Lie 群と Lie 代数

LastUpdate: 2007.5.20

目 次

1　基本事項

1.1　位相群

1.1.1　基本性質

【定理 1.1 (Schreier の定理)**】**　G を連結位相群，U_e を単位元の任意の開近傍とする．このとき，

$$U_e^{(m)} := SetDef g = g_1^{\pm 1} \cdots g_m^{\pm 1} g_i \in U_e, 1 \leq i \leq m$$

とおくと，

$$G = \cup_{m=1}^{\infty} U_e^{(m)}$$

が成り立つ．[From: 竹内勝・伊勢幹夫「リー群論」(岩波書店, 1992)]　□

【命題 1.2 (正規離散部分群)**】**　位相群 G の任意の離散的正規部分群は G の中心に含まれる．　□

1.2　Lie 代数と Lie 群の対応

1.2.1　指数写像

【定義 1.3 (指数写像)**】**　G を Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその（左不変ベクトル場の作る）Lie 代数とする．このとき，$X \in \mathfrak{g}$ は完備でその生成する変換群は，G の 1 径数部分群 $a(t)$ による右変換群 $R_{a(t)}$ と一致する．この 1 径数部分群 $a(t)$ を $a(t) = \exp(tX)$ とおくと，

$$\exp : X \mapsto \exp(X)$$

は，$\mathfrak{g}$ から G へのなめらかな写像を与え，$0 \in \mathfrak{g}$ の近傍で 1 対 1 となる．この写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を指数写像という．　□

【命題 1.4】　指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ に対して

$$\exp tX \cdot \exp tY = \exp\left\{t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + \mathrm{O}\big(t^3\big)\right\} \tag{1.1}$$

が成り立つ．これより，特に

$$[[\exp tX, \exp tY]] = \exp\left\{t^2[X,Y] + \mathrm{O}\big(t^3\big)\right\} \tag{1.2}$$

が成り立つ．ここで，$a, b \in G$ に対して

$$[[a, b]] := aba^{-1}b^{-1}$$

である． □

【定理 1.5 (Lie 群の連結 Lie 部分群と Lie 環の部分環の対応)**】** Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする．このとき，$\mathfrak{g}$ の任意の部分代数 $\mathfrak{h}$ に対して，$\mathfrak{h}$ を G 上のベクトル場の包合系と見なし，単位元 e を含むその極大積分多様体を H とすると，H は G の連結 Lie 部分群となる．逆に，G の任意の連結 Lie 部分群 H に対して，その Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は (左不変ベクトル場の線形集合として）一意的に $\mathfrak{g}$ の部分代数と見なされる．$\mathfrak{g}$ の部分代数と G の Lie 部分群との対応は 1 対 1 で次の関係にある：

i) 連結 Lie 部分群 H に対応する部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Exp}(X) \subset H\}.$$

ここで，$\mathrm{Exp}(X) = \{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\}$.

ii) 部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対応する連結 Lie 部分群 H は,

$$H = \{\exp X \cdot \exp Y \cdots \exp Z \mid X, Y, \cdots, Z \in \mathfrak{h}\}.$$

[From: 竹内勝・伊勢幹夫「リー群論」(岩波書店, 1992)] □

1.2.2 線形表現における Lie 代数の対応

【命題 1.6 (線形表現における Lie 代数の対応)】 $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathscr{V})$ を Lie 群 G の $\mathscr{V}$ 上への線形表現とする．このとき，ξ, η を G の左不変ベクトル場，$d\rho$ を ρ の微分写像とすると

$$d\rho_g(\xi) = \rho(g)d\rho_e(\xi),$$
$$d\rho_g([\xi, \eta]) = \rho(g)[d\rho_e(\xi), d\rho_e(\eta)]$$

が成り立つ．これより，G の Lie 代数から $\mathrm{GL}(\mathscr{V})$ の Lie 代数への線形写像 $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathscr{V})$ を

$$\rho_*(\xi) := d\rho_e(\xi)$$

により定義すると，ρ_* は Lie 代数の同型を与える：

$$\rho_*([\xi, \eta]) = [\rho_*(\xi), \rho_*(\eta)].$$

□

1.3　Lie 部分群の位相的特徴付け

【定理 1.7 (Cartan の定理)**】**　Lie 群 G の閉部分群 H は常に Lie 部分群の構造をもち，それは一意的である．　□

【定理 1.8 (山辺の定理)**】**　Lie 群 G の部分群 H が G の位相に関して弧状連結であることと H が G の連結 Lie 部分群となることは同等である．　□

2 Lie 代数と Lie 群の構造

2.1 一般的定義

【定義 2.1 (Lie 代数の可解性とベキ零性)**】** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，

i) $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}'' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'], \cdots, \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$ とおく．このとき，$\mathfrak{g}' = 0$ ならば $\mathfrak{g}$ は可換，$\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ となる自然数 k が存在するならば可解という．

ii) $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \cdots, \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$ とおく．このとき，$\mathfrak{g}^k = 0$ となる自然数 k が存在するならば $\mathfrak{g}$ はベキ零であるという．

□

【定義 2.2 (根基)**】** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の可解イデアル全部の和は可解イデアルで最大可解イデアルとなる．これを $\mathfrak{g}$ の**根基** (radical) という． □

【定義 2.3 (Lie 代数の半単純性)**】** 根基が 0，すんなわち 0 以外に可解イデアルを持たない Lie 代数を**半単純** (semisimple) という．$\mathfrak{g}$ が半単純であって，さらに，0 と $\mathfrak{g}$ 以外にイデアルを持たないとき**単純** (simple) であるという． □

【注 2.4】

- 半単純性を 0 以外に可換イデアルを持たないという条件により定義することもできる．
- 1 次元複素 Lie 代数 $\mathbb{C}$(および実 Lie 代数 $\mathbb{R}$) は 0 と自分自身以外にイデアルを持たないが，単純ではない．

□

【定義 2.5】 連結 Lie 群は，その Lie 代数が半単純，単純，可解，ベキ零，可換でるとき，それぞれ半単純，単純，可解，ベキ零，可換であるという．可解性，ベキ零性，可換性は群論的な定義と一致する． □

2.2 分解定理

2.2.1 Mackey 分解

【定理 2.6 (Mackey 分解 [Macky(1952))]**】**] G を可分局所コンパクト群，K をその閉部分群とする．このとき，G の Borel 集合 S が存在し，G の任意の元 g は一意的な次の分解をもつ：

$$g = ks, \quad k \in K,\ s \in S.$$

[Ref. A. Barut and R. Raczka (1986)] $\square$

2.2.2 Gauss 分解

【定義 2.7 (Gauss 分解:位相群)**】** 位相群 G は，次の性質を持つ部分群 $\mathscr{X}$，D，Z を用いて

$$G = \overline{\mathscr{X}DZ}$$

と表されるとき，**Gauss 分解**を持つという.

i) $\mathscr{X}D$ と DZ は連結可解部分群で，$[\mathscr{X}D, \mathscr{X}D] = \mathscr{X}$，$[DZ, DZ] = Z$.

ii) $\mathscr{X} \cap DZ = \{e\}$ and $D \cap Z = \{e\}$.

[From A. Barut and R. Raczka (1986)] $\square$

【定理 2.8 (Gauss 分解:複素半単純 Lie 代数)**】** $\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ を Cartan 部分代数，$\Delta^{\pm}$ を正（負）ルートの集合，$\Delta = \Delta^{+} \cup \Delta^{-}$，$E_\alpha$ を

$$[X, E_\alpha] = \alpha(X) E_\alpha, \quad \alpha \in \Delta, X \in \mathfrak{h},$$

を満たす $\mathfrak{g}$ の元，$\mathfrak{g}^{\pm}$ を $\{E_\alpha | \alpha \in \Delta\pm\}$ の線形包とする．このとき，次が成立する：

1. $\mathfrak{g}^{+}$ と $\mathfrak{g}^{-}$ は巾ゼロ部分代数.
2. 部分代数 $\mathfrak{g}^{+} \tilde{+} \mathfrak{h}$，$\mathfrak{g}^{-} \tilde{+} \mathfrak{h}$ は可解.
3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{+} \dot{+} \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{g}^{-}$.

□

【**定理 2.9** (極大可解部分代数)】 複素半単純 Lie 代数の Gauss 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \dot{+} \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{g}^-$ において，可解部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}^+ \dot{+} \mathfrak{h}$ を **Borel 部分代数**という．Borel 部分代数は，極大可解部分代数であり，任意の極大可解部分代数は互いに内部自己同型で共役である． □

【**定理 2.10** (Gauss 分解:複素半単純 Lie 群)】 すべての連結複素半単純 Lie 群 G は，G の自己同型の自由度を除いて一意的な Gauss 分解を持つ：

$$G = \overline{\mathscr{Z} D Z}.$$

ここで，D は連結可換部分群，$\mathscr{Z}$ と Z は単連結，連結巾ゼロ部分群，$\mathscr{Z} D$ と DZ は G の極大連結可解部分群．また，$G - \mathscr{Z} DZ$ は G より低次元の閉集合．さらに，正則点 $g \in \mathscr{Z} DZ$ に対して，分解 $g = \zeta\delta z$ $(\zeta \in \mathscr{Z}, \delta \in \Delta,\ z \in Z)$ により決まる元，ζ，δ，z は g の連続関数．[Ref. Zeloenko (1963); From A. Barut and R. Raczka (1986)] □

【**定理 2.11** (Gauss 分解:実半単純 Lie 群)】 すべての連結実半単純 Lie 群 G は次の分解を持つ：

$$G = \overline{\mathscr{Z} D Z}.$$

ここで，D は単連結可換部分群 A と連結半単純コンパクト群 K の直積

$$D = A \times K,$$

$\mathscr{Z}$ と Z は単連結かつ連結巾ゼロ部分群で，$\mathscr{Z} \cap DZ = \{e\}$ かつ $D \cap Z = \{e\}$．また，$G - \mathscr{Z} DZ$ は G より低次元の閉集合．さらに，正則点 $g \in \mathscr{Z} DZ$ に対して，分解 $g = \zeta\delta z$ $(\zeta \in \mathscr{Z}, \delta \in \Delta,\ z \in Z)$ により決まる元，ζ，δ，z は g の連続関数．[Ref. Zeloenko (1963); From A. Barut and R. Raczka (1986)] □

2.2.3 Cartan 分解

【**定理 2.12** (Cartan 分解:実半単純 Lie 代数)】 実半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は次の形の分解を持つ：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}.$$

ここで，$\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{p}$ は次の性質を持つ：

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k},$$

$$\begin{aligned}(X,X) &< 0 \quad \text{for} \quad X \neq 0 \text{in} \quad \mathfrak{k},\\ (Y,Y) &> 0 \quad \text{for} \quad Y \neq 0 \text{in} \quad \mathfrak{p}.\end{aligned}$$

$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の極大コンパクト部分代数である．[Ref. Helgason (1962); From A. Barut and R. Raczka (1986)] □

【定理 2.13 (Cartan 分解:実半単純 Lie 群)**】** G を中心有限な連結実半単純 Lie 群とし，その Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartain 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$ とする．このとき，$\mathscr{K}$ を Lie 代数 $\mathfrak{k}$ に対応する G の連結部分群，$\mathscr{P}$ を指数写像による線形空間 $\mathfrak{p}$ の像とすると，G は次のように表される：

$$G = \overline{\mathscr{P}\mathscr{K}}.$$

[Ref. Cartan (1929); From A. Barut and R. Raczka (1986)] □

2.2.4 岩沢分解

【定理 2.14 (Iwazawa 分解:実半単純 Lie 代数)**】** 実半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}$，$\mathfrak{h}_P$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分代数とする．このとき，$\mathfrak{h}_P \dotplus \mathfrak{n}_0$ が可解となる巾ゼロ部分代数 $\mathfrak{n}_0$ が存在し，$\mathfrak{g}$ は次のように分解される：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{h}_P \dotplus \mathfrak{n}_0.$$

[Ref. Helgason (1962); From A. Barut and R. Raczka (1986)] □

【定理 2.15 (Iwazawa 分解:実半単純 Lie 群)**】** 中心有限な連結実半単純 Lie 群 G に対して，その Lie 代数の岩沢分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{h}_P \dotplus \mathfrak{n}_0$，$\mathscr{K}$, $\mathscr{A}_P$，$\mathscr{N}$ を対応する G の連結部分群とする．このとき

$$G = \mathscr{K}\mathscr{A}_P\mathscr{N}$$

が成り立ち，各元 $g \in G$ は $\mathscr{K}$, $\mathscr{A}_P$，N に属する元を用いて一意的に表される．$\mathscr{A}_P$ と $\mathscr{N}$ は単連結となる．[Ref. Helgason (1962); From A. Barut and R. Raczka (1986)] □

2.3　局所コンパクト群

【定義 2.16 (局所コンパクト群)**】**　局所コンパクトな位相群を，局所コンパクト群という．位相群が局所コンパクトであるためには，単位元 e がコンパクト近傍を持つことが必要十分である．　□

【命題 2.17 (局所コンパクト群の性質)**】**　局所コンパクト群は次の性質を持つ：

i) 局所コンパクト群の閉部分群は，局所コンパクトである．

ii) 局所コンパクト群は σ-コンパクトな開部分群をもつ．

ii) 局所コンパクト群 G の閉部分群 H による商空間 G/H は，局所コンパクトかつパラコンパクトである．

iii) 局所コンパクトな群の族 $\{G_\alpha\}(\alpha \in A)$ の直積 $\prod_\alpha G_\alpha$ が局所コンパクトとなるためには，$\{G_\alpha\}$ が有限個を除きコンパクトとなることが必要十分である．

□

【定理 2.18 (R.Baire's Category Theorem)**】**　σ-コンパクトな局所コンパクト群 G が，局所コンパクト空間 X に推移的に作用し，任意の $x \in X$ に対して $g \mapsto gx$ により定義される写像 $\phi_x : G \to X$ が連続であるとする．このとき，任意の点 $x_0 \in X$ に対してその点の等方群を H_0 とすると，ϕ_{x_0} は同相写像 $\phi^*_{x_0} : G/H_0 \to X$ を引き起こす．特に，σ-コンパクトな局所コンパクト群 G から別の局所コンパク群 K の上への連続な代数的同型写像は同相写像である．□

【定義 2.19 (Haar measure)**】**　位相群 G 上の正の正則 Borel 測度 μ が，G の右作用（左作用）に対して不変であるとき，右（左）不変測度ないし右（左）Haar 測度という．　□

【定理 2.20 (A.Weyl:Haar measure の存在)**】**　任意の局所コンパクト群上には，ゼロでない右不変測度および左不変測度が，定数倍の自由度を除いて一意的に存在する．　□

【定義 2.21 (Modular function)**】** 群 G の任意の元 g に対して，右不変測度 μ の左移動は再び右不変測度となる：

$$(L_{g^{-1}}\mu)(E) := \mu(gE) = \Delta(g)\mu(E).$$

このとき，比例係数 $\Delta(g)$ は，$\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)$ より群 G の正実表現となり，**モジュラー関数**とよばれる．特に，$\Delta(g) \equiv 1$ となる群は，**ユニモジュラー群**とよぶ． $\square$

