zeta = \frac{1}{2}(\partial_\rho - i\partial_z)$ である. \square

4.5.3 Kerr-TS class

Weyl 座標 (ρ, z) の代わりに, 扁球座標

$$\rho = \sigma(x^2 - 1)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2}, \quad z = \sigma xy \quad (4.5.26)$$

を用いると, Ernst 方程式は,

$$\Xi = \frac{1 - \mathcal{E}}{1 + \mathcal{E}} \quad (4.5.27)$$

に対する次の方程式に書き換えられる:

$$\begin{aligned} & (|\Xi|^2 - 1) [\partial_x \{(x^2 - 1) \partial_x \Xi\} + \partial_y \{(1 - y^2) \partial_y \Xi\}] \\ & = 2\bar{\Xi} [(x^2 - 1)(\partial_x \Xi)^2 + (1 - y^2)(\partial_y \Xi)^2]. \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

この方程式は, 次のような有理型の解,

$$\Xi = \frac{\beta}{\alpha} \quad (4.5.29)$$

を持つ:

$$\delta = 1: \quad \alpha = px - iqy, \quad \beta = 1, \quad (4.5.30)$$

$$\begin{aligned} \delta = 2: \quad \alpha &= p^2(x^4 - 1) - 2ipqxy(x^2 - y^2) - q^2(1 - y^4), \\ \beta &= 2px(x^2 - 1) - 2iqy(1 - y^2), \end{aligned} \quad (4.5.31)$$

$$\begin{aligned} \delta = 3: \quad \alpha &= p(x^2 - 1)^3(x^3 + 3x) + iq(1 - y^2)^3(y^3 + 3y) \\ &\quad - pq^2(x^2 - y^2)^3(x^3 + 3xy^2) - ip^2q(x^2 - y^2)^3(y^2 + 3x^2y), \\ \beta &= p^2(x^2 - 1)^3(3x^2 + 1) - q^2(1 - y^2)^3(3y^2 + 1) \\ &\quad - 12ipqxy(x^2 - y^2)(x^2 - 1)(1 - y^2). \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

ここで, p, q は $p^2 + q^2 = 1$ を満たす実定数である.

4.5.4 Kerr-Newman 解

$\delta = 1$ に対応する解は Kerr 解と呼ばれ,

$$m = \frac{\sigma}{p}, \quad a = \frac{\sigma q}{p} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\sigma}{m}, \quad q = \frac{a\sigma}{m}, \quad \sigma = \sqrt{m^2 - a^2} \quad (4.5.33)$$

として, 質量 m , 固有角運動量 $J/m = a$ の回転するブラックホールを表す.

この解に, Neugebauer-Kramer 変換を施すと,

$$\mathcal{E} = \frac{(1 - |\mu|^2)(px - iqy) - (1 + |\mu|^2)}{(1 - |\mu|^2)(px - iqy) + 1 + |\mu|^2}, \quad (4.5.34a)$$

$$\Phi = -\frac{2\mu}{(1 - |\mu|^2)(px - iqy) + 1 + |\mu|^2} \quad (4.5.34b)$$

を得る. この解に対する U, k, A を求めると,

$$e^{2U} = \frac{(1 - |\mu|^2)^2(p^2x^2 + q^2y^2 - 1)}{(1 - |\mu|^2)^2(p^2x^2 + q^2y^2) + 2(1 - |\mu|^4)px + (1 + |\mu|^2)^2}, \quad (4.5.35a)$$

$$e^{2k} = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{p^2(x^2 - y^2)}, \quad (4.5.35b)$$

$$A = \frac{2\sigma q}{p} \frac{(1 - y^2)[(1 - |\mu|^4)px + 1]}{(1 - |\mu|^2)^2(p^2x^2 + q^2y^2 - 1)} \quad (4.5.35c)$$

となる. この解は Kerr-Newman 解と呼ばれ,

$$p = \frac{\sigma}{\sqrt{m^2 - e^2}}, \quad (4.5.36a)$$

$$q = \frac{a}{\sqrt{m^2 - e^2}}, \quad (4.5.36b)$$

$$\sigma = \sqrt{m^2 - e^2 - a^2}, \quad (4.5.36c)$$

$$\mu = -\frac{e}{m + \sqrt{m^2 - e^2}} \quad (4.5.36d)$$

とおくと, 質量 m , 固有角運動量 a , 電荷 e を持つ帯電したブラックホール解を与える. 時空計量は

$$\sigma x = r - m, \quad y = \cos \theta \quad (4.5.37)$$

で定義される座標系 (r, θ, ϕ, t) を用いて,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta \Sigma^2}{\Gamma} dt^2 + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\Sigma^2} (d\phi - \Omega dt)^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \\ &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} dt^2 - \frac{2a(2mr - e^2)}{\Sigma^2} \sin^2 \theta d\phi dt \\ &\quad + \sin^2 \theta \frac{\Gamma}{\Sigma^2} d\phi^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5.38)$$

と表される [SKM⁺03, 佐小 00]. ここで,

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2, \quad (4.5.39a)$$

$$\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.5.39b)$$

$$\Gamma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (4.5.39c)$$

$$\Omega = \frac{a(2mr - e^2)}{\Gamma}, \quad (4.5.39d)$$

ホライズン : Killing ホライズンは

$$\xi \cdot \xi \eta \cdot \eta - (\xi \cdot \eta)^2 \equiv -\Delta \sin^2 \theta = 0 \quad (4.5.40)$$