【定理 2.22】 可換な局所コンパクト群およびコンパクト群は，ユニモジュラー群である．すなわち，両側不変な Haar 測度を持つ． $\square$

【定理 2.23 (Mackey の分解定理)**】** G を可分な局所コンパクト群，K をその閉部分群とする．このとき，G の Borel 集合 S が存在して，G の任意の元 g は一意的な次の分解を持つ：

$$g = ks,\ k \in K,\ s \in S.$$

[Mackey, G.W. (1952) Ann. Math. **55**: 101-139] $\square$

2.4 コンパクト Lie 群

【定義 2.24 (コンパクト Lie 代数)**】** Lie 代数 L に正定値の内積 $< X, Y >$ で

$$< [X, Y], Z > + < Y, [X, Z] >= 0 \quad \forall X, Y, Z \in L$$

となるものが存在するとき，$\mathfrak{g}$ はコンパクトであるという． $\square$

【定理 2.25】 コンパクト Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，中心 N および単純イデアル $S_1, \cdots, S_n$ をもちいて次のように直和分解される：

$$\mathfrak{g} = N \oplus S_1 \oplus \cdots S_n.$$

$\square$

【定理 2.26】 コンパクト Lie 群の Lie 代数はコンパクトである．特に連結コンパクト Lie 群 G は，連結な中心 G_0 および連結な単純 Lie 部分群 $G_1, \cdots, G_n$ の直積として表される：

$$G = G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_n.$$

□

【定理 2.27】 任意の複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ はコンパクトな実型をもつ．すなわち，$\mathfrak{g}$ はあるコンパクトな実 Lie 代数の複素化と同型である． □

2.5 半単純 Lie 群

2.5.1 基本的性質

【定理 2.28 (Cartan の判定条件)**】** Lie 代数が半単純であるための必要十分条件は，その Killing 形式が非退化となることである． □

【定理 2.29 (自己同型群)**】** 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の微分作用素 D は常に適当な $X \in \mathfrak{g}$ を用いて $D = \mathrm{ad}(X)$ と表される．したがって，$\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の単位元を含む連結成分は，内部自己同型群 $I(\mathfrak{g})$ と一致する． □

2.5.2 複素半単純 Lie 代数の構造

【定義 2.30 (Cartan 部分代数:一般)**】** 体 K 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{h}$ が，i) $\mathfrak{h}$ はベキ零であって，ii)$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ における正規化部分代数が $\mathfrak{h}$ と一致するとき，$\mathfrak{h}$ を **Cartan 部分代数**という． □

【定義 2.31 (正則元)**】** Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して，$\mathfrak{g}(X) := \cup_{n\in\mathbb{N}} \ker(\mathrm{ad}(X))^n$ とおくとき，$\dim \mathfrak{g}(X)$ が最小となる $\mathfrak{g}$ の元 X を $\mathfrak{g}$ **の正則元**という． □

【定理 2.32 (Cartan 部分代数の存在と一意性)**】** ([松島 65])

i) X_0 を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の正則元とするとき，$\mathfrak{g}(X_0)$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数である．

ii) $\mathfrak{g}$ を代数的閉体 K 上の Lie 代数とする．このとき，$\mathfrak{g}$ の任意の Cartan 部分代数は正則元を含む．さらに，$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ を $\mathfrak{g}$ の 2 つの Cartan 部分代数とするとき，$\mathfrak{h}' = A(\mathfrak{h})$ となる $\mathfrak{g}$ の自己同型 A が存在する．

□

【定理 2.33 (Cartan 部分代数の判定条件)**】**　複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$\mathfrak{h}$ がその Cartan 部分代数であるための必要十分条件は，$\mathfrak{h}$ が極大可換部分代数でかつ半単純，すなわち $\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ 上への adjoint 表現が完全可約であることである．□

【注 2.34 (複素半単純 Lie 代数の Cartan 部分代数)**】**　$\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 代数とすると，その任意の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は，$\mathrm{Ann}(X) := \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}$ の次元が最小となり，$\ker(\mathrm{ad}(X)^2) = \ker(\mathrm{ad}(X)$ となる適当な元 X を用いて $\mathfrak{h} = \mathrm{Ann}(X)$ と表される．□

【定義 2.35 (ルート)**】**　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とするとき，$\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ の固有値

$$[X, E_\alpha] = \alpha(X) E_\alpha, \quad \forall X \in \mathfrak{h}$$

により決まる，$\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の元 α をルートと呼び，対応する固有空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ と表す．また，ゼロでないルートの全体を $\Delta(\subset \mathfrak{h}^*)$ と表す．□

【定理 2.36 (ルート分解の性質)**】**　$\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 代数とする．このとき，次が成り立つ：

i) $\alpha \in \Delta$ なら，$\mathfrak{g}_\alpha$ は 1 次元である．

ii) $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

と直和分解される．

iii) $\mathfrak{g}$ のキリング形式 κ は $\mathfrak{h}$ 上で非退化である．

iv) Δ は $\mathfrak{h}^*$ を張る．Δ により生成される実線形部分空間を $\mathfrak{h}^*_R$ とすると，キリング形式 κ は $\mathfrak{h}^*_R$ 上で正定値である．

v) $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して，$\alpha + \beta \neq 0$ ならば，$\mathfrak{g}_\alpha$ と $\mathfrak{g}_\beta$ はキリング形式 κ に関して直交する．また，$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}_\alpha$ も直交する．

□

【定義 2.37 (Cartan 計量)**】**　複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$\mathfrak{h}$ 上のキリング形式 κ から誘導される $\mathfrak{h}^*$ 上の内積を (α, β) として，$\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$< \beta, \alpha >>:= 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

とおく．また，$\mathfrak{h}^*$ から $\mathfrak{h}$ への線形写像 $\alpha \mapsto H_\alpha$ を

$$\beta(H_\alpha) = (\beta, \alpha) \quad \forall \beta \in \mathfrak{h}^*$$

により定義する．このとき，定義より $(\alpha, \beta) = (H_\alpha, H_\beta)$ がなりたつ．　□

【定理 2.38 (ルート系の性質と Weyl 基底)**】**　複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，次が成り立つ：

i) $\alpha \in \Delta$ なら $-\alpha \in \Delta$，かつ $m \neq \pm 1$ に対して，$m\alpha \notin \Delta$.

ii) $\beta \neq \pm\alpha$ となる $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して，p, q をそれぞれ $\beta - p\alpha, \beta + q\alpha \in \Delta$ となる最大の非負整数とする．このとき，$-p \leq m \leq q$ となる任意の整数 m に対して $\beta + m\alpha \in \Delta$，かつ $p - q =< \beta, \alpha >$ が成り立つ．

iii) （**Weyl 基底**) $\mathfrak{g}_\alpha$ の基底 E_α として，

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} H_\alpha & (\beta = -\alpha) \\ N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} & (\alpha + \beta \in \Delta) \\ 0 & (\alpha + \beta \notin \Delta, \neq 0) \end{cases}$$

となるものが取れる．ここで，p, q を ii) の非負整数として，$N_{\alpha,\beta}$ は次の条件を満たす数である：

$$N_{\alpha,\beta}^2 = \frac{q(p+1)}{2}(\alpha, \alpha), \quad N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}.$$

iv) $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して，$< \alpha, \beta >>$ は $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ のいずれかの整数である．

□

【定義 2.39 (単純ルートと基本ルート系)**】**　ルート系 Δ の部分集合 Π が次の性質を持つとき，Π を Δ の基本系，その元を単純ルートと呼ぶ：

i) Π は $\mathfrak{h}^*_R$ の基底となっている．

ii) どのルートも Π の元の整数係数の一次結合で表される．しかも，その係数はすべて非負か，すべて非正である．

基本系が存在するとき，Π に関する展開係数がすべて非負のものを正ルート，すべて非正のものを負ルートとよび，その集合をそれぞれ Δ^+，Δ^- と表す ($\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$). □

【定義 2.40 (ルート系の既約性)**】**　ルート系 Δ が互いに直交する部分集合 $\Delta_1, \Delta_2 (\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2)$ に分解できないとき，既約であるという． □

【定理 2.41 (複素半単純 Lie 代数の分類定理)**】**　複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のルート系 Δ は基本系を持つ．$\mathfrak{g}$ が既約であための必要十分条件は，Δ が既約であることである．複素単純 Lie 代数の同値類は，既約なルートの基本系に対する次の

Dynkin 図式で分類される：

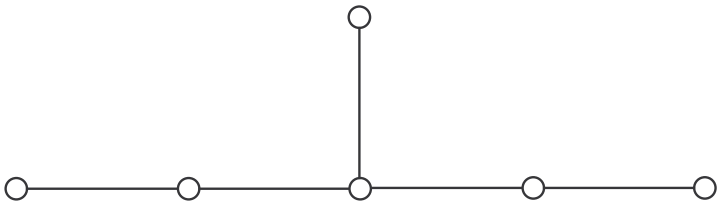
A_n

B_n

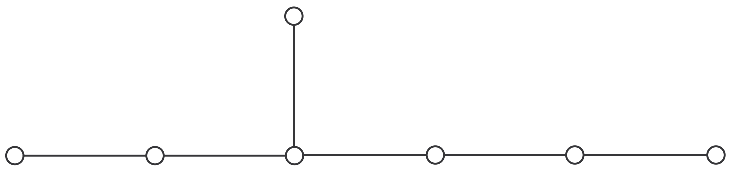
C_n

D_n

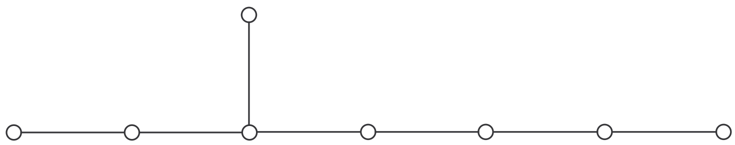
E_6



E_7



E_8



F_4

G_2

□

2.5.3 実単純 Lie 代数の分類

【定理 2.42】 すべての実単純 Lie 代数 $\mathscr{L}_r$ は，共通部分を持たない次の 2 つのクラスに分類される：

A. $\mathscr{L}_r$ の複素化 $\mathscr{L} = (\mathscr{L}_r)^{\mathbb{C}}$ が複素単純 Lie 代数となるもの．すなわち，複素単純 Lie 代数の実型.

B. 複素単純 Lie 代数 $\mathscr{L}$ と実 Lie 代数と見なしたもの.

クラス B の実単純 Lie 代数 $\mathscr{L}_r \cong_{\mathbb{R}} \mathscr{L}$ の複素化は単純でなく，$(\mathscr{L}_r)^{\mathbb{C}} \cong \mathscr{L} \oplus \bar{\mathscr{L}}$ と直和分解される．ここで，$\bar{\mathscr{L}}$ は $(\mathscr{L}_r)^{\mathbb{C}}$ における複素共役である．$\mathscr{L}_r$ の元は $X + \bar{X}$ と表される．[BR86] □

【定理 2.43】 すべての複素半単純 Lie 代数はコンパクトな実型をもつ．[BR86] □

【定理 2.44】 複素半単純 Lie 代数 $\mathscr{L}$ の互いに同型でないすべての実型は次の手続きで得られる．[BR86]

1. $\mathscr{L}_k$ を $\mathscr{L}$ のコンパクトな実型として，その同値でない involutive automorphism S をすべて求める.
2. 各 S に対して，$P^{\pm} = (1 \pm S)/2$ とおくと，$(P^+ + iP^-)\mathscr{L}_k$ が S に対応する実型を与える.

□

3　Lie 代数と Lie 群の表現

3.1　線形表現の一般論

【定義 3.1 (線形表現)**】**　局所凸複素線形位相空間 V の有界作用素の全体を $\mathscr{B}(V)$，その可逆元の作る部分集合を $\mathscr{B}^{\times}(V)$．また，V が Banach 空間のとき，ユニタリ作用素の全体を $\mathscr{U}(V)$ とする．位相群 G から $\mathscr{B}^{\times}(V)$ への代数的準同型 $g \mapsto T_g$ が強連続，すなわち任意の $v \in V$ に対して $G \to T_g v$ が連続なとき，組 $R = (V, T)$ を G の V への線形表現という．特に，V が Hilbert 空間のとき，$T_g \in \mathscr{U}(V) (\forall g \in G)$ となる線形表現をユニタリ表現という．　□

【定義 3.2 (既約表現)**】**　局所凸線形位相空間 $\mathscr{V}$ の有界作用素の族 $\mathfrak{A}(\subset \mathscr{B}(\mathscr{V})$ に対して，$\mathscr{V}$ の線形部分空間 $\mathscr{L}$ に対して $\mathfrak{A}\mathscr{L} \subset \mathscr{L}$ となるとき，$\mathfrak{A}$ 不変空間という．特に，群 G の線形表現 $(\mathscr{V}, T)$ に対して，$\{T_g \mid g \in G\}$ の不変空間を G 不変空間という．さらに，有界作用素の族 $\mathfrak{A}$ が既約とは，$\mathscr{V}$ の閉 $\mathfrak{A}$ 不変空間が $\{0\}$ と $\mathscr{V}$ 以外の存在しないことをいう．特に，$\{T_g\}$ が既約なとき，G の表現 $(\mathscr{V}, T)$ が既約であるという．　□

【定理 3.3 (実代数とその複素化の複素解析的表現の関係)**】**　実代数 $\mathscr{A}$ の複素表現が複素既約であることと，それから誘導される $\mathscr{A}$ の複素化 $\mathscr{A}^{\mathbb{C}}$ の複素解析的表現が複素既約であることは同値である．　□

【定理 3.4 (実代数の実既約表現と複素既約表現の関係：有限次元)**】**　実代数 $\mathscr{A}$ の有限次元実線形空間 $\mathscr{V}$ への表現 $\rho : \mathscr{A} \rhd \mathscr{V}$ が実表現として既約の時 $\mathbb{R}$-既約，$\mathscr{V}$ が複素構造 J をもち $J\rho(a) = \rho(a)J\ \forall a \in \mathscr{A}$ が成り立ち，$\mathscr{V}$ が自明なものを除いて J 不変な ρ-不変部分空間を持たないとき J-既約と呼ぶことにする．

1) $\mathscr{V}$ が複素構造 J をもち，$\rho : \mathscr{A} \rhd \mathscr{V}$ が J-表現とする．このとき，ρ の複素化 $\rho^{\mathbb{C}} : \mathscr{A} \rhd \mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ は i-可約かつ J-可約で，2 つの表現 $\rho_{\pm}$ の直和となる：$\rho^{\mathbb{C}} \cong_{\mathbb{R}} \rho_+ \oplus \rho_-$．$\rho$，$\rho_{\pm}$ の間には，$\rho_+ \cong_{\mathbb{R}} \rho_- \cong_{\mathbb{R}} \rho$ および $\rho_+ \cong_{\mathbb{C}} \rho, \bar{\rho}_- \cong_{\mathbb{C}} \rho$ が成り立つ．

2) $\mathscr{V}$ が複素構造をもち，$\rho : \mathscr{A} \rhd \mathscr{V}$ が J-既約であるが $\mathbb{R}$-可約であるとする．このとき，ρ は互いに $\mathbb{R}$ 同値な $\mathbb{R}$-既約な実表現 $\rho_1 \cong_{\mathbb{R}} \rho_2$ の直和 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ に分解され，$\rho \cong_{\mathbb{C}} \rho_1^{\mathbb{C}}$ となる．

3) $\mathscr{A}$ の $\mathbb{R}$-既約表現は，その複素化が $\mathbb{C}$-可約なものと $\mathbb{C}$-既約なものの 2 つのクラスに分類される．前者は，すべて $\mathscr{A}$ の $\mathbb{C}$-既約のうち $\mathbb{R}$-既約なものを $\mathbb{R}$-表現と見なしたものとして得られ，同じ $\mathbb{R}$-既約表現に対応する $\mathbb{C}$-表現は $\mathbb{C}$-同値でなければ互いに複素共役である．一方，後者はすべて $\mathscr{A}$ の $\mathbb{C}$-既約のうち $\mathbb{R}$-可約なものの $\mathbb{R}$-既約成分として得られ，もとの $\mathbb{C}$-既約表現はその複素化と $\mathbb{C}$ 同値である．

□

【定理 3.5 (複素 Lie 群とその実型の複素表現)**】** 複素 Lie 群 G の複素解析表現が既約であるための必要十分条件は，G の実型への制限が既約であることである． □

【定理 3.6 (実 Lie 群の実表現と複素表現の関係)**】** 実 Lie 群 G の実線形表現を (ρ, V)，それから誘導される複素表現を $(\rho, V^{\mathbb{C}})$ とする．$(\rho, V^{\mathbb{C}})$ が既約なら，(ρ, V) は既約である．逆に，(ρ, V) が既約であるとき，$(\rho, V^{\mathbb{C}})$ が既約であるための必要十分条件は，(ρ, V) 自身が複素表現の構造を持たないこと，すなわち V の複素構造 J で ρ と可換なものが存在しないことである．(ρ, V) が既約複素表現 (ρ', W) と実表現として同型であるとき，$(\rho, V^{\mathbb{C}})$ は (ρ', W) と同型な複素表現とその複素共役表現の直和となる． □

【定理 3.7 (実 Lie 群の実既約表現)**】** 実 Lie 群 G の複素既約表現が実表現として可約なら，実表現として同型な既約表現の直和に分解され，もとの複素表現は実既約成分の複素化と同型である．このようにして得られる実既約表現はもとの複素既約表現が複素同型なら実同型である．したがって，実 Lie 群 G のすべての実既約表現は互いに同値でないつぎの 2 つのクラスに分類される．

1) G の複素既約表現で実表現としても既約なもの．互いに複素同型でない複素既約表現からこのようにして得られる実表現が同値となることがある．

2) 実表現として可約な G の複素既約表現の実既約成分.