で与えられる．この方程式は， $a^2 + e^2 < m^2$ のとき2つの解 $r = r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}$ をもつ．これらの解は， $a^2 + e^2 = m^2$ の時一致する（縮退型ホライズン）．さらに $a^2 + e^2 > m^2$ の時には解が存在しない．分岐型ホライズンが存在するとき，ホライズン近傍で計量が正則となる座標系は，

$$du_{\pm} = dt \pm \frac{2mr - e^2}{\Delta} dt, \quad d\phi_{\pm} = d\phi \pm \frac{dr}{\Delta}. \quad (4.5.41)$$

この座標系を用いると，計量は

$$ds^2 = -\frac{\Sigma^2}{\Gamma} [\Delta du_{\pm}^2 \mp 2(2mr - e^2) du_{\pm} dr + (\Sigma^2 + 2mr - e^2) dr^2] + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \left(d\phi_{\pm} - \Omega du_{\pm} \mp \frac{\Sigma^2 + 2mr - e^2}{\Gamma} dr d\phi_{\pm} \right)^2 + \Sigma^2 d\theta^2 \quad (4.5.42)$$

エルゴ領域 Killing ホライズンは，無限赤方偏移面

$$g_{tt} = \Delta - a^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (4.5.43)$$

とは一致しない．このため，ホライズンの外に， $g_{tt} > 0$ となる領域が現れる．この領域はエルゴ領域と呼ばれる．

特異点 ホライズンに対応する見かけの特異点を除くと，計量は $\Sigma^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ ，i.e. $r = 0, \theta = \pi/2$ に曲率特異点をもつ． $\theta = \pi/2$ 平面に沿ってこの特異点に近づくと

$$g_{\phi\phi} \rightarrow a^2 + \frac{a^2(2mr - e^2)}{r^2} \quad (4.5.44)$$

となるので，この特異点はリング状で，その周の長さは無限大となる．また， $e^2 \neq 0$ のときには，このリングは閉じた時間的曲線となる． $a^2 + e^2 > m^2$ では，このリング状特異点は裸の特異点となる．

Penrose 過程 エルゴ領域では，無限遠に対する粒子のエネルギー $E = -p \cdot \xi$ が負となることが可能となる．このため，外部からこの領域に入射した粒子が $E > 0$ および $E < 0$ の2粒子に分裂し， $E < 0$ の粒子がブラックホールに吸収されると，結果的にブラックホールからエネルギーを取り出すことができる．いま，Kerr BH に対して，BH の回転角速度を

$$\Omega_H := \Omega(r_+) = \frac{a}{2mr_+} \quad (4.5.45)$$

により定義し，

$$k := \xi + \Omega_H \eta \quad (4.5.46)$$

とおくと, k はホライズン上で光的な Killing ベクトルとなる. BH に吸収される粒子の4元運動量を p とすると

$$p \cdot k \leq 0 \Rightarrow E > \Omega_H L \quad (4.5.47)$$

が成り立つ. この不等式をブラックホールの質量および角運動量に対する式として書くと,

$$0 < dM - \Omega_H dJ = \frac{\kappa}{8\pi G} dA; \quad \kappa = \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2}, \quad A = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (4.5.48)$$

となる. すなわち, ブラックホールの面積は必ず増大する. したがって, Penrose 過程により Kerr BH が全角運動量を失うと, 後に残される BH の質量は,

$$m_{\text{IR}} := \frac{1}{2}\sqrt{m}(\sqrt{m-a} + \sqrt{m+a}) \quad (4.5.49)$$

で定義される簡約質量以上となる.

BH 熱力学 Kerr-Newman BH の面積 A , 質量 M , 角運動量 J , 電荷 Q の間には

$$\frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA = dM c^2 - \Omega_H dJ - \Phi_H dQ \quad (4.5.50)$$

の関係がある. ここで, κ は BH の表面重力

$$\kappa = c^2 \frac{\sqrt{m^2 - a^2 - e^2}}{r_+^2 + a^2}, \quad (4.5.51)$$

Φ_H は BH の電気ポテンシャル Φ の極での値

$$\Phi_H = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \quad (4.5.52)$$

である. 温度として Hawking 輻射の温度

$$k_B T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c} \quad (4.5.53)$$

を用い, BH エントロピーを

$$\frac{S}{k_B} = \frac{c^3}{4G\hbar} A \quad (4.5.54)$$

で定義すると, 上記の公式は可逆過程に対する熱力学の第2法則と一致する.