□

【注 3.8 (実 Lie 群の複素既約表現の分類)**】**　上記の定理より，実 Lie 群の複素既約表現はその複素化の複素既約表現と一対一に対応する．実単純 Lie 群 G_r が複素単純 Lie 群 G の実型の場合，後者は G の複素解析的既約表現と一対一に対応する．一方，G_r が複素単純 Lie 群 G を実 Lie 群と見なしたものの場合は，G_r の複素化は G と同型な複素単純 Lie 群 G_1 と G_2 の直積となり，G_r の G への埋め込みは，G から G_1 への複素同型と G_2 への複素半同型の積となる．したがって，G_r の複素既約表現は，G の複素解析的既約表現と複素半解析的既約表現のテンソル積で与えられる．□

【定理 3.9】　G を単連結 Lie 群，T を G の有限次元既約表現，N を G の連結可解正規部分群とする．このとき，N の任意の元 n に対して

$$T_n = \chi(n)I$$

が成り立つ．ここで，$\chi(n)$ は次の性質をもつ N の指標である．

$$\chi(g^{-1}ng) = \chi(n).$$

□

【定理 3.10】　単連結 Lie 群 G の極大可解正規部分群を R，G の半単純 Levi 因子を G_s とする ($G = R \rtimes G_s$)．このとき，G の任意の有限次元既約表現 T は，G_s 上で恒等的に 1 となり $\chi(g^{-1}rg) = \chi(r)(\forall g \in G, \forall r \in R)$ を満たす G の指標 χ と半単純群 G_s のある既約表現 T_s を用いて，$T = \chi \otimes T_s$ と表される．□

3.2　可換群

【定理 3.11】　可換群の複素既約ユニタリ表現はすべて 1 次元である．□

【定義 3.12 (可換群の指標)**】**　可換な局所コンパクト群 G に対して，G 上の複素連続関数 χ で

$$\chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2), \quad |\chi(g)| = 1$$

を満たすものを指標という．指標の全体 $\hat{G}$ は再び局所コンパクト可換群とり，指標群と呼ばれる．□

【定理 3.13 (Stone, Naimark, Ambrose, Godement の定理)**】** T_g を局所コンパクト可換群 G のユニタリ表現とすると，T_g は指標群 $\hat{G}$ 上の適当なスペクトル測度 E を用いて

$$T_g = \int_{\hat{G}} \chi(g) dE(\chi)$$

と表される．□

3.3 可解群

【定理 3.14 (Lie)**】** 連結可解位相群の有限次元既約複素表現は 1 次元表現のみである．[BR86] □

【定理 3.15】 連結可解位相群の有限次元表現 (T, V) は，$\dim V = r$ とするとき，指標列 $\chi_1, \cdots, \chi_r$ を対角成分とする下方三角型行列による成分表示を持つ：[BR86]

$$T_g = \begin{pmatrix} \chi_1(g) & & & & \\ & \chi_2(g) & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & \chi_r(g) \end{pmatrix}.$$

□

3.4 半単純 Lie 群

【定理 3.16】 連結非コンパクト半単純 Lie 群は自明なものを除いて，忠実な有限次元ユニタリ表現を持たない．□

【定理 3.17】 連結半単純 Lie 群の有限次元表現は完全可約である．□

3.5　複素半単純 Lie 代数の有限次元既約表現

3.5.1　ウェイト系の方法

以下，$\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 代数，Δ をルート系，Π をその基本系，$\mathfrak{g}$ のルート分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

とする．

【定義 3.18 (ウエイト)**】**　(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の線形表現とする．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，V の線形部分空間 V_λ を

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \rho(X)v = \lambda(X)v \quad \forall X \in \mathfrak{h}\}$$

で定義し，$V_\lambda \neq 0$ のとき λ を表現 ρ のウエイトという．ρ のウエイトの全体を Λ_ρ と書く．□

【定理 3.19】　(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の線形表現とするとき，$\alpha \in \Delta$，$\lambda \in \Lambda_\rho$ に対して，

$$\rho(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}.$$

特に，V が有限次元のとき，$\lambda + \alpha \in \Lambda_\rho$ ならば，$\rho(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \neq 0$．□

【定理 3.20 (ウエイト系の性質)**】**　(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とするとき，$\alpha \in \Delta$，$\lambda \in \Lambda_\rho$ に対して，$\lambda + m\alpha \in \Lambda_\rho$ となる最大の整数 m を q，最小の整数を $-p$ とすると，$-p \leq m \leq q$ となる任意の整数 m に対して $\lambda + m\alpha \in \Lambda_\rho$ で，しかも次の式が成り立つ：

$$p - q = < \lambda, \alpha > .$$

特に，$< \lambda, \alpha >$ は整数で，$\lambda - < \lambda, \alpha > \alpha \in \Lambda_\rho$．□

【定義 3.21 (巡回表現と原始ベクトル)**】**　複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の線形表現 (ρ, V) に対して，あるウェイト $\lambda \in \Lambda_\rho$ とベクトル $v \in V_\lambda$ が存在して，

$$\rho(\mathfrak{g}_\alpha)v = 0, \quad \forall \alpha \in \Delta^+$$

が成り立ち，かつ v を含む ρ 不変な V の真部分空間が存在しないとき，(ρ, V) を (λ, v)-**巡回表現**，v を**原始ベクトル**と呼ぶ．□

【定義 3.22 (最高ウエイト)**】**　$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ に,

$$\mu \geq \nu \quad \Leftrightarrow \quad \mu - \nu = \sum_{\alpha_i \in \Pi} k_i \alpha_i, k_i \geq 0$$

により半順序を定義する．ことのき，線形表現 (ρ, V) のウエイト系 Λ_ρ において，$\geq$ に関する最大ウェイト λ が存在するとき，λ を**最高ウエイト**という．□

【定理 3.23 (巡回表現の性質)**】**　(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の（有限ないし無限次元の）(λ, v)-巡回表現とする．このとき，次の性質が成り立つ：

i) λ は最高ウエイトで，$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ とするとき，任意のウエイト $\omega \in \Lambda_\rho$ は非負の整数 $m_1, \cdots, m_l$ を用いて，$\omega = \lambda - m_1\alpha_1 - \cdots - m_l\alpha_l$ と表される．

ii) すべてのウエイト $\omega \in \Lambda_\rho$ に対して，V_ω は有限次元である．さらに，$\dim V_\lambda = 1$ である．

iii) $\Delta^- = \{\beta_1, \cdots, \beta_N\}$ とするとき，V は，$k_1, \cdots, k_N$ を非負整数として，$\rho(E_{\beta_1})^{k_1} \cdots \rho(E_{\beta_N})^{k_N} v$ の形の元で生成される．特に，V は $V_\omega(\omega \in \Lambda_\rho)$ の直和である．

iv) V の ρ 不変部分空間 U で，ρ が V/U 上既約となるものが一意的に存在する．

□

【定理 3.24 (既約巡回表現の存在および最高ウエイトとの対応)**】**　任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，λ を最高ウエイトとする $\mathfrak{g}$ の既約巡回表現が存在する．さらに，$\mathfrak{g}$ の２つの（有限ないし無限次元）既約巡回表現が同値であるための必要十分は，最高ウエイトが一致することである．□

【定理 3.25 (既約表現と巡回表現の対応)**】**　$\mathfrak{g}$ の（有限ないし無限次元の）既約表現 (ρ, V) が最高ウエイトを持てば，(ρ, V) は巡回表現である．とくに，有限次元既約表現は必ず巡回表現である．□

【定義 3.26 (基本整ウエイト，支配的整ウエイト)**】**　ルートの基本系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ に対して，**Cartan 行列** $C_{ij} :=< \alpha_i, \alpha_j >$ を用いて

$$\lambda^i := \sum_j (C^{-1})^{ij} \alpha_j$$

により定義される $\mathfrak{h}^*$ の基底 $\lambda^i (i = 1, \cdots, l)$ を**基本整ウエイト**と呼ぶ．さらに，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が非負整数 $m_1, \cdots, m_l$ を用いて $\lambda = m_1\lambda^1 + \cdots + m_l\lambda^l$ と表されるとき，λ を**支配的整ウエイト**と呼び，その全体を Λ^+ と表す．$\lambda \in \Lambda^+$ は，すべての単純ルートに対して $< \lambda, \alpha_i >$ が非負整数となることと同等である． □

【定理 3.27 (有限次元既約表現と支配的整ウエイトの対応)**】** $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，λ を最高ウエイトとする $\mathfrak{g}$ の既約表現が有限次元となるための必要十分条件は，λ が支配的整ウエイト，すなわち $\lambda \in \Lambda^+$ となることである．したがって，$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元既約表現は Λ^+ により完全に分類される． □

【定義 3.28 (Weyl 群)**】** ルート $\alpha \in \Delta$ から定義される $\mathfrak{h}^*$ の変換

$$\sigma_\alpha : \lambda \mapsto \lambda - < \lambda, \alpha > \alpha$$

は，α に垂直な平面に対する反転となる．変換 $\sigma_\alpha (\alpha \in \Delta)$ の全体で生成される $\mathfrak{h}^*$ の有限変換群を Δ の **Weyl 群** $\mathscr{W}$ と呼ぶ． □

【定理 3.29 (ウエイト系の Weyl 群に対する不変性)**】** $\lambda \in \Lambda^+$ を最高ウエイトとする既約表現 (ρ, V) に対して，Λ_ρ は Weyl 群 $\mathscr{W}$ で不変であり，$\sigma \in \mathscr{W}$，$\mu \in \Lambda_\rho$ に対して，

$$\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}.$$

□

3.5.2 誘導表現の方法

【定義 3.30 (右正則表現)**】** 群 G に対して，その上の関数の集合を $\mathscr{F}(G)$ とする．このとき，$g \in G$ に $\mathscr{F}(G)$ の線形変換

$$R : f \mapsto R_g f; \quad f \in \mathscr{F}(G), (R_g f)(x) = f(xg)(x \in G)$$

を対応されることにより得られる表現を，G の**右正則表現**と呼ぶ． □

【命題 3.31 (既約表現の正則表現への埋め込み)**】** G を位相群，$g \mapsto T_g$ を G の位相線形空間 V 上への既約表現とする．V の双対空間 V^* の勝手な元 v を用いて，V から $C(G)$ への写像 $\Phi : u \mapsto f_u$ を

$$f_u(g) = \langle T_g u, v \rangle$$

により定義する．このとき次の定理が成り立つ．[BR86]

1. Φ は一対一の線形写像で，既約表現 (T,V) を $C(G)$ 上の右正則表現の既約部分表現 $(R,\Phi(V))$ に写す．すなわち，位相群の任意の既約表現は右正則表現の既約成分として実現される．
2. V が有限次元 n を持つとき，その基底 u_i および V^* の双対基底 v^i に関する T_g の成分を $D_i^l(g)=\langle T_g u_i, v^l\rangle$ とする．このとき，固定した l に対して，$e_i(g)=D_i^l(g)$ $(i=1,\cdots,n)$ は $\Phi(V)$ の基底となる．

$\square$

【定義 3.32 (Gauss 分解の対角因子の指標から誘導される既約表現)**】** Lie 群 G が Gauss 分解

$$G=\overline{\mathscr{Z}DZ}$$

を持つとする．χ を可解群 $K=\mathscr{Z}D$ の 1 次元表現，すなわち指標関数とし，V^χ を次のような $C(G)$ の線形集合とする：

$$V^\chi=\{f\in C(G)\mid\ f(kg)=\chi(k)f(g)\forall k\in K,\forall g\in G\}.$$

このとき，V^χ は G の $C(G)$ 上への右正則表現の不変部分空間となり，$g\in G$ の Gauss 分解を $g=\zeta\delta z$ とすると，$f\in V^\chi$ に対して

$$f(g)=f(\zeta\delta z)=\chi(\delta)f(z)$$

が成り立つ．逆に，任意の $f(z)\in C(Z)$ に対して，この式により定義された G 上の関数 $f(g)$ は V^χ に属する．したがって，V^χ と $C(Z)$ は一対一に対応する．この対応により得られる G の $C(Z)$（ないし V^χ）の上への表現 R^χ を χ **から誘導された表現**と呼ぶ．$z\in Z$，$g\in G$ に対して，zg の Gauss 分解を $zg=\tilde{\zeta}\tilde{\delta}\tilde{z}$ とおくと，R^χ は具体的に

$$(R^\chi(g)f)(z)=\chi(\tilde{\delta})f(\tilde{z})$$

と表される．さらに，R^χ の既約成分のうち，$f(z)\equiv 1$ を含む部分空間 V_0^χ への既約表現を，χ **から誘導される既約表現**と呼ぶ． $\square$

【定理 3.33 (有限次元既約表現に対する Gauss 分解の対角因子の指標と最高ウエイトの対応)**】** G を Gauss 分解 $\overline{\mathscr{Z}DZ}$ を持つ Lie 群とする．このとき，G の任意の有限次元既約表現 ρ は，任意の $z\in Z$ に対して $\rho(z)$ で不変となるベクトル (highest vector)u_0 をただ一つ持ち，任意の $\delta\in D$ に対して $\rho(\delta)u_0=\chi(\delta)u_0$ と