4.5.5 Kerr-Schild 型

Kerr 計量は

$$dx^0 := dt + \left(1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right) dr, \quad (4.5.55a)$$

$$d\tilde{\phi} := d\phi - \frac{a}{\Delta} dr \quad (4.5.55b)$$

とおくと,

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{2Mr}{\Sigma^2} (k_\mu dx^\mu)^2, \quad (4.5.56)$$

$$ds_0^2 = -(dx^0)^2 + dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 + [(r^2 + a^2)d\tilde{\phi} + 2adr]d\tilde{\phi} \sin^2 \theta \quad (4.5.57)$$

と書き換えられる (Kerr-Schild 型) . ここで, k は光的ベクトル

$$k := \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi + \Delta\partial_r] \quad (4.5.58)$$

である . さらに,

$$l := \frac{1}{2\Sigma^2} [(r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi - \Delta\partial_r] \quad (4.5.59)$$

とおくと,

$$k \cdot k = 0, \quad k \cdot l = -1, \quad l \cdot l = 0, \quad (4.5.60)$$

$$R_{\mu\alpha\nu\beta} k^\alpha k^\beta = (\Psi_2 + \bar{\Psi}_2) k_\mu k_\nu, \quad (4.5.61)$$

$$R_{\mu\alpha\nu\beta} l^\alpha l^\beta = (\Psi_2 + \bar{\Psi}_2) l_\mu l_\nu \quad (4.5.62)$$

が成り立つ . ここで

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(r + ia \cos \theta)^3}. \quad (4.5.63)$$

これより, Kerr 時空は Petrov 型 D となる .

4.5.6 Kerr 時空の測地線

Carter 定数

Kerr 時空では, $\xi = \partial_t$ と $\eta = \partial_\phi$ が Killing ベクトルとなるので,

$$-p_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma^2}\right) \dot{t} + \frac{2aMr}{\Sigma^2} = E, \quad (4.5.64a)$$

$$p_\phi = -\frac{2aMr}{\Sigma^2} + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\Sigma^2} \dot{\phi} = L_z \quad (4.5.64b)$$

が保存される . Kerr 時空では, さらに次の量が保存される (Carter 定数):

$$K = 2\Sigma^2(p \cdot k)(p \cdot l) + r^2 p \cdot p \geq 0. \quad (4.5.65)$$

したがって,

$$-\frac{\Delta \Sigma^2}{\Gamma} \dot{t}^2 + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\Sigma^2} (\dot{\phi} - \Omega \dot{t})^2 + \Sigma^2 \left(\frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\phi}^2 \right) = p^2 = -\epsilon \quad (4.5.66)$$

を考慮すると, 測地線の方程式は求積可能な常微分方程式系に帰着される .

$$\Sigma^4 \dot{r}^2 = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta(\epsilon r^2 + K), \quad (4.5.67a)$$

$$\Sigma^4 \dot{\theta}^2 = -(aE \sin \theta - L_z \csc \theta)^2 - \epsilon a^2 \cos^2 \theta + K, \quad (4.5.67b)$$

$$\Sigma^2 \dot{t} = \frac{1}{\Delta} (\Gamma E - 2aMr L_z), \quad (4.5.67c)$$

$$\Sigma^2 \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} [2aMr E + (\Sigma^2 - 2Mr) L_z \csc^2 \theta]. \quad (4.5.67d)$$

		順回転	反回転
$a = 0$	$a = M(1 - \delta)$	$a = -M$	
	$(\delta \rightarrow 0)$		
r_{ph}	$3M$	$M[1 + \sqrt{8\delta/3}]$	$4M$
r_{mb}	$4M$	$M[1 + 2\sqrt{\delta}]$	$(3 + 2\sqrt{2})M$
r_{st}	$6M$	$M[1 + (4\delta)^{1/3}]$	$9M$

表 4.1: $a = 0$ および $a = \pm M$ に対する極限円軌道

赤道面での運動

$\theta = \pi/2$ のとき，運動方程式は次の常微分方程式に帰着される：

$$\dot{r}^2 - V(r) = E^2, \tag{4.5.68}$$

$$V := \frac{\epsilon\Delta}{r^2} + \frac{L^2 - a^2E^2}{r^2} - \frac{2M}{r^3}(aE - L)^2. \tag{4.5.69}$$

§4.6

一意性定理

4.6.1 諸定義

【定義 4.6.1 (dominant energy condition)】 $T_{\mu\nu}$ が任意の未来向き時間的ベクトル X, Y に対して, $T(X, Y) \geq 0$ となるとき, dominant energy condition を満たすという。□

【定義 4.6.2 (定常ブラックホール時空)】 (\mathcal{M}, g, ξ) が次の条件を満たすとき, 定常正則予言可能であるという:

- i) (\mathcal{M}, g) は準 Cauchy 面 Σ に関して正則予言可能.
- ii) ξ は \mathcal{I}^+ および \mathcal{I}^- の近傍で時間的な Killing ベクトルで, \mathcal{M} の等長変換 θ_t を生成する.
- iii) (\mathcal{M}, g) は Einstein 方程式の解で, 対応する $T_{\mu\nu}$ は dominant energy condition を満たし, $T_{\mu\nu}$ に寄与する物質は性質のよい双曲型方程式に従うスカラ場ないし電磁場のみである.

□

【注 4.6.3 (時空のカテゴリー)】 以下, 特に断らない限り, 時空は常に定常正則予言可能とする。□

【定義 4.6.4 (non-rotating)】 ホライズン上で $\xi \cdot \xi = 0$ となるとき, (\mathcal{M}, g, ξ) は非回転的であるという。□

【命題 4.6.5 (強剛性定理: Hawking 1972, HE prop. 9.3.6)】 時空が解析的で物質場は双曲型の方程式に従い, かつ弱エネルギー条件が成り立つとする。このとき, 正則な定常解のイベントホライズンは Killing ホライズンとなる。さらに, 漸近的に時間的な Killing ベクトルを k とするとき,

- i) (非回転的) イベントホライズンは k に関する Killing ホライズンとなる
- ii) (回転的) 別の Killing ベクトル m が存在してそれに関して軸対称である

のいずれかが成り立つ。□

4.6.2 ホライズンの位相

【命題 4.6.6 (HE prop.9.3.2, prop.9.3.3, Chrusciel & Wald 1994)】 $\mathcal{B}(\tau)$ の各連結成分 (ブラックホール) の境界は $S^2 \times \mathbb{R}$ と同相 .

ある τ に対して $\mathcal{B}(\tau)$ が連結ならば ,

$$J^+(\mathcal{I}^-, \bar{\mathcal{M}}) \cap J^-(\mathcal{I}^+, \bar{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{M} \approx [0, 1) \times S^2 \times \mathbb{R}$$

□

【注 4.6.7 (付加条件)】 Condition 1:

- $\text{DOC} := J^+(\mathcal{I}^-, \bar{\mathcal{M}}) \cap J^-(\mathcal{I}^+, \bar{\mathcal{M}}) \approx S^2 \times \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{H}^+ := J^-(\mathcal{I}^+, \bar{\mathcal{M}}) \approx S^2 \times \mathbb{R}$

Condition 2: Non-rotating case に対して , DOC で $\xi \cdot \xi < 0$. □

【命題 4.6.8 (HE prop.9.3.4)】 Condition 1 & static \Rightarrow Condition 2 □

4.6.3 非回転ブラックホール

【命題 4.6.9 (HE prop.9.3.5, Carter 1973)】 Non-rotating & Condition 2 \Rightarrow static □

【命題 4.6.10】 [Israel 1967,1968, Muller-zum-Hagen et al 1973,1974, Robinson 1977] Static & Conditions 1 \Rightarrow DOC: 球対称 □

【命題 4.6.11 (Lindblom 1980)】 Static, Condition 2 and 3-geometry:conformally flat \Rightarrow 球対称 □

【命題 4.6.12】 [Bunting&Masood-ul-Alam 1987, Ruback 1988, Masood-ul-Alam 1992] Static and Condition 2 \Rightarrow 3 Geometry: conformally flat □

【定理 4.6.13 (Uniqueness for Non-rotating BH)】 Non-rotating and Condition 2 \Rightarrow Schwarzschild or Reissner-Nordstrom □

4.6.4 軸対称ブラックホール

【命題 4.6.14 (Circular symmetry)】 [HE prop.9.3.7, Papaetrou 1966, Carter 1969] (\mathcal{M}, g) : axisymmetric & stationary regular predictable $T_{\mu\nu}$: empty or source-free EM fields
 \Rightarrow Killing ベクトル ξ, η ($[\xi, \eta] = 0$) は 2-surface orthogonal. □

【命題 4.6.15】 [HE prop.9.3.8, Carter 1971, 1973] 前命題の条件 & Condition 1 $\Rightarrow \rho^2 := (\xi \cdot \eta)^2 - (\xi \cdot \xi)(\eta \cdot \eta) > 0$ in DOC (対称軸上を除いて), $\rho^2 = 0$ on \mathcal{H}^+ . □

【命題 4.6.16】 [Carter 1971, 1973] 前命題の条件のもとで, 定常軸対称楕円体座標 λ, μ, ϕ, t が DOC の global chart となる :

$$ds^2 = \Xi \left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} \right) + X d\phi^2 + 2W d\phi dt - V dt^2.$$

この座標系のもとで

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (\lambda^2 - c^2)(1 - \mu^2) \\ c &= M - 2\Omega_H J - \Phi_H Q. \end{aligned}$$

また, 対称軸は $\mu = \pm 1$, ホライズンは $\lambda \rightarrow c$. □

【命題 4.6.17 (Ernst 形式での表現)】 [Carter 1970, 1973] 前命題の条件下で, Einstein 方程式の解は 2次元時空

$$ds_2^2 = \frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} \quad (-1 < \mu < 1, c < \lambda < \infty)$$

上での場 X, Y, E, B に対する変分方程式

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int L d\lambda d\mu = 0; \\ L &= \frac{|\nabla X|^2 + |\nabla Y + 2(E\nabla B - B\nabla E)|^2}{2X^2} + 2 \frac{|\nabla E|^2 + |\nabla B|^2}{X} \end{aligned}$$

に対する次の境界条件を満たす解で与えられる :

- X, Y, E, B とその微係数は有界.
- $\mu \rightarrow \pm 1$ のとき, $X, \partial_\lambda(E, B, Y), \partial_\mu Y + 2(E\partial_\mu B - B\partial_\mu E)$ はゼロに近づく.
- $\lambda \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} E &= -Q\mu + O(1/\lambda), B = O(1/\lambda), \\ Y &= 2J\mu(3 - \mu^2) + O(1/\lambda), \lambda^{-2}X = (1 - \mu^2)(1 + O(1/\lambda)). \end{aligned}$$

□

【命題 4.6.18 (empty case)】 [Robinson 1975] Prop.4.6.17 の条件下で ,
empty($E = B = 0$) のとき , 各 C, J に対して解は高々 1 個 . _____□