なる．この指標関数 χ(highest weight) から誘導される既約表現は ρ と同型となる．二つの既約表現は，対応する最高の重みが一致するとき，かつそのときにのみ同型となる．最高の重みが χ のとき，既約誘導表現の表現空間 V_0^χ は

$$f_g(z) = \chi(\tilde{\delta}); zg = \tilde{\zeta}\tilde{\delta}\tilde{z}$$

により張られる $C(Z)$ の部分空間となる．[BR86] □

【命題 3.34 (有限次元既約に対する指標の部分群への制限)**】** Lie 群 G が Gauss 分解 $G = \overline{\mathscr{Z}DZ}$ をもち，その部分 Lie 群 G_0 の Gauss 分解が $G_0 = \overline{\mathscr{Z}_0 D_0 Z_0}$ ($\mathscr{Z}_0 = \mathscr{Z} \cap G_0, D_0 = D \cap G_0, Z_0 = Z \cap G$) で与えられるとする．このとき，$D$ の指標 χ が G の有限次元既約表現を誘導するならば，χ の D_0 への制限 χ_0 は G_0 の有限次元既約表現を誘導する．[BR86] □

3.6 コンパクト群の既約表現：表現環

【定義 3.35】 群 G，体 K に対して，G-K-加群の G-K-同値類の全体 $M_K(G)$ は $[K]$ を単位元とする可換半環となる．その Grothendieck 環を $(R_K(G), \phi_G)$ とするとき，$R_K(G)$ を G の体 K 上の**表現環**と呼ぶ．$K = \mathbb{R}$ のとき，$R_K(G)$ を $RO(G)$ と，また，$K = \mathbb{C}$ のとき，$R_K(G)$ を単に $R(G)$ と表す． □

【定義 3.36】 群 G に対して，G 上の K に値を取る連続関数全体の作る可換環 $C_K(G)$ において，K-指標全体の生成する部分環 $ch_K(G)$ を G の **K-指標環**と呼ぶ． □

【命題 3.37】 コンパクト群 G に対して，表現環 $R_K(G)$ は K-指標環 $ch_K(G)$ に同型で，既約 G-K-加群の同値類，あるいは対応する指標を基底とする自由加群となる． □

【命題 3.38】 コンパクト群 G に対して，複素化写像 $c : RO(G) \to R(G)$ は単射である． □

【定義 3.39】 位相群 G の閉部分群 T がトーラスで,

$$G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$$

となるとき,T を**極大トーラス**と呼ぶ. $\square$

【命題 3.40】 極大トーラスは,トーラス部分群の包含関係に関して極大である.群 G が弧状連結コンパクト Lie 群の時,この逆が成り立つ.特に,弧状連結コンパクト Lie 群は極大トーラスを持つ. $\square$

【定義 3.41】 位相群 G が極大トーラス T を持つとき,T の G における正規化群 $N_T(G)$ の T による剰余群

$$W(G) = N_T(G)/T$$

を **Weyl 群**という. $\square$

【定理 3.42】 G を極大トーラス T を持つコンパクト群とする.このとき,包含写像 $j : T \to G$ から誘導される環準同型

$$j^* : R_K(G) \to R_K(T)$$

は単射である.さらに,Weyl 群 $W(G)$ の定義する T の同型

$$h_\omega t = w^{-1}tw \quad \omega = [w](w \in N_T(G)), t \in T$$

から誘導される,$W(G)$ の $R_K(T)$ への作用 h_ω^* に対して不変な $R_K(T)$ の元の集合を $R_K(T)^{W(G)}$ とすると,$j^*(R_K(G))$ は $R_K(T)^{W(G)}$ に含まれる.弧状連結なコンパクト Lie 群に対しては

$$j^*(R(G)) = R(T)^{W(G)}$$

である. $\square$

3.7 誘導ユニタリ表現

【定義 3.43 (準不変測度)**】** G を局所コンパクト群，X を局所コンパクト空間とし，G が X に右から作用するとする．このとき，X の Borel 測度 μ が，任意の $g \in G$ に対して $\mu_g := R_g d\mu \sim d\mu$（同値）となるとき，$\mu$ を準不変測度という． □

【定理 3.44 (準不変測度の存在)**】** G を局所コンパクト群，H を G の閉部分群，$X = H\backslash G$ とする．

i) X 上には準不変測度で，Radon-Nikodym 微分 $d\mu_g(x)/d\mu(x) = d\mu(xg)/d\mu(x)$ が $G \times X$ 上の連続関数となるものが存在する．

ii) 任意の 2 つの準不変測度は同値である．

iii) 任意の準不変測度 μ は，Δ_G と Δ_H をそれぞれ G と H のモジュラー関数として，条件

$$\rho(hg) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho(g) \quad \forall h \in H$$

を満たす適当な正値局所可積分 Borel 関数 $\rho(g)$ を用いて

$$\int_G f(g)\rho(g)dg = \int_X d\mu(\dot{g}) \int_H f(hg)dh, \quad \dot{g} \equiv Hg,$$

と表される．ここで f は任意の G 上のコンパクト台の関数である．μ は ρ により定数倍を除いて一意的に決まり，次の条件を満たす．

$$d\mu(\dot{g}a) = \omega_a(\dot{g})d\mu(\dot{g});\ \omega_a(\dot{g}) = \frac{\rho(ga)}{\rho(g)}.$$

□

【定義 3.45 (誘導表現)**】** G を局所コンパクト群，K をその閉部分群，$\tau = (\mathscr{H}, L_k)$ を K の $\mathscr{H}$ 上へのユニタリ表現とする．右 G 空間 $X = K\backslash G$ 上の準不変計量を μ として，G 上の $\mathscr{H}$ に値を取る関数 $u(g)$ で次の条件を満たすものの全体を $\mathscr{H}^\tau$ とする：

i) 任意の $v \in \mathscr{H}$ に対して，$(u(g), v)$ は G 上の関数として Borel 可測．

ii) $u(kg) = L_k u(g), \quad \forall k \in K, \forall g \in G.$

iii) $\|u(g)\| \in L^2(X,\mu)$.

このとき，$u,v \in \mathscr{H}^\tau$ に対して，$(u(g),v(g))$ は $\dot{g} \in X$ にのみ依存し μ 可積となる．そこで，

$$(u,v) := \int_X (u(g),v(g))d\mu(\dot{g})$$

により内積を定義すると，$\mathscr{H}^\tau$ は Hilbert 空間となる．このとき，G の右作用に対する μ の Radon-Nikodym 微分を

$$\omega_g(x) := d\mu(xg)/d\mu(x), \quad x \in X, g \in G$$

とおくと，

$$(U_g u)(h) := \omega_g^{1/2}(\dot{h})u(hg)$$

により定義される U_g は G の $\mathscr{H}^\tau$ 上へのユニタリ表現 $(\mathscr{H}^\tau, U_g)$ を与える．これを K のユニタリ表現 τ から誘導された G のユニタリ表現といい，$\mathrm{ind}_K^G\tau$ と表す．

同様に，左 G 空間 $Y = G/K$ とその準不変計量 ν に対して，上記の条件で ii) を

ii)' $u(gk) = L_k^{-1}u(g)$

で置き換えて得られる Hilbert 空間 $\hat{H}^\tau$ に対して，

$$\hat{\omega}_g(y) := d\mu(g^{-1}y)/d\mu(y), \quad y \in Y, g \in G,$$
$$(\hat{U}_g\hat{u})(h) := \hat{\omega}_g^{1/2}(\dot{h})\hat{u}(g^{-1}h)$$

とおくと，左正則表現に対応する誘導表現 $\mathrm{ind}_K^G\hat{\tau}$ が得られる．

G がユニモジュラーのとき，右誘導表現と左誘導表現はユニタリ同値で，

$$(Ju)(g) = u(g^{-1})$$

により定義される包合的ユニタリ写像 J により

$$J\hat{U}J^{-1} = U$$

で結ばれる． □

【注 3.46】 誘導表現 $\mathrm{ind}_K^G\tau$ は，K のユニタリ表現 $\tau = (\mathscr{H}, L_k)$ から主ファイバー束 $(G, K\backslash G, K)$ に随伴した $\mathscr{H}$ をファイバーとするベクトルバンドル $\mathscr{H} \times_\tau G$ の大域断面の空間 $\Gamma(\mathscr{H} \times_\tau G)$ に G の右作用から自然に誘導される表現である． □

【定理 3.47 (等質空間上の関数空間での表示)**】** G の Mackey 分解を $G=K\times S\ni g=k_g s_g$ とおくと，対応

$$u\in\mathscr{H}^\tau\mapsto\tilde{u}(\dot{g}):=L_{k_g}^{-1}u(g)$$

により，$\mathscr{H}^\tau$ は $L^2(X,\mu,\mathscr{H})$ と同型となる．$\mathrm{ind}_G^K\tau$ は $L^2(X,\mu,\mathscr{H})$ 上で，

$$(U_g\tilde{u})(x)=\omega_g^{1/2}(x)L(x,g)\tilde{u}(xg)$$

と表される．ここで，

$$L(x,g):=L_{k_h}^{-1}L_{k_{hg}},\quad x=\dot{h}\in X=K\backslash G$$

である．

同様に，Mackey 分解 $G=S\times K$ に対して，対応

$$u\in\hat{\mathscr{H}}^\tau\mapsto\tilde{u}(\dot{g}):=L_{k_g}u(g)$$

により，$\hat{\mathscr{H}}^\tau$ は $L^2(Y,\nu,\mathscr{H})$ と同型となる．$\mathrm{ind}_G^K\hat{\tau}$ は $L^2(Y,\nu,\mathscr{H})$ 上で，

$$(U_g\tilde{u})(y)=\hat{\omega}_g^{1/2}(y)\hat{L}(y,g)\tilde{u}(g^{-1}y)$$

と表される．ここで，

$$\hat{L}(y,g):=L_{k_h}L_{k_{g^{-1}h}}^{-1},\quad y=\dot{h}\in Y=G/K$$

である． □

【定理 3.48 (基本性質)**】** 誘導表現に対して次が成り立つ．

i) $\overline{\mathrm{ind}_K^G\tau}=\mathrm{ind}_K^G\bar{\tau}$（共役表現）.

ii) $\mathrm{ind}_K^G(\tau_1\oplus\tau_2)=\mathrm{ind}_K^G\tau_1\oplus\mathrm{ind}_K^G\tau_2$. さらに，一般に $\tau=\int\tau(s)d\mu(s)$ のとき，$\mathrm{ind}_K^G\tau=\int\mathrm{ind}_K^G\tau(s)d\mu(s)$.

iii) $H\subset K\subset G$ に対して，$\mathrm{ind}_K^G(\mathrm{ind}_H^K\tau)=\mathrm{ind}_H^G\tau$.

iv) $\mathrm{ind}_{K_1\otimes K_2}^{G_1\otimes G_2}\tau_1\otimes\tau_2=\mathrm{ind}_{K_1}^{G_1}\tau_1\otimes\mathrm{ind}_{K_2}^{G_2}\tau_2$

□

【定義 3.49 (imprimitivity)**】** $\rho = (\mathscr{H}, U_g)$ を G のユニタリ表現，E を右 G 空間 X 上の $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ に値を取るスペクトル測度とする．E が X の任意の Borel 集合 Z に対して

$$U_g E(Z) U_g^{-1} = E(Zg^{-1}), \quad \forall g \in G$$

と変換するとき，E を X を底空間とする ρ の imprimitivity 系という．一般に，ユニタリ表現が imprimitivity 系を持つとき，imprimitive という．

局所コンパクト群 G とその閉部分群 K に対して，その右誘導表現 $\mathrm{ind}_K^G \tau$ から $X = K\backslash G$ 上の imprimitivity 系 E^τ が

$$(E^\tau(Z)u)(g) := \chi_Z([g])u(g)$$

により定義される．これを標準 imprimitivity 系とよぶ． □

【定義 3.50 (Gøarding domain)**】** $U : G \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ を局所コンパクト群のユニタリ表現とするとき，

$$D_G = \mathrm{span}\left\{ u(\phi) = \int_G \phi(g) U_g u \,\middle|\, u \in \mathscr{H}, \phi \in C_0(G) \right\}$$

で定義される $\mathscr{H}$ の線形集合を Gøarding domain という．D_G は $\mathscr{H}$ で密であり，かつ G の作用で不変である． □

【定理 3.51 (Imprimitivity 定理)**】** G を局所コンパクト群，K をその閉部分群，$X = K\backslash G$ とする．G のユニタリ表現 $\rho = (\mathscr{H}, U_g)$ と $*$ 線形写像 $E : C_0(X) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ が存在して，$E[C_0(X)]\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}$ において密で，かつ次が成り立つとする：

$$U_g E(\phi) U_g^{-1} = E(T_g^R \phi), \quad g \in G, \phi \in C_0(X).$$

このとき，適当な K のユニタリ表現 τ が存在して，$(\rho, E) \cong (\mathrm{ind}_K^G \tau, E^\tau)$ となる．ここで，E^τ は標準 imprimitivity 系である．

また，K の二つのユニタリ表現 τ, τ' に対して次が成り立つ：

$$\tau \cong \tau' \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{ind}_K^G \tau, E^\tau) \cong (\mathrm{ind}_K^G \tau', E^{\tau'}).$$

□

【定義 3.52 (正則半直積)**】** N, S は局所コンパクト群で N は可換群とする．半直積 $G = N \rtimes S$ において，N の指標群 $\hat{N}$ を G の共役変換により G 空間とみなす．このとき，$\hat{N}$ の G 軌道の合併からなる $\hat{N}$ の Borel 集合の列 $Z_1, Z_2, \cdots$ が存在して，各 G 軌道が常にそれらの部分族の共通部分として表されるとき，G は N と S の正則半直積であるという． □

【定理 3.53】 N, S は可分局所コンパクト群で N は可換群とする．このとき，それらの正則半直積 $G = N \rtimes S$ の任意の既約ユニタリ表現は次のようにして得られる．まず，$\hat{N}$ の G 軌道 $\hat{O}$ とその元 χ を一つずつ取る．次に，G の共役変換に対する χ での等方群を $N \rtimes S_{\hat{O}}$ として（$\hat{O} \approx S/S_{\hat{O}}$），$S_{\hat{O}}$ の既約ユニタリ表現 $\tau = (\mathscr{H}, L_s)$ を一つ取り，それから誘導される S の $\mathscr{H}^{\chi L} = L^2(\hat{O}, \mu; \mathscr{H})$ 上のユニタリ表現を $\mathrm{ind}_{S_{\hat{O}}}^{S} \tau = (\mathscr{H}^{\chi L}, U_s^L)$ とする．このとき，

$$U_{(n,s)} u(\hat{n}) := \langle \hat{n}, n \rangle U_s^L u(\hat{n}), \quad \hat{n} \in \hat{N}$$

とおくことにより，G の $\mathscr{H}^{\chi L}$ 上への既約ユニタリ表現が得られる．ここで，同じ軌道 $\hat{O}$ 上の異なるベクトル χ から得られる表現は互いにユニタリ同値であるが，異なる軌道に対応する表現は同値でない． □

3.8 Poincare 群のユニタリ表現

【定理 3.54】

1) 固有 Poincare 群の普遍被覆群 $G = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は，G の部分群 $\mathbb{R}^4$ の既約ユニタリ表現の空間 $\hat{\mathbb{R}}^4 \cong \mathbb{R}^4$ に自然に左から作用する：

$$G \ni (a, V) \rhd \hat{\mathbb{R}}^4 : \ (a, V)p = \Lambda(V)p, \quad V\sigma_a V^\dagger = \sigma_b \Lambda^b{}_a.$$

この作用に関する軌道を $\hat{O}$，$\hat{O}$ の点 $\hat{p}_0$ における等方群を $H = \mathbb{R}^4 \ltimes K (K \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ とする．このとき，G の既約ユニタリ表現は，軌道 $\hat{O}$ および K の既約ユニタリ表現の組と一対一に対応する．K の既約ユニタリを $L : K \rhd \hat{\mathscr{H}}$，$\hat{\mathscr{H}}$ に値を取り，$\hat{O} \cong G/K$ の普遍測度 μ に関して 2 乗可積分可能な関数の集合を $\mathscr{H} = L_2(\hat{O}, \hat{H}; \mu)$，$K$ の Mackey 分解を $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = SK \ni g = s_g k_g$ とするとき，対応する G の既約ユニタリ表現 $U : G \rhd \mathscr{H}$ の具体的な表式は

$$(U_g v)(p) = e^{ip \cdot a} L_{k_h} L^{-1}_{k_{g^{-1}h}} v(g^{-1}p)$$

で与えられる．ここで，h は $p = \dot{h} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/K \cong \hat{O}$ となる $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の元である．

2) 具体的な G の既約ユニタリ表現の表現は，軌道 $\hat{O}$ のタイプに応じて次の７つのファミリーに分類される：$(p \in \hat{O})$

1° $\hat{O}_m^+$: $p^2 = -m^2 (m > 0)$, $p^0 > 0$; $K = \mathrm{SU}(2)$.
$U^{m,+;j} \rhd \mathbb{C}^{2j} \otimes L_2(\hat{O}_m^+; \mu)$ $(m > 0, j = 0, 1/2, 1, \cdots)$：$V \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は一意的に

$$\begin{aligned} &V = V_p W;\ W \in \mathrm{SU}(2), \\ &V_p = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma+1} \beta^j \sigma_j\right);\quad p = (m\gamma, m\gamma\beta) \end{aligned}$$

と分解される．SU(2) の既約表現を D^j として，

$$(U^{m,+;j}_{(a,V)} v)(p) = e^{-ip\cdot a} D^j(W) v(\Lambda^{-1}(V)p);\ W = V_p^{-1} V V_{\Lambda(V)p} \in \mathrm{SU}(2).$$

$D^{(j,0)}$ を D^j に対応するスピノール表現として

$$\psi(p) := D^{(j,0)}(V_p) u(p)$$

とおくと，

$$(U^{m,+;j}_{(a,V)} \psi)(p) = e^{-ip\cdot a} D^{(j,0)}(V) \psi(\Lambda^{-1}(V)p).$$

2° $\hat{O}_m^-$: $p^2 = -m^2 (m > 0)$, $p^0 < 0$; $K = \mathrm{SU}(2)$.
$U^{m,-;j} \rhd \mathbb{C}^{2j} \otimes L_2(\hat{O}_m^+; \mu)$ $(m > 0, j = 0, 1/2, 1, \cdots)$: 表現の表式は $U^{m,+;j}$ と同じ.

3° $\hat{O}_{im}$: $p^2 = m^2 (m > 0)$; $K = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$: 表現空間は，$\hat{H} \otimes L_2(\hat{O}_{im}; \mu)$．ここで，$\hat{H}$ は K の表現空間で，一般にある空間上の関数空間として表される．$V \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は

$$\begin{aligned} &V = V_p W;\ W \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \\ &V_p = \left[\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2} (\sin\phi\sigma_1 - \cos\phi\sigma_2)\right] \left(\cosh\frac{\psi}{2} + \sinh\frac{\psi}{2}\right); \\ &p/m = (\sinh\psi, \cosh\psi \sin\theta \cos\phi, \cosh\psi \sin\theta \sin\phi, \cosh\psi \cos\theta) \end{aligned}$$

と分解される．ここで，

$$V_p \sigma_3 V_p^\dagger = (1/m) p^a \sigma_a; p^2 = m^2.$$

この分解を用いて,

$$
\begin{aligned}
&(U_{(a,V)}v)(p,x) = e^{-ip\cdot a}D(W)v(W*x,\Lambda^{-1}p);\\
&W = V_p^{-1}VV_{\Lambda(V)p} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\\
&W*x = \frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}.
\end{aligned}
$$

$K=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の既約表現に対応して，３種類の既約表現が存在する.

i) $U^{im;i\sigma,\epsilon}$ ($m>0,\sigma\ge 0,\epsilon=0,1$): K の表現空間は

$$\hat{H} = L_2(\mathbb{R};dx),$$

$D(W)$ は

$$D^{i\sigma,\epsilon}(W) = |\beta x+\delta|^{-i\sigma-1}\left(\frac{\beta x+\delta}{|\beta x+\delta|}\right)^{\epsilon}.$$

ii) $U^{im;n,\pm}$($m>0,n=0,1,2,\cdots$): K の表現空間 $\hat{\mathscr{H}}$ は複素上半平面上の複素関数の空間で，内積は

$$(u,v) = \frac{i}{2\pi\Gamma(n)}\int_{\mathrm{Im}\,z>0}\overline{u(z)}v(z)(\mathrm{Im}\,z)^{n-1}dzd\bar{z}.$$

$D(W)$ は

$$D^n(W) = (\beta z+\delta)^{-n-1}.$$

iii) $U^{im;\rho}$($m>0,-1<\rho<1,\rho\ne 0$): K の表現空間 $\hat{\mathscr{H}}$ は $\mathbb{R}$ 上の関数の空間で，内積は

$$(u,v) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)}\int_{\mathbb{R}^2}|x_1-x_1|^{-1-\rho}\overline{u(x_1)}v(x_2)dx^1dx^2.$$

$D(W)$ は

$$D^{\rho}(W) = |\beta x+\delta|^{\rho-1}.$$

4° $\hat{O}_0^+$: $p^2=0,p^0>0$. $K=\mathbb{R}^2\ltimes S^1$ （2次元 Euclide 群の連結成分の２重被覆）．このとき，$V\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は次のように分解される：

$$
\begin{aligned}
&V = V_pW;\ W = \begin{pmatrix}e^{i\theta/2} & e^{-i\theta/2}z \\ 0 & e^{-i\theta/2}\end{pmatrix} \in K, (0\le\theta<4\pi)\\
&V_p = \begin{pmatrix}x & 0 \\ w & 1/x\end{pmatrix};\ p^0+p^3=x^2, p^0-p^3=|w|^2, p^1+ip^2=x\bar{w},\\
&V_p(1+\sigma_3)V_p^{\dagger} = 2p^a\sigma_a.
\end{aligned}
$$

i) $U^{0,+;j} \rhd L_2(\hat{O}_0^+; d\mu)$ $(j = 0, 1/2, 1, \cdots)$:

$$(U^{0,+;j}_{(a,V)}u)(p) = e^{-ip\cdot a}e^{ij\theta(W)}u(\Lambda^{-1}p);$$
$$W = V_p^{-1}VV_{\Lambda^{-1}p} \in K.$$

ii) $U^{0,+;r,\epsilon} \rhd L_2(S^1; d\phi) \otimes L_2(\hat{O}_0^+; d\mu)$ $(r > 0, \epsilon = 0, 1)$.

$$(U^{0,+;r,\epsilon}_{(a,V)}u)(p, \hat{z}) = e^{-ip\cdot a}e^{i\hat{z}\cdot z(W)}(-1)^{\epsilon * f(W,\hat{z})}(\Lambda^{-1}p, e^{-i\theta(W)}\hat{z});\ (|\hat{z}| = r),$$
$$f(W, \hat{z}) = 0(0 \le \theta(W) - \arg(\hat{z}) < 2\pi,\ f(W, \hat{z}) = 1(2\pi \le \theta(W) - \arg(\hat{z}) < 4\pi).$$

5° $\hat{O}_0^-$: $p^2 = 0, p^0 < 0$. $K = \mathbb{R}^2 \ltimes S^1$

i) $U^{0,-;j} \rhd L_2(\hat{O}_0^-; d\mu)$ $(j = 0, 1/2, 1, \cdots)$:

ii) $U^{0,-;r,\epsilon} \rhd L_2(S^1; d\phi) \otimes L_2(\hat{O}_0^-; d\mu)$ $(r > 0, \epsilon = 0, 1)$.

6° $\hat{O}_0^0$: $p = 0$. $K = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. この場合は，$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の既約ユニタリ表現に帰着される：

i) $U^{0,0;i\rho,j}$ $(m = 0, p^0 = 0, \rho \ge 0, j = 0, 1/2, 1, \cdots)$.

i) $U^{0,0;\rho}$ $(m = 0, p^0 = 0, -1 < \rho < 1, \rho \ne 0)$.

□

3.9 包絡環

3.9.1 定義と基本性質

【定義 3.55 (包絡環)**】** 体 K 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$\mathfrak{g}$ の体 K 上のテンソル代数を T とする．$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ の形の元から生成される T の両側イデアルを J として，$U(\mathfrak{g}) := T/J$ により定義される K 上の代数を $\mathfrak{g}$ の包絡環 (universal enveloping algebra) という． □

【命題 3.56 (包絡環の基本性質)**】** 体 K 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，その包絡環を $U(\mathfrak{g})$ と表す.

i) $\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{h}$ の包絡環は，1 と $\mathfrak{h}$ から生成される $U(\mathfrak{g})$ の部分代数に同型である.

ii) 体 K 上の2つのLie代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ の直和 $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ の包絡環は，テンソル積 $U(\mathfrak{g}_1) \otimes_K U(\mathfrak{g}_2)$ と同型である．

iii) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し，$\mathfrak{a}$ が生成する $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルを $\mathfrak{A}$ とすると，$U(\mathfrak{g})/\mathfrak{A} \cong U(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ が成り立つ．

[From 数学事典] □

【**定理 3.57** (Poincaré-Birkhoff-Witt の定理)】 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の包絡環を $U(\mathfrak{g})$ とする．$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \cdots, X_n$ に対し，その単項式の全体

$$\left\{ X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \;\middle|\; i_1, \cdots, i_n \geq 0 \right\}$$

は，$U(\mathfrak{g})$ の基底となる．また，その対称化の全体

$$\left\{ e_{\{i_1 \cdots i_r\}} := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} X_{i_{\sigma(1)}} \cdots X_{i_{\sigma(r)}} \;\middle|\; r = 0, 1, \cdots,\ 1 \leq i_1, \cdots, i_r \leq n \right\}$$

も基底となる．[From 数学事典，A. Burut and R. Raczka (1986)] □

【**命題 3.58** (Lie 代数の表現と包絡環の表現の対応)】 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の体 K 上の任意の表現 (ρ, V) は，その包絡環の表現 $(\tilde{\rho}, V)$ に一意的に拡張され，ρ が既約（完全可約）であることと $\tilde{\rho}$ が既約（完全可約）であることとは同等である．また，$\mathfrak{g}$ の2つの表現 ρ_1, ρ_2 が同値であることと $\tilde{\rho}_1$ と $\tilde{\rho}_2$ が同値であることは同等である．[From 数学事典] □

3.9.2 不変作用素

【**定義 3.59** (不変作用素)】 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その包絡環の中心に属する元を不変作用素という． □

【**定義 3.60** (不変テンソル)】 Lie 群 G の有限次元線形表現 (ρ, V) に対して，V の反変テンソル $g^{i_1 \cdots i_r}$ が

$$\rho(h)^{i_1}_{j_1} \cdots \rho(h)^{i_r}_{j_r} g^{j_1 \cdots j_r} = g^{i_1 \dots i_r}, \quad \forall h \in G$$

を満たすとき，$g^{i_1\cdots i_r}$ を ρ に対する r 階（反変）不変テンソルという．同様に，共変テンソル $g_{i_1\cdots i_r}$ が

$$g_{j_1\cdots j_r}\rho(h)^{j_1}_{i_1}\cdots\rho(h)^{j_r}_{i_r}=g_{i_1\dots i_r},\quad \forall h\in G$$

を満たすとき，$g_{i_1\cdots i_r}$ を ρ に対する r 階（共変）不変テンソルという． □

【**定理 3.61** (不変作用素と不変テンソルの対応 [Gel'fand)】] Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の要素 P

$$P=cI+\sum_i g^i X_i+\sum_{ij} g^{ij}X_iX_j+\cdots$$

が $U(\mathfrak{g})$ の中心に属するための十分条件は，$g^i, g^{ij},\cdots$ が $\mathfrak{g}$ の随伴群（の随伴表現）に対する不変テンソルとなることである．さらに，これらの係数テンソルが対称テンソルのときには，この条件は必要十分である．[From A. Burut and R. Raczka (1986)] □

【**定理 3.62** (不変作用素の生成元：半単純 Lie 代数)】 ランク r の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，r 個の多項式型不変作用素が存在し，その固有値の組により $\mathfrak{g}$ のすべての有限次元既約表現が完全に分類される．[Ref. Chevalley (1955); From A. Burut and R. Raczka (1986)] □

3.9.3 GL(n)

【**命題 3.63** (GL(n) の不変テンソル)】 GL($n,\mathscr{C}$) およびその任意の実型の随伴表現に対する不変テンソルは

$$g_{i_1}{}^{j_1}\cdots{}_{i_p}{}^{j_p}=\delta_{i_1}{}^{j_1}\cdots\delta_{i_p}{}^{j_p}$$

に比例する． □

【**定理 3.64** (不変テンソルの値)】 最高ウエイト m をもつ U(n) の既約表現の表現空間を H^m とする．このとき，不変テンソル

$$C_p=E_{i_2}{}^{i_1}E_{i_3}{}^{i_2}\cdots E_{i_1}{}^{i_p} \tag{3.1}$$

の H^m 上での値は

$$C_p(m_1, \cdots, m_n) = \mathrm{Tr}(a^p E) \tag{3.2}$$

と表される．ここで，$a = (a_{ij})$ および $E = (E_{ij})$ は次の n 次正方行列である：

$$a_{ij} = (m_i + n - i)\delta_{ij} - Q_{ij}, \tag{3.3}$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i < j, \\ 0 & \text{for } i \geq j. \end{cases}, \tag{3.4}$$

$$E_{ij} = 1. \tag{3.5}$$

また，m の関数として，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ は独立であり，任意の C_p はこれらの関数に従属する．[From A. Burut and R. Raczka (1986)] □

【定理 3.65 (不変作用素の生成母関数)**】** 複素関数

$$\Pi(z) := \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{1 - \lambda_i z}\right); \quad \lambda_i = m_i + n - i \tag{3.6}$$

により定義される関数

$$G(z) := z^{-1}\left(1 - \Pi(z)\right) \tag{3.7}$$

は，不変作用素の既約表現上での値に対する生成母関数となる：

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p(m_1, \cdots, m_n) z^p. \tag{3.8}$$