【命題 4.6.19 (一般の場合)】 [Robinson 1974] Prop.4.6.17 の条件下で , 解
の集合の各連結成分は高々 3 個のパラメーター C, J, Q で記述される . _____□

【定理 4.6.20 (No hair theorem)】 [Mazur 1982, Bunting 1981, 1983]
Condition 1 のもとで , 高々電磁場しか存在しない系に対する Einstein 方程
式の rotating, stationary regular predictable な解は , Kerr-Newmann 解に限
られる . _____□

 §4.7

 高次元への一般化

4.7.1 一般化された Weyl 理論

【命題 4.7.1】 $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(D-2)}$ を D 次元時空の可換な Killing ベクトルとする． $(D-2)$ 形式

$$\chi := \xi_{(1)*} \wedge \dots \wedge \xi_{(D-2)*} \quad (4.7.1)$$

として，各 i に対して

- 1) $\chi \wedge R(\xi_{(i)})_* = 0$
- 2) $\chi \wedge d\xi_{(i)*}$ が少なくとも 1 点でゼロとなる．

の 2 条件が満たされるなら，すべての $\xi_{(i)}$ に直交する 2 次元包含系は可積である． □

Proof. 一般に，

$$d*(\xi \wedge \eta) = \pm di_\xi * \eta = \pm(\mathcal{L}_\xi * \eta - i_\xi d * \eta)$$

より，

$$d(\chi \wedge d\xi_{(i)}) = \pm i_{\xi_{(1)}} \cdots i_{\xi_{(D-2)}} d * d\xi_{(i)} = \pm *(\chi \wedge *d * d\xi_{(i)}) = \pm *(\chi \wedge R(\xi_{(i)})).$$

よって，仮定より， $\chi \wedge d\xi_{(i)} = 0$ ．これは，適当な 1 形式の系 Ω_i^j を用いて

$$d\xi_{(i)} = \Omega_i^j \xi_{(j)}$$

と表されることと同値．よって，Frobenius の定理より，関数の系 $\phi_1, \dots, \phi_{D-2}$ と f_i^j が存在して，

$$\xi_{(i)} = f_i^j \nabla \phi_j.$$

これは， $\xi_{(i)}$ が $\phi_i = c_i(\text{const})$ により決まる 2 次元曲面族と直交することを意味する． □

【定理 4.7.2 (一般 Weyl 形式)】 D 次元 Einstein 方程式の真空解が可換で互いに直交する $(D-2)$ 個の Killing ベクトルを持つとする．これらの Killing

ベクトルが上記の命題の仮定を満たし，その軌道面が時間的面であるとする
と，解は（一般に）次のように表される：

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{D-3} \epsilon_i e^{2U_i} (dx^i)^2 + e^{2\nu} (d\rho^2 + dz^2), \quad (4.7.2)$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = 0, \quad (4.7.3)$$

$$\partial \nu = -2\rho \sum_{i < j} \partial U_i \partial U_j. \quad (4.7.4)$$

ここで， $\epsilon = \pm 1$ で，

$$\partial = \frac{1}{2} (\partial_\rho - i\partial_z). \quad (4.7.5)$$

また， U_i は拘束条件

$$\sum_i U_i = \log \rho + \text{const} \quad (4.7.6)$$

を満たさねばならない。 _____ □

4.7.2 5D Schwarzschild Solution

5次元 Schwarzschild 解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{4\sigma^2}{r^2} \right) dt^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi_1^2 + r^2 \cos^2 \theta d\phi_2^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{4\sigma^2}{r^2}} + r^2 d\theta^2,$$

に対応する Weyl ポテンシャルは次の表式で与えられる：

$$e^{2U_0} = \frac{x-1}{x+1}, \quad e^{2U_1} = \sigma^2(x+1)(1-y), \quad e^{2U_2} = \sigma^2(x+1)(1+y),$$

$$e^{2\nu} = \frac{x+1}{x^2-y^2}.$$

ここで， x と y は prolate spheroidal 座標

$$r^2 = 2\sigma^2(x+1), \quad \cos 2\theta = y$$

で，計量の (r, θ) 部分は x, y を用いて次のように表される。

$$\frac{1}{2} \sigma^2 e^{2\nu} (x^2 - y^2) \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right).$$

4.7.3 Rod 描像

$U(a, b)$ を Weyl 座標

$$\rho^2 = \sigma^2(x^2 - 1)(1 - y^2), \quad z = \sigma xy. \tag{4.7.7}$$

のもとで, z 軸上の $a < z < b$ の部分におかれた線密度 $1/2$ のロッドが作るポテンシャルとする. その具体的な表式は

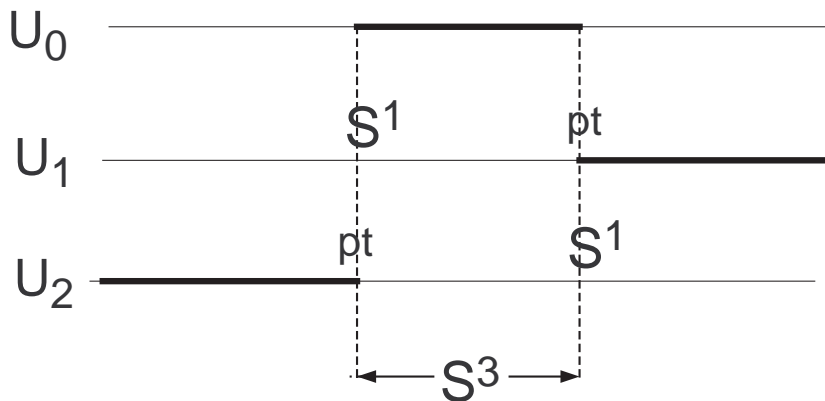
$$e^{2U} = c(a, b) \frac{z - b + \sqrt{\rho^2 + (z - b)^2}}{z - a + \sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}}. \tag{4.7.8}$$