[From A. Burut and R. Raczka (1986)] □

3.9.4 SU(n)

【定理 3.66 (SU(n) の不変作用素とスペクトル)**】** SU(n) の Lie 代数の標準基底 $h_i\,(i = 1, \cdots, n-1)$，${E_a}^b\,(1 \leq a \neq b \leq n)$ に対して

$$\tilde{E}_i{}^i = h_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} h_j, \quad \tilde{E}_n{}^n = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} h_j, \tag{3.9a}$$

$$\tilde{E}_a{}^b = {E_a}^b\,(1 \leq a \neq b \leq n) \tag{3.9b}$$

とおくとき，SU(n) の不変作用素は

$$C_p := \tilde{E}_{i_2}{}^{i_1}\tilde{E}_{i_3}{}^{i_2}\cdots\tilde{E}_{i_1}{}^{i_{p-1}} \tag{3.10}$$

の線形結合で表される ($C_1 \equiv 0$)．さらに，最高ウエイト m ($m_1 \geq m_2 \geq \cdots m_{n-1} \geq 0$) の既約表現に対するその固有値は，GL($n$) に対する不変作用素 $C_p^{\mathrm{GL}(n)}$ を用いて

$$C_p(m) = C_p^{\mathrm{GL}(n)}(\tilde{m}_1, \cdots, \tilde{m}_n) \tag{3.11}$$

とあらわされる．ここで，

$$\tilde{m}_i = m_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_j, \quad \tilde{m}_n = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} m_j. \tag{3.12}$$

$C_2, \cdots, C_n$ は互いに独立で，SU(n) の不変作用素を生成する． □

3.9.5 SO(n)

ここでは，4.7.1 で説明した方法で SO(n) を SL(n) に埋め込んで考える（$\tilde{\mathrm{SO}}(n)$ と表す）．さらに，添え字を SO($2r+1$) に対して $I = 1, 2, \cdots, r, 0, -r, \cdots, -2, -1$, SO($2r$) に対して $I = 1, 2, \cdots, r, -r, \cdots, -2, -1$ と取ることにし，この添え字の元で $E_a{}^b$ に対応する行列（ないし GL(n) の Lie 代数の基底）を $\tilde{E}_I{}^J$ と書くことにすると，SO(n) の Lie 代数は

$$X_J{}^I = \tilde{E}_J{}^I - \tilde{E}_{-I}{}^{-J} \tag{3.13}$$

により生成される．ただし，$X_J{}^I$ は独立でなく関係式

$$X_J{}^I = -X_{-I}{}^{-J} \tag{3.14}$$

を満たす．この記法を用いると，SO($2r$) および SO($2r+1$) の Lie 代数の標準基底は次のように表される：

$$h_j = X_j{}^j, \tag{3.15a}$$

$$E_{j+k+} = X_j{}^{-k}, \quad E_{j+k-} = X_j{}^k, \quad E_{j-k+} = X_k{}^j, \quad E_{j-k-} = X_{-k}{}^j, \tag{3.15b}$$

$$E_{j+} = iX_j{}^0, \quad E_{j-} = -iX_0{}^j. \tag{3.15c}$$

また，$X_I{}^J$ は $\tilde{\mathrm{SO}}(n)$ のベクトル表現に対する $(1,1)$ 型のテンソル作用素となる．交換関係は

$$[X_I{}^J, X_K{}^L] = \delta_K^J X_I{}^L - \delta_L^i X_K{}^J - \delta_K^{-I} X_{-J}{}^L + \delta_{-L}^J X_K{}^{-I}. \tag{3.16}$$

【定理 3.67 (SO(n) の不変作用素とスペクトル)**】**　SO(n) に対して，

$$C_p := X_{I_2}{}^{I_1} X_{I_3}{}^{I_2} \cdots X_{I_1}{}^{I_p} \tag{3.17}$$

は不変作用素となり，その最高ウエイト $m = (m_1, \cdots, m_r)$ の既約表現に対する値は，

$$a_{IJ} = (m_I + r_I + \alpha)\delta_{IJ} + \frac{\beta}{2}(1+\epsilon_I)\delta_{I,-J} - \theta_{JI}, \tag{3.18}$$

$$\theta_{JI} = \begin{cases} 1 & \text{for } J < I, \\ 0 & \text{for } J \geq I \end{cases} \tag{3.19}$$

により定義される行列 $a = (a_{IJ})$ を用いて

$$C_p(m_1, \cdots, m_r) = \mathrm{Tr}(a^p E) \tag{3.20}$$

と表される．ただし，$\epsilon_{r,r-1,\cdots,-r+1,-r} = -1$，$\alpha, \beta, r_I$ は表 1 に示された値である．また，$m_{-i} = -m_i\,(i = 1, \cdots, r)$, $\epsilon_I = 0(I = 0), 1(I > 0), -1(I < 0)$ である．SO($2r+1$) については，これらのうち，$C_2, C_4, \cdots, C_{2r}$ が不変作用素の生成元となる．一方，SO($2r$) に対しては

$$C'_r := \sum \epsilon_{I_1 J_1 \cdots I_r J_r} X^{I_1 J_1} \cdots X^{I_r J_r} \tag{3.21}$$

も不変作用素となり，その値は

$$C'_r(m_1, \cdots, m_r) = (-1)^{r(r-1)/2} 2^r r!(m_1 + r_1) \cdots (m_r + r_r). \tag{3.22}$$

ここで，$X^{IJ} = X_{-I}{}^J$．$C_2, \cdots, C_{2r-2}, C'_r$ は SO($2r$) の生成元となる．　□

群	α	β	r_I	I のレンジ
SU(n)	$\frac{n-1}{2}$	0	$\frac{n+1}{2} - I$	$1, 2, \cdots, n$
O($2r+1$)	$n - \frac{1}{2}$	1	$(r + \frac{1}{2})\epsilon_I - I$	$1, \cdots, r, 0, -r, \cdots, -1$
Sp($2r$)	r	-1	$(r+1)\epsilon_I - 1$	$1, \cdots, r, -r, \cdots, -1$
O($2r$)	$n - 1$	1	$r\epsilon_I - I$	$1, \cdots, r, -r, \cdots, -1$

表 1: 不変作用素のスペクトルパラメーター

4　古典群

n 次正方行列代数 $M(n)$ の基底 $E_a{}^b$ $(a,b=1,\dots,n)$ を

$$(E_a{}^b)^i{}_j=\delta^i_a\delta^b_j \tag{4.1}$$

により定義する．このとき，

$$E_a{}^b E_c{}^d=\delta^b_c E_a{}^d \tag{4.2}$$

が成り立つ．また、任意の $M=(M^i{}_j)\in \mathrm{GL}(n)$ に対して，

$$M^{-1}E_a{}^b M=(M^{-1})^c{}_a M^b{}_d E_c{}^d \tag{4.3}$$

と変換する。すなわち、$E_a{}^b$ は $\mathrm{GL}(n)$ の自然な F^n 表現 $(F=\mathbb{R},\mathbb{C})$ に対して $(1,1)$ 型テンソル作用素となっている．

注：　対応

$$Z=X_0+iX_1\in M(n,\mathbb{C})\mapsto X=\begin{pmatrix}X_0 & -X_1\\ X_1 & X_0\end{pmatrix}\in M(2n,\mathbb{R}) \tag{4.4}$$

は $\mathbb{R}$-代数としての同型対応を与える．この対応において，

$$\det X=|\det Z|^2. \tag{4.5}$$

同様に

$$X=Z_0+jZ_1\in M(n,\mathbb{H})\mapsto Z=\begin{pmatrix}Z_0 & -\bar{Z}_1\\ Z_1 & \bar{Z}_0\end{pmatrix}\in M(2n,\mathbb{C}) \tag{4.6}$$

は $\mathbb{R}$-代数としての同型対応を与える．この対応の像 Z は，次の条件により特徴づけられる：

$$ZJ=J\bar{Z};\ Z\in M(2n,\mathbb{C}) \tag{4.7}$$

ここで，

$$J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}\in GL(2n). \tag{4.8}$$

これより，

$$\det Z\in\mathbb{R}. \tag{4.9}$$

【命題 4.1】　$Z\in GL(2n,\mathbb{C})$ が $JZ=\bar{Z}J$ を満たすなら，$\det Z\geq 0$ となる．特に，

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\cong\mathbb{R}_+\times\mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) \tag{4.10}$$

が成り立つ．　□

4.1 古典群の定義

4.1.1 $\mathrm{GL}(n,F)$ と $\mathrm{SL}(n,F)$

可換体 F を係数とする n 次正方行列の全体を $M(n,F)$ として，一般線形群は

$$\mathrm{GL}(n,F)=\{X\in M(n,F)\mid\ \det X\neq 0\} \tag{4.11}$$

で定義される．この群の中心 Z は

$$Z=\{kI_n\mid\ k\in F^*\}\cong F^* \tag{4.12}$$

で，$\mathrm{GL}(n,F)$ から $\mathbb{F}P^{n-1}$ に誘導される変換群は

$$\mathrm{GSL}(n,F)=\mathrm{GL}(n,F)/Z. \tag{4.13}$$

また，特殊線形群は

$$\mathrm{SL}(n,F)=\{X\in \mathrm{GL}(n,F)\mid\ \det X=1\} \tag{4.14}$$

で定義され，その中心 Z_0 は

$$Z_0=Z\cap \mathrm{SL}(n,F)=\{kI_n\mid\ k^n=1\}. \tag{4.15}$$

特に，$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ は単純かつ半単純な複素 Lie 群，$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ はその非コンパクト実型を与える．

$\mathrm{SL}(n,F)$ から $\mathbb{F}P^{n-1}$ に誘導される変換群は

$$\mathrm{PSL}(n,F)=\mathrm{SL}(n,F)/Z_0. \tag{4.16}$$

$n=2$ で $F=\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_3$ の場合，

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_2)\cong\mathfrak{S}_3,\quad \mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_3)\cong\mathfrak{A}_4 \tag{4.17}$$

を除くと，$\mathrm{PSL}(n,F)(n\geq 2)$ は非可換な単純群である．また，F が代数的閉体の時，$\mathrm{GSL}(n,F)=\mathrm{PSL}(n,F)$ となる．

同様に，$F=\mathbb{H}$ に対して，標準対応 $M(n,\mathbb{H})\ni X\mapsto Z\in M(2n,\mathbb{C})$ のもとで，

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})=\{X\in M(n,\mathbb{H})\mid\ \det Z>0\} \tag{4.18}$$

により，$\mathbb{H}$ 係数の一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$ が定義される．この群に対して

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\cong\left\{Z\in GL(2n,\mathbb{C})\,\middle|\ JZ=\bar{Z}J\right\}, \tag{4.19}$$

$$\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})=4n^2, \tag{4.20}$$

が成り立つ．また，特殊線形群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$ を

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})=\{X\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\mid\ \det Z=1\} \tag{4.21}$$

により定義する．

4.1.2 $\mathrm{U}(n), \mathrm{U}(p,q), \mathrm{SU}(n), \mathrm{SU}(p,q), \mathrm{SU}^*(2n)$

$I_{p,q}$ を対角型行列

$$I_{p,q} = \mathrm{diag}[\,\overbrace{+1,\cdots,+1}^{p},\overbrace{-1,\cdots,-1}^{q}\,] \tag{4.22}$$

とする．このとき，体 $F(=\mathbb{C},\mathbb{H})$ に対して，ユニタリ群および特殊ユニタリ群を

$$\mathrm{U}(p,q;F) = \left\{X \in \mathrm{GL}(p+q,F) \,\middle|\, \bar{X}^T I_{p,q} X = I_{p,q}\right\}, \tag{4.23}$$
$$\mathrm{SU}(p,q;F) = \mathrm{U}(p,q;F) \cap \mathrm{SL}(p+q,F), \tag{4.24}$$
$$\mathrm{U}(n,F) = \mathrm{U}(n,0;F), \quad \mathrm{SU}(n,F) = \mathrm{SU}(n,0;F) \tag{4.25}$$

と定義する．ただし，$x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \in \mathbb{H}$ に対して，$\bar{x} = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$ で，

$$\mathrm{U}(p,q;\mathbb{H}) = \mathrm{SU}(p,q;\mathbb{H}) \tag{4.26}$$

となる．

特に，$F = \mathbb{C}$ に対しては

$$\mathrm{U}(p,q) = \mathrm{U}(p,q;\mathbb{C}), \quad \mathrm{SU}(p,q) = \mathrm{SU}(p,q;\mathbb{C}) \tag{4.27}$$

と表す．$\mathrm{SU}(p,q)$ は単純かつ半単純な実 Lie 群で，特に $\mathrm{SU}(n)$ はコンパクトかつ単連結である．また，$\mathrm{U}(p,q)$ および $\mathrm{SU}(p,q)$ の中心 Z，Z_0 は，$n = p+q$ として

$$Z = \{zI_n \mid |z| = 1\} \cong \mathrm{U}(1), \tag{4.28a}$$
$$Z_0 = \{zI_n \mid z^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n \tag{4.28b}$$

となり，射影ユニタリ群は

$$\mathrm{PU}(n) = \mathrm{U}(n)/Z \cong \mathrm{SU}(n)/Z_0 \tag{4.29}$$

により定義される．

最後に，

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

として，実 Lie 群 $\mathrm{SU}^*(2n)$ を

$$\mathrm{SU}^*(2n) = \left\{X \in \mathrm{SL}(2n,\mathbb{C}) \,\middle|\, J\bar{X} = XJ\right\} \tag{4.31}$$

により定義する．$Z \in \mathrm{SU}^*(2n)$ は

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}; \quad \det Z = 1,\ A, B \in M(n, \mathbb{C}) \tag{4.32}$$

と表され,

$$\mathrm{SU}^*(2n) \cong \mathrm{SL}(n, \mathbb{H}), \tag{4.33}$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{SU}^*(2n) = 4n^2 - 1. \tag{4.34}$$

$\mathrm{SU}^*(2n)$ は $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{C})$ の非コンパクト実型の一つを与える．

4.1.3 $\mathrm{O}(n, F), \mathrm{SO}(n, F), \mathrm{O}(p, q; F), \mathrm{SO}(p, q; F), \mathrm{SO}^*(2n)$

$F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対して，$I_{p,q}$ を (p, q) 型の単位対角行列として，(p, q) 型直交群を

$$\mathrm{O}(p, q; F) = \left\{ X \in \mathrm{GL}(p+q, F) \,\middle|\, X^{*T} I_{p,q} X = I_{p,q} \right\}, \tag{4.35a}$$
$$\mathrm{SO}(p, q; F) = \mathrm{O}(p, q; F) \cap \mathrm{SL}(p+q, F), \tag{4.35b}$$
$$\mathrm{O}(n, F) = \mathrm{O}(n, 0; F), \quad \mathrm{SO}(n, F) = \mathrm{SO}(n, 0; F) \tag{4.35c}$$

により定義する．ただし，$x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \in \mathbb{H}$ に対して，$x^* = x_0 + ix_1 - jx_2 + kx_3$ である．

特に，$F = \mathbb{C}$ に対して,

$$\mathrm{O}(p, q; \mathbb{C}) = \mathrm{O}(p+q, \mathbb{C}), \quad \mathrm{SO}(p, q; \mathbb{C}) = \mathrm{SO}(p+q, \mathbb{C}) \tag{4.36}$$

で，$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})(n \geq 3, \neq 4)$ は単純かつ半単純な複素 Lie 群である．また，$F = \mathbb{H}$ に対しては,

$$\mathrm{O}(p, q; \mathbb{H}) = \mathrm{SO}(p, q; \mathbb{H}) = \mathrm{SO}(p+q, \mathbb{H}) \tag{4.37}$$