この記法を用いると, Schwarzschild 計量に対するポテンシャル U_i は

$$U_0 = U(-\sigma, \sigma), \quad U_1 = U(\sigma, +\infty), \quad U_2 = U(-\infty, -\sigma) \tag{4.7.9}$$

と表される. また, U_i に対する拘束条件は, 各ポテンシャルの源の線密度の合計が常に $1/2$ となる条件と一致する:

$$U_0 + U_1 + U_2 = U(-\infty, +\infty). \tag{4.7.10}$$

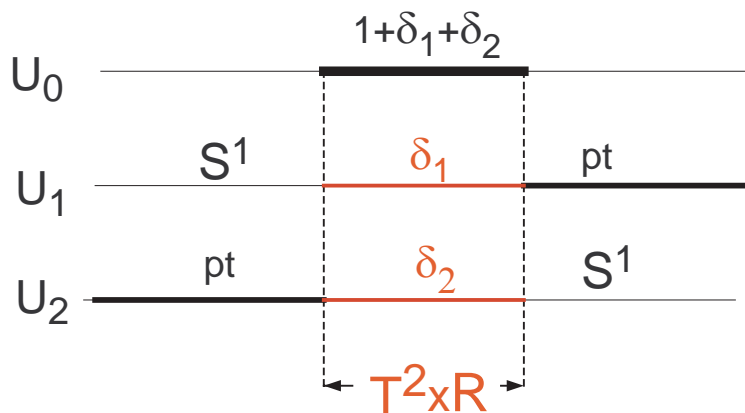


5D Schwarzschild Black Hole

4.7.4 5D ZVW solution

一般化された Weyl 形式を用いると, 容易に ZVW 解の 5 次元版を作ることができる. すなわち, U_0 に対する線密度を $1/2$ から $\delta/2$ へ増やし, 変化分を打ち消すために負の線密度 $-\delta_1/2$ および $-\delta_2/2$ をそれぞれ U_1 と U_2 の源に加えればよい. ここで, $\delta = \delta_1 + \delta_2 + 1$:

$$\begin{aligned} U_0 &= \delta U(-\sigma, \sigma), \\ U_1 &= U(\sigma, +\infty) - \delta_1 U(-\sigma, \sigma), \\ U_2 &= U(-\infty, -\sigma) - \delta_2 U(-\sigma, \sigma). \end{aligned}$$



5D ZVW Solution

計量の具体的な表式は

$$ds^2 = -f dt^2 + R_1^2 d\phi_1^2 + R_2^2 d\phi_2^2 + \Sigma^2 \left(\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right).$$

ここで,

$$f = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta,$$

$$R_1^2 = \sigma^2 (1-y) \frac{(x+1)^{\delta_1+1}}{(x-1)^{\delta_1}},$$

$$R_2^2 = \sigma^2 (1+y) \frac{(x+1)^{\delta_2+1}}{(x-1)^{\delta_2}},$$

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma^2 (x^2-1)^\Delta (x+1)^\delta}{2(x^2-y^2)^\Delta (x-y)^{\delta_1} (x+y)^{\delta_2}}.$$

また, Δ は

$$\Delta = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2.$$

Properties The 5D spacetime described by the above metric has the following properties:

- The spacetime is asymptotically flat. It is identical to the flat spacetime for $(\delta_1, \delta_2) = (-1, 0), (0, -1)$ and to the Schwarzschild spacetime for $(\delta_1, \delta_2) = (0, 0)$.
- The spacetime may be singular only on the segment I: $\rho = 0, -\sigma < z < \sigma$ and at the two points P_\pm : $\rho = 0, z = \pm\sigma$ in the Weyl coordinates.
- The singularity on the segment I has the following geometrical shapes:
 - $\delta_1, \delta_2 > 0$: T^2 -like.

- $\delta_1 \delta_2 < 0$ and $\Delta > 0$: ring-like.
 - $\delta_1 \delta_2 < 0$ and $\Delta < 0$: $S^1 \times \mathbb{R}$ -like.
 - $\delta_1 < 0, \delta_2 < 0$ and $\Delta < 0$: \mathbb{R} -like.
 - $\delta_1 < 0, \delta_2 < 0$ and $\Delta > 0$: point-like.
- The structures around P_+ and P_- are different. In particular, R_1^2 has a finite limit for $\delta_1 = 1$ and diverges for $\delta_1 > 1$ when one approaches P_+ along $X^2 = (1 - y^2)/(x^2 - 1) = \text{const}$ curves, while the behavior of R_2^2 is controlled by δ_2 .
 - In particular, P_+ may have a horizon structure only when $\delta_1 \geq 1$ and $\delta_2 = 0$. In this case, P_- is singular.

Of course, there is a possibility that this pathological feature can be avoided in a solution corresponding to a different negative mass distribution.

4.7.5 Black Ring Solution

静的なブラックリング解は

$$ds^2 = -\frac{F(y)}{F(x)} dt^2 + \frac{F(y)F(x)^2}{A^2(x-y)^2} \left[\frac{x^2-1}{F(x)^2} d\phi_1^2 + \frac{1-y^2}{F(y)^2} d\phi_2^2 + F(x)^{-1} \frac{dx^2}{x^2-1} + F(y)^{-1} \frac{dy^2}{1-y^2} \right].$$

ここで, $F(\zeta) = 1 - \mu\zeta$. この解は Weyl 座標を

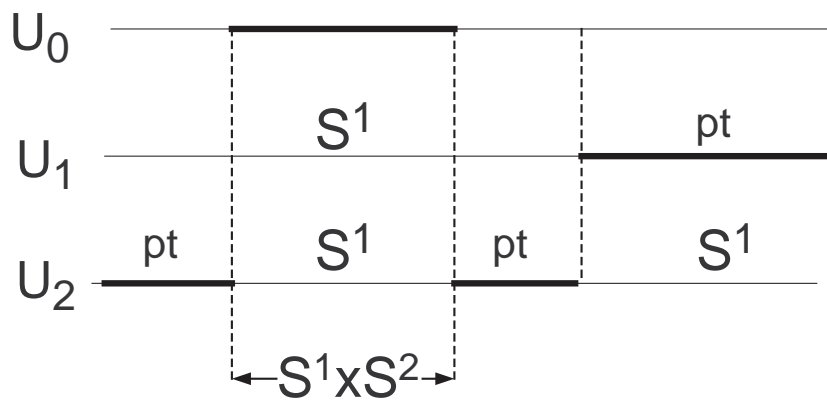
$$\rho = \frac{\sqrt{F(x)F(y)(x^2-1)(1-y^2)}}{A(x-y)^2}, \quad z = \frac{(1-xy)(F(x)+F(y))}{2A(x-y)^2}.$$

により導入すると, 次のような Weyl 形式で書かれる:

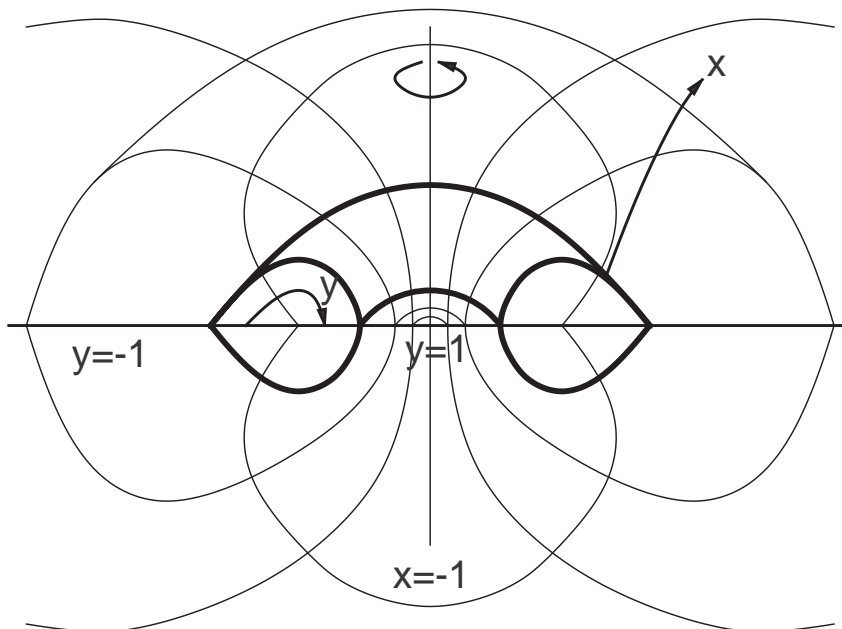
$$U_0 = U(a_3, a_2), \quad U_1 = U(a_1, \infty), \quad U_2 = U(-\infty, a_3) + U(a_2, a_1).$$

ここで,

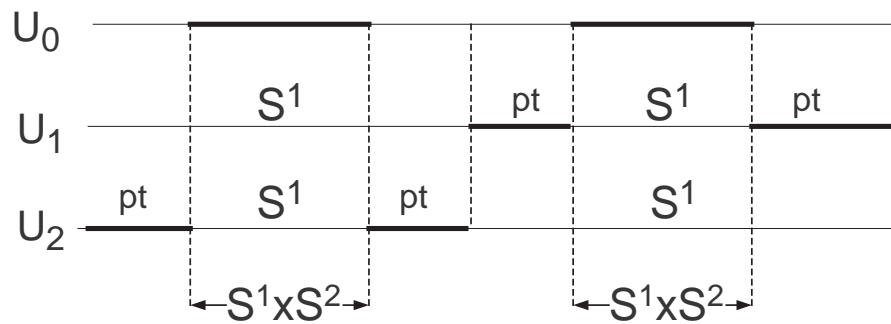
$$a_1 = \frac{1}{2A}, \quad a_2 = \frac{\mu}{2A}, \quad a_3 = -\frac{\mu}{2A}.$$