となる（SL の定義の特殊性により）．

一方，$F = \mathbb{R}$ に対しては,

$$\mathrm{O}(p, q; \mathbb{R}) = \mathrm{O}(p, q),\ \mathrm{SO}(p, q; \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(p, q),\ \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(n),\ \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n) \tag{4.38}$$

と表記する．$\mathrm{SO}(p, q)(p+q > 2)$ は半単純な実 Lie 群である．また，$\mathrm{SO}(n)$ はコンパクトとなる．

最後に,

$$\mathrm{SO}^*(2n) = \left\{ Z \in \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C}) \,\middle|\, Z^\dagger J Z = J \right\} \tag{4.39}$$

と定義すと，標準対応 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) \ni X \to Z \in \mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$ は同型対応

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{H}) \cong \mathrm{SO}^*(2n) \tag{4.40}$$

を誘導する．$\mathrm{SO}^*(2n)$ は $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ の非コンパクト実型の一つを与える．

4.1.4 $\mathrm{Sp}(n,F), \mathrm{Sp}(p,q)$

$J_{p,q} \in \mathrm{GL}(2p+2q,F)$ を

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p,q} \\ -I_{p,q} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

とおく，このとき，$F=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ に対して，

$$\mathrm{Sp}(p,q;F) = \left\{ X \in \mathrm{GL}(2n,F) \,\middle|\, X^T J_{p,q} X = J_{p,q} \right\}, \tag{4.42a}$$

$$\mathrm{Sp}(n,F) = \mathrm{Sp}(n,0;F) \tag{4.42b}$$

と定義する．

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M(2p+2q,F) \tag{4.43}$$

が $\mathrm{Sp}(p,q;F)$ に属する条件は，$A,B,C,D \in M(p+q,F)$ を用いて

$$C^T I_{p,q} A = A^T I_{p,q} C, \tag{4.44a}$$

$$B^T I_{p,q} D = D^T I_{p,q} B, \tag{4.44b}$$

$$A^T I_{p,q} D - C^T I_{p,q} B = I_{p,q} \tag{4.44c}$$

と表される．これより，$F=\mathbb{C},\mathbb{H}$ に対しては，$\mathrm{Sp}(p,q;F) \cong \mathrm{Sp}(p+q,F)$ となる．$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})(n \geq 1)$ は単純複素 Lie 群を，$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ はその非コンパクト実型を与える．

また，$I_{p,q,p,q}$ を対角型行列

$$I_{p,q,p,q} = \mathrm{diag}[I_{p,q}, I_{p,q}] \in \mathrm{GL}(2p+2q,\mathbb{R}) \tag{4.45}$$

として，実 Lie 群 $\mathrm{Sp}(p,q)$ を

$$\mathrm{Sp}(p,q) = \left\{ X \in \mathrm{Sp}(p,q;\mathbb{C}) \,\middle|\, X^\dagger I_{p,q,p,q} X = I_{p,q,p,q} \right\}, \tag{4.46}$$

$$\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n,0) = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2n) \tag{4.47}$$

により定義する．これらも $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ の実型を与え，$\mathrm{Sp}(n)$ はコンパクトである．

【命題 4.2 ($\mathrm{Sp}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ と $\mathrm{U}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q};\mathbb{H})$ の同型性)】 $X = X_0 + iX_1 + jX_2 + kX_3 \in \mathrm{U}(p,q;\mathbb{H})$ を

$$X = Z_0 + jZ_1; \quad Z_0, Z_1 \in M(p+q,\mathbb{C}) \tag{4.48}$$

と表すとき,

$$X \mapsto Y = \begin{pmatrix} Z_0 & -\bar{Z}_1 \\ Z_1 & \bar{Z}_0 \end{pmatrix} \in M(2p+2q;\mathbb{C}) \tag{4.49}$$

により，同型対応 $\mathrm{U}(p,q;\mathbb{H}) \cong \mathrm{Sp}(p,q)$ が得られる． □

4.2 古典群の複素既約表現：誘導表現の方法

4.2.1 古典群の Gauss 分解

【命題 4.3】

1. $\mathscr{Z}$ を対角成分がすべて 1 の n 次上方三角型行列の全体，Z を対角成分がすべて 1 の n 次下方三角型行列の全体，D を n 次対角型正則行列の全体とすると，$\mathscr{Z}DZ$ は $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の Gauss 分解を与える．以下，D の元を次のように表す．

$$D = \left\{[\delta_1,\cdots,\delta_n] \,\middle|\, \delta_j \in \mathbb{C}^\times\right\}. \tag{4.50}$$

2. $D_0 = D \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ とすると，$\mathscr{Z}D_0Z$ は $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の Gauss 分解を与える．D_0 の元は次のように表される．

$$D_0 = \{[\delta_1,\cdots,\delta_n] \mid \delta_1\cdots\delta_n = 1\}. \tag{4.51}$$

3. J_n を

$$J_n = (\delta_{i+j,n+1}) = \begin{pmatrix} & 0 & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

で定義される n 次正方正則行列とする．このとき，

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C}) \cong \left\{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \,\middle|\, J_n^{-1} g J_n = (g^{-1})^T\right\}. \tag{4.53}$$

この同一視のもとで，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の Gauss 分解 $\mathscr{Z}DZ$ の $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ への制限 $\mathscr{Z}_0D_0Z_0$ は $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ の Gauss 分解を与える．D_0 の元は，$n = 2\nu$ のとき,.

$$D_0 = \left\{[\delta_1,\cdots,\delta_\nu,\delta_\nu^{-1},\cdots,\delta_1^{-1}] \,\middle|\, \delta_j \in \mathbb{C}^\times\right\}, \tag{4.54}$$

$n=2\nu+1$ のとき

$$D_0=\left\{[\delta_1,\cdots,\delta_\nu,1,\delta_\nu^{-1},\cdots,\delta_1^{-1}]\;\middle|\;\delta_j\in\mathbb{C}^\times\right\}. \tag{4.55}$$

と表される．

4. σ を

$$\sigma=\begin{pmatrix}0 & -J_n\\ J_n & 0\end{pmatrix} \tag{4.56}$$

で定義される $2n$ 次正方正則行列とする．このとき，

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})\cong\left\{g\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})\;\middle|\;\sigma^{-1}g\sigma=(g^{-1})^T\right\}. \tag{4.57}$$

この同一視のもとで，$\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ の Gauss 分解 $\mathscr{Z}DZ$ の $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ への制限 $\mathscr{Z}_0D_0Z_0$ は $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ の Gauss 分解を与える．D_0 の元は，

$$D_0=\left\{[\delta_1,\cdots,\delta_n,\delta_n^{-1},\cdots,\delta_1^{-1}]\;\middle|\;\delta_j\in\mathbb{C}^\times\right\} \tag{4.58}$$

と表される．

□

4.2.2 有限次元複素解析的既約表現の指標

【定理 4.4】 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の一価複素解析的有限次元既約表現は，指標は

$$\chi=\delta_1^{m_1}\cdots\delta_n^{m_n}:\quad m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_n,\ m_j\in\mathbb{Z}$$

から誘導される既約表現と一対一に対応する． □

【定理 4.5】 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は，指標は

$$\chi=\delta_1^{m_1}\cdots\delta_{n-1}^{m_{n-1}}:\quad m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_{n-1}\geq 0,\ m_j\in\mathbb{Z}$$

から誘導される既約表現と一対一に対応する． □

【定理 4.6】 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は，指標は

$$\chi=\delta_1^{m_1}\cdots\delta_n^{m_n}:\quad m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_n\geq 0,\ m_j\in\mathbb{Z}$$

から誘導される既約表現と一対一に対応する． □

【定理 4.7】 SO$(2n+1,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は，指標は

$$\chi = \delta_1^{m_1}\cdots\delta_n^{m_n}: \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$$

から誘導される既約表現と一対一に対応する．ただし，m_j はすべて整数であるか，すべて半奇数であるかのいずれかである． □

【定理 4.8】 SO$(2n,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は，指標は

$$\chi = \delta_1^{m_1}\cdots\delta_n^{m_n}: \quad m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{n-1} \geq |m_n|$$

から誘導される既約表現と一対一に対応する．ただし，m_j はすべて整数であるか，すべて半奇数であるかのいずれかである． □

4.2.3 基本表現

【定義 4.9】 複素単純 Lie 代数 $\mathscr{L}$ の任意の既約表現の指標 (maximal weight)w が，既約表現の列 ρ_j に対応する一次独立な指標の系 $w_j(j=1,\cdots,J)$ の非負整係数線形結合として表されるとき，ρ_j を $\mathscr{L}$ **の基本表現**という．w_j は基本整ウエイトと一致する． □

【定理 4.10】 A_r 型，B_r 型，C_r 型，D_r 型の複素半単純 Lie 代数は r 個の基本表現をもつ．対応する maximal weight は次のようになる．

1) A_r 型 (SL$(r+1,\mathbb{C})$) および C_r 型 (Sp$(r,\mathbb{C})$)：

$$w_1 = (1,0,0,\cdots),\ w_2 = (1,1,0,\cdots),\ \cdots,\ w_r = (1,1,\cdots,1).$$

2) B_r 型 $(SO(2r+1,\mathbb{C}))$：

$$w_1 = (1,0,0,\cdots),\ w_2 = (1,1,0,\cdots),\ \cdots,\ w_{r-1} = (1,\cdots,1,0),$$
$$w_r = (1/2,\cdots,1/2).$$

3) D_r 型 $(SO(2r,\mathbb{C}))$：

$$w_1 = (1,0,0,\cdots),\ w_2 = (1,1,0,\cdots),\ \cdots,\ w_{r-2} = (1,\cdots,1,0,0),$$
$$w_{r-1} = (1/2,\cdots,1/2,1/2),\ w_r = (1/2,\cdots,1/2,-1/2).$$

□

4.3 Dynkin 基底

$\mathfrak{h}$ を Cartan 部分代数，$\mathfrak{h}^*$ をその双対空間，Δ をルート系，$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ をその基本ルート系とする．線形同値写像 $\mathfrak{h}^* \ni \alpha \mapsto H_\alpha \in \mathfrak{h}$ を

$$(H_\alpha, h) = \alpha(h) \ \forall h \in \mathfrak{h} \tag{4.59}$$

により定義する．このとき，

$$(\alpha, \beta) := (H_\alpha, H_\beta) \tag{4.60}$$

により，$\mathfrak{h}$ の内積より $\mathfrak{h}^*$ の内積が誘導される．このとき，

$$H_j := \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} H_{\alpha_j} \ (j = 1, \cdots, n) \tag{4.61}$$

は $\mathfrak{h}$ の基底となる．この双対基底 F^j をルート空間の Dynkin 基底とよぶ：

$$F^j(H_k) = \delta^j_k \ (j, k = 1, \cdots, n) \tag{4.62}$$

$F^1, \cdots, F^n$ は基本表現の最高ウェイトと一致する．したがって，任意の表現のウェイト Λ を F^j で

$$\Lambda = \sum_j \lambda_j F^j \tag{4.63}$$

と成分表示すると，

$$\lambda_j = \frac{2(\Lambda, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \in \mathbb{Z} \tag{4.64}$$

が成り立つ．$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ は Dynkin ラベルと呼ばれる．

$$C_{jk} := \frac{2(\alpha_j, \alpha_k)}{(\alpha_k, \alpha_k)} \equiv < \alpha_j, \alpha_k >> \tag{4.65}$$

により Cartan 行列を定義すると，

$$F^j = (C^{-1})^{jk} \alpha_k \tag{4.66}$$

が成り立つ．また，

$$G^{jk} := (C^{-1})^{jk} \frac{(\alpha_k, \alpha_k)}{2} \tag{4.67}$$

とおくと，

$$(F^j, F^k) = G^{jk}. \tag{4.68}$$

4.4 GL(n)

4.4.1 GL$(n,\mathbb{C})$ の Lie 代数の構造

交換関係 ${E_a}^b(a,b=1,\cdots,n)$ が Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の基底となり，その交換関係は次式で与えられる：

$$[{E_a}^b, {E_c}^d] = \delta^b_c {E_a}^d - \delta^d_a {E_c}^b. \tag{4.69}$$

Cartan 部分代数

$$\mathscr{L}_0 =< E_1,\cdots,E_n >; \quad E_a = {E_a}^a. \tag{4.70}$$

ルート系 Cartan 部分代数 $\mathscr{L}_0$ の双対空間 $\mathscr{L}_0^*$ の基底 E^a を E_a の双対基底,

$$E^a(E_b) = \delta^a_b,$$

とする．このとき,

$$[E_a, {E_b}^c] = (\delta_{ab} - \delta_{ac}){E_b}^c \tag{4.71}$$

より，ルート系 Δ は

$$\Delta = \left\{ E^a - E^b \,\middle|\, 1 \le a, b \le n \right\}, \tag{4.72}$$

$$\alpha = E^a - E^b \mapsto E_\alpha = {E_a}^b. \tag{4.73}$$

Gauss 分解 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_- + \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_+$.
正ルート空間は

$$\Delta^+ = \left\{ E^a - E^b \,\middle|\, 1 \le a < b \le n \right\}, \tag{4.74a}$$

$$\mathscr{L}_+ = \langle E^+_{ab} := {E_a}^b; a < b \rangle, \tag{4.74b}$$

負ルート空間は

$$\Delta^- = \left\{ -E^a + E^b \,\middle|\, 1 \le a < b \le n \right\}, \tag{4.75a}$$

$$\mathscr{L}_- = \langle E^-_{ab} := {E_b}^a; a < b \rangle. \tag{4.75b}$$

Weyl 基底の交換関係は,

$$[E^+_{ab}, E^+_{cd}] = \delta_{bc} E^+_{ad} - \delta_{ad} E^+_{cb}, \tag{4.76a}$$

$$[E^-_{ab}, E^-_{cd}] = \delta_{ad} E^-_{cb} - \delta_{cb} E^-_{ad}, \tag{4.76b}$$

$$[E^+_{ab}, E^-_{ab}] = E_a - E_b. \tag{4.76c}$$

4.5 A_r 型

4.5.1 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の Lie 代数の構造

基底 Lie 代数 $\mathscr{L}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の基底は,

$$h_j := E_j{}^j - E_n{}^n \, (j=1,\cdots,n-1), \quad E_a{}^b \, (1\leq a\neq b\leq n). \tag{4.77}$$

Cartan 部分代数

$$\mathscr{L}_0=\langle h_1,\cdots,h_{n-1}\rangle. \tag{4.78}$$

Cartan 計量 $j,k=1,\cdots,n-1$ として,

$$[h_j, E_a{}^b]=(\delta_{ja}-\delta_{jb}-\delta_{an}+\delta_{bn})E_a{}^b$$

より,

$$[h_j, E_k{}^l]=(\delta_{jk}-\delta_{jl})E_k{}^l, \tag{4.79a}$$

$$[h_j, E_k{}^n]=(\delta_{jk}+1)E_k{}^n, \tag{4.79b}$$

$$[h_j, E_n{}^k]=-(\delta_{jk}+1)E_n{}^k. \tag{4.79c}$$

よって,

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(h_j)\mathrm{ad}(h_k))=2n(\delta_{jk}+1). \tag{4.80}$$