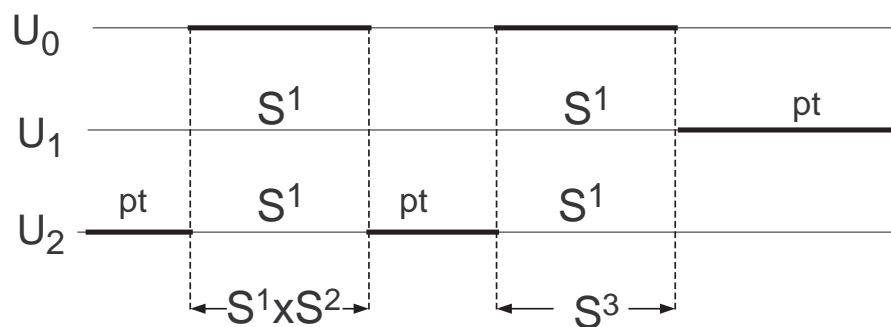
Static Black Ring



4.7.6 Multi-Black Ring and Black Hole Solutions



Static Orthogonal Black Rings



Static Black Ring & Black Hole

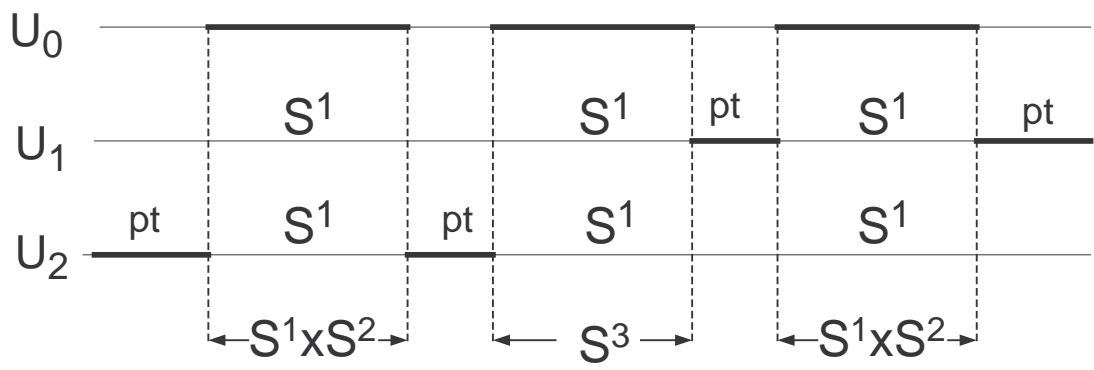
Note that in the $D = 5$ minimal SUGRA models, supersymmetric solutions with concentric rotating multiple black ring solutions that are asymptotic flat and regular were constructed by Gauntlett and Gutowski [hep-th/0408010].

Actually, they showed that a general class of rotating supersymmetric solutions can be constructed from three harmonic functions that can be almost freely specified, and hence superpositions of solutions are possible. These solutions have only $\mathbb{R} \times U(1)$ symmetry in general, in accordance with a general argument by Reall (2002)

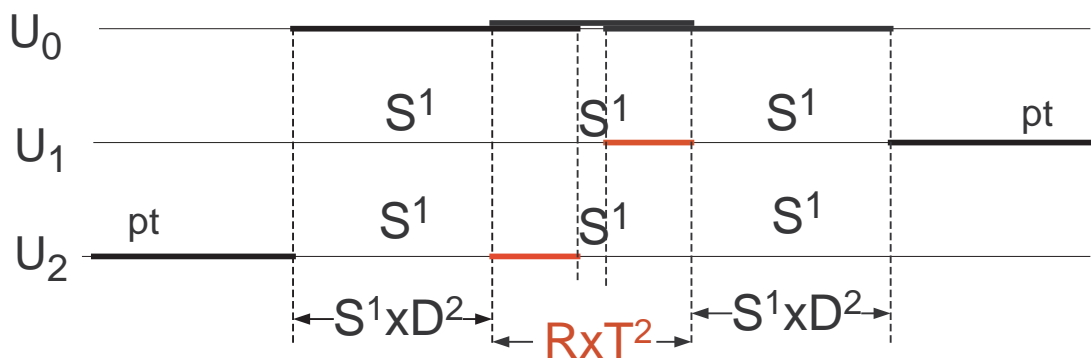
Further, a regular solution representing a system of a black hole and a black ring was constructed by Bena and Warner [hep-th/0408106], as a byproduct of the classification of BPS solutions in the 11D SUGRA model.

4.7.7 5D ZVW solution as a limit of BH-BR solutions

The 5D ZVW solution can be obtained as a limit that black rings and a black hole merge together.



Static 2 Black Rings + Black Hole



ZVW from 2 BRs and BH

関連図書

- [KN63] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry I, II*. Interscience Pub., 1963.
- [OY74] N. O’Murchadha and W. York, Jr. Initial-value problem of general relativity. *Phys. Rev. D*, 10:428–446, 1974.
- [SKM⁺03] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and Herl. *Exact Solutions to Einstein’s Field Equations, Second Edition*. Cambridge Univ. Press, 2003.
- [佐小00] 佐藤文隆 and 小玉英雄. 一般相対性理論. 岩波書店, 2000.