これより，Cartan 計量を

$$\gamma_{jk}=(h_j,h_k)=\delta_{jk}+1 \tag{4.81}$$

で定義する．このとき，双対空間 $\mathscr{L}_0^*$ に誘導される計量は，h^j を h_j の双対基底として

$$\gamma^{jk}=(h^j,h^k)=\delta^{jk}-\frac{1}{n}. \tag{4.82}$$

ルート系

$$\Delta=\left\{h^j-h^k \,\middle|\, j,k=1,\cdots,n-1\right\}\cup\left\{\pm\,(h^j+\sum_{k=1}^{n-1}h^k)\,\middle|\, j=1,\ldots,n-1\right\}. \tag{4.83}$$

基本ルート系

$$\alpha_1 = h^1 - h^2, \cdots, \alpha_{n-2} = h^{n-2} - h^{n-1},\ \alpha_{n-1} = h^1 + \cdots + h^{n-2} + 2h^{n-1} \tag{4.84}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
&h^j - h^k = \alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{k-1}\,(1 \le j < k \le n-1),\\
&h^j + \sum_{k=1}^{n-1} h^k = \alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{n-1}\,(j = 1, \cdots, n-1),\\
&n\left(h^1 + h^2 + \cdots + h^{n-1}\right) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1},\\
&h^j = \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_j - \frac{1}{n}\left\{(n-1)\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1\right\}.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Gauss 分解と Weyl 基底 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_- + \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_+$.
正ルート空間は

$$\begin{aligned}
\Delta^+ = \ & \left\{h^j - h^k \,\middle|\, 1 \le j < k \le n-1\right\} \cup \left\{h^j + \sum_{k=1}^{n-1} h^k \,\middle|\, j = 1, \ldots, n-1\right\},\\
\mathscr{L}^+ : \ & \alpha = h^j - h^k \mapsto E_\alpha = E^+_{jk},\\
& \alpha = h^j + \sum_{k=1}^{n-1} h^k \mapsto E_\alpha = E^+_j := E_j{}^n.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

負ルート空間は

$$\begin{aligned}
\Delta^- = \ & \left\{-(h^j - h^k) \,\middle|\, 1 \le j < k \le n-1\right\} \cup \left\{-(h^k + \sum_{j=1}^{n-1} h^j) \,\middle|\, k = 1, \ldots, n-1\right\},\\
\mathscr{L}^- : \ & \alpha = -(h^j - h^k) \mapsto E_\alpha = E^-_{jk},\\
& \alpha = -(h^j + \sum_{k=1}^{n-1} h^k) \mapsto E_\alpha = E^-_j := E_n{}^j.
\end{aligned} \tag{4.87a}$$

Wyle 基底の交換関係

$$
\begin{aligned}
&[h_j, h_k] = 0,\\
&[X, E_\alpha] = \alpha(X)E_\alpha;\ X \in \mathscr{L}_0,\\
&[E_j^+, E_k^+] = 0,\ [E_j^+, E_{kl}^+] = -\delta_{jl}E_k^+,\ [E_{jk}^+, E_{kl}^+] = \delta_{kl}E_{jm}^+ - \delta_{jm}E_{lk}^+,\\
&[E_j^-, E_k^-] = 0,\ [E_j^-, E_{kl}^-] = \delta_{jl}E_k^-,\ [E_{jk}^-, E_{kl}^-] = -\delta_{kl}E_{jm}^- + \delta_{jm}E_{lk}^-,\\
&[E_j^+, E_j^-] = h_j,\ [E_j^+, E_k^-] = E_j{}^k\ (j \neq k),\\
&[E_j^\pm, E_{kl}^\mp] = \mp\delta_{jk}E_l^\pm,\\
&[E_{jk}^+, E_{jk}^-] = h_j - h_k,\ [E_{jk}^+, E_{lm}^-] = \delta_{km}E_j{}^l - \delta_{jl}E_m{}^k.
\end{aligned}
$$

4.5.2 SL$(n, \mathbb{C})$ の複素解析的既約表現

【定理 4.11 (分類)】

1. SL$(n, \mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は次の条件を満たす最高ウエイトと一対一に対応する：
$$\lambda = m_j h^j : m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{n-1} \geq 0.$$
2. SL$(n, \mathbb{C})$ の随伴表現の最高ウエイトは
$$\lambda = 2h^1 + h^2 + \cdots + h^{n-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}.$$
3. SL$(n, \mathbb{C})$ の基本整ウエイトは
$$\lambda_1 = h^1,\ \lambda_2 = h^1 + h^2, \cdots, \lambda_{n-1} = h^1 + \cdots + h^{n-1}.$$
4. $\mathbb{C}^n$ の p 次交代形式の作る線形空間を Λ_p とする．このとき，$\mathbb{C}^n$ への作用から決まる SL$(n, \mathbb{C})$ の $\Lambda_p (1 \leq p \leq n-1)$ 上への表現は既約で，基本整ウエイト λ_p を最高ウエイトとする基本表現 ρ_p となる．特に，$\dim \rho_p = {}_nC_p$.

$\square$

【定理 4.12 (実型の複素規約表現)】 SL$(n, \mathbb{C})$ の任意の実型の複素既約表現は SL$(n, \mathbb{C})$ の複素解析的既約表現 (ρ, V) と一対一に対応し，ρ の実型への制限により得られる．また，これらのすべての既約表現は，ベクトル表現のテンソル積の既約分解により得られる． $\square$

【命題 4.13 ([1] × [1] **の既約分解)】** 最高ウエイト λ の既約表現を (λ) と表すとき，

$$(\lambda_1) \times (\lambda_1) = (2\lambda_1) + (\lambda_2). \tag{4.88}$$

すなわち，n 次対称行列の全体は最高ウエイト $2\lambda_1$ をもつ $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の既約表現を与える． □

4.6 C_r 型

4.6.1 $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ の Lie 代数の構造

【命題 4.14】 (4.57) により $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ を $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{C})$ の部分群として定義する．このとき，$A, B, C, D \in M(n, \mathbb{C})$ に対して，

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$$

が Lie 代数 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の属するための必要十分条件は，J_n を (4.52) で定義される行列として，

$$J_n A J_n = -D^T,\ J_n B J_n = B^T,\ J_n C J_n = C^T \tag{4.89}$$

と表される．これは，B と C が補対角線 $(i + j = n + 1)$ に関する反転で不変，D が A の同じ反転の (-1) 倍であることを意味する． □

以下，${E_a}^b$ は $GL(2n, \mathbb{C})$ に対する (a, b)-成分行列とし，$a < b$ のとき，$E^+_{ab} = {E_a}^b$，$E^-_{ab} = {E_b}^a$ と表記する．また，j, k, l, m は $1, \cdots, n$ の範囲の値を取るものとする．

基底 リー代数 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の基底は

$$\begin{aligned} & h_j := {E_j}^j - {E_{2n+1-j}}^{2n+1-j}\ (j = 1, \cdots, n), \\ & E^{\pm}_{j\,2n+1-k} + E^{\pm}_{k\,2n+1-j}, \quad {E_j}^k - {E_{2n+1-k}}^{2n+1-j}\ (1 \le j, k \le n). \end{aligned} \tag{4.90}$$

Cartan 部分代数

$$\mathscr{L}_0 = \langle h_1, \cdots, h_n \rangle. \tag{4.91}$$

Cartan 計量

$$[h_j, E_a{}^b] = (\delta_{ja} - \delta_{jb} - \delta_{a\,2n+1-j} + \delta_{b\,2n+1-j})E_a{}^b \tag{4.92}$$

より，

$$\begin{aligned}
&[h_j, E^{\pm}_{k\,2n+1-l}] = \pm(\delta_{jk} + \delta_{jl})E^{\pm}_{k\,2n+1-l},\\
&[h_j, E_k{}^l] = (\delta_{jk} - \delta_{jl})E_k{}^l,\\
&[h_j, E_{2n+1-k}{}^{2n+1-l}] = -(\delta_{jk} - \delta_{jl})E_{2n+1-k}{}^{2n+1-l}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(h_j)\mathrm{ad}(h_k)) = 4n\delta_{jk}. \tag{4.93}$$

したがって，Cartan 計量は

$$\gamma_{jk} = (h_j, h_k) = 2\delta_{jk}. \tag{4.94}$$

このとき，双対空間 $\mathscr{L}_0^*$ に誘導される計量は，h^j を h_j の双対基底として

$$\gamma^{jk} = (h^j, h^k) = \frac{1}{2}\delta^{jk}. \tag{4.95}$$

ルート系

$$\Delta = \left\{ \pm h^j \pm h^k \;\middle|\; 1 \le j \le k \le n \right\} \tag{4.96}$$

基本ルート系

$$\alpha_1 = h^1 - h^2, \cdots, \alpha_{n-1} = h^{n-1} - h^n,\ \alpha_n = 2h^n. \tag{4.97}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
&h^j - h^k = \alpha_j + \cdots + \alpha_{k-1}\,(1 \le j < k \le n),\\
&h^j + h^k = \alpha_j + \cdots + \alpha_{k-1} + 2\alpha_k + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n\,(1 \le j < k \le n-1),\\
&2h^j = 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n\,(1 \le j \le n-1),\\
&h^j + h^n = \alpha_j + \cdots + \alpha_n\,(1 \le j \le n-1),\\
&2h^n = \alpha_n.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Gauss 分解と Weyl 基底 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_- + \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_+$.

$$\Delta^\pm = \left\{ \pm (h^j + h^k), \pm(h^j - h^k) \,\middle|\, 1 \le j \le k \le n \right\}. \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^\pm: \quad & \alpha = \pm 2h^j \mapsto E_\alpha = E_j^\pm := E^\pm_{j\,2n+1-j}, \\ & \alpha = \pm(h^j + h^k) \mapsto E_\alpha = E^\pm_{jk+} := \frac{1}{\sqrt{2}}(E^\pm_{j\,2n+1-k} + E^\pm_{k\,2n+1-j}), \\ & \alpha = \pm(h^j - h^k) \mapsto E_\alpha = E^\pm_{jk-} := \frac{1}{\sqrt{2}}(E^\pm_{j\,k} - E^\pm_{2n+1-k\,2n+1-j}). \end{aligned} \tag{4.100}$$

Wyle 基底の交換関係

$$\begin{aligned} & [h_j, h_k] = 0,\ [X, E_\alpha] = \alpha(X)E_\alpha;\ X \in \mathscr{L}_0, \\ & [E_j^\pm, E_k^\pm] = 0,\ [E_j^\pm, E^\pm_{kl+}] = 0,\ [E_j^\pm, E^\pm_{kl-}] = \mp\delta_{jl}E^\pm_{kl+}, \\ & [E^\pm_{jk+}, E^\pm_{lm+}] = 0, \\ & [E^\pm_{jk+}, E^\pm_{lm-}] = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{jm}E^\pm_{kl+} + \delta_{km}E^\pm_{jl+}\right), \\ & [E^\pm_{jk-}, E^\pm_{lm-}] = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{kl}E^\pm_{jm-} + \delta_{jm}E^\pm_{lk-}\right), \\ & [E_j^+, E_k^-] = \delta_{jk}h_j,\ [E_j^\pm, E^\mp_{kl+}] = \pm\left(\delta_{jl}E^\mp_{kl-} + \delta_{jk}E^\pm_{kl-}\right),\ [E_j^\pm, E^\mp_{kl-}] = \mp\delta_{jk}E^\pm_{kl+}, \\ & [E^+_{jk\pm}, E^-_{jk\pm}] = \frac{1}{2}(h_j \pm h_k), \\ & [E^+_{jk+}, E^-_{lm+}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{jl}E_{km-} + \delta_{km}E_{jl-} + \delta_{jm}E_{kl-} + \delta_{kl}E_{jm-}\right), \\ & [E^\pm_{jk+}, E^\mp_{lm-}] = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{jl}E^\pm_{km+} + \delta_{kl}E^\pm_{jm+}\right),\ [E^+_{jk-}, E^-_{lm-}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_{km}E_{jl-} - \delta_{jl}E_{mk-}\right). \end{aligned}$$

4.6.2 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ の複素解析的既約表現

【定理 4.15】

1. $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は次の条件を満たす最高ウエイトと一対一に対応する：

$$\lambda = m_j h^j : m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_n \ge 0.$$

2. Sp$(n,\mathbb{C})$ の随伴表現の最高ウエイトは
$$\lambda = 2h^1 = 2\alpha_1 + \cdots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n.$$
3. Sp$(n,\mathbb{C})$ の基本整ウエイトは
$$\lambda_1 = h^1,\ \lambda_2 = h^1 + h^2, \cdots, \lambda_n = h^1 + \cdots + h^n.$$
4. $\mathbb{C}^{2n}$ の p 次交代形式の作る線形空間を Λ_p とする．このとき，$\mathbb{C}^{2n}$ への作用から決まる Sp$(n,\mathbb{C})$ の $\Lambda_p(1 \le p \le 2n-1)$ 上への表現は既約で，$1 \le p \le n$ のとき基本整ウエイト λ_p を最高ウエイトとする基本表現 ρ_p となる．特に，$\dim \rho_p = {}_{2n}C_p(1 \le p \le n)$. また，$\Lambda_p$ への表現と Λ_{2n-p} への表現は同型となる．

□

【定理 4.16】 Sp$(n,\mathbb{C})$ の任意の実型の複素既約表現は Sp$(n,\mathbb{C})$ の複素解析的既約表現 (ρ, V) と一対一に対応し，ρ の実型への制限により得られる． □

Proof. SL$(n,\mathbb{C})$ の証明と同じ． □

4.7 B$_r$ 型および D$_r$ 型

4.7.1 SO$(n,\mathbb{C})$ の Lie 代数の構造

SO$(2r,\mathbb{C})$ は次の対応により SO$(2r+1,\mathbb{C})$ の部分群と見なす：
$$\mathrm{SO}(2r,\mathbb{C}) \ni A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C})$$
この対応は，自然な Gauss 分解 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_- + \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_+$ の対応を与える．

基底と交換関係 Lie 代数 $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ の基底は
$$M_{ab} = E_a{}^b - E_b{}^a \tag{4.101}$$
で与えられ，その交換関係は
$$[M_{ab}, M_{cd}] = -\delta_{ac}M_{bd} - \delta_{bd}M_{ac} + \delta_{ad}M_{bc} + \delta_{bc}M_{ad} \quad (a,b,c,d = 1,\cdots,n). \tag{4.102}$$

Cartan 部分代数　rank=r ($n = 2r$ or $n = 2r+1$)

$$\mathscr{L}_0 = \langle h_1, \cdots, h_r \rangle : \quad h_j = -iM_{2j-1\,2j}\ (j = 1, \cdots, r). \tag{4.103}$$

Cartan 計量

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(h_j)\mathrm{ad}(h_k)) = 2(n-2)\delta_{jk}. \tag{4.104}$$

以下，$\mathscr{L}_0$ および $\mathscr{L}_0^*$ の元は基底 h_j およびその双対基底 h^j に関する成分表示で表し，Cartan 計量を

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij}, \quad (h^i, h^j) = \delta^{ij} \tag{4.105}$$

と規格化する．この規格化では

$$\alpha = x_j h^j \ \mapsto H_\alpha = x^j h_j. \tag{4.106}$$

ルート系　B_r 型：$n = 2r$ のとき，

$$\Delta = \left\{ \pm h^j \pm h^k \,(1 \le j < k \le r) \right\}. \tag{4.107}$$

D_r 型：$n = 2r+1$ のとき，

$$\Delta = \left\{ \pm h^j \,(1 \le j \le r),\ \pm h^j \pm h^k \,(1 \le j < k \le r) \right\}. \tag{4.108}$$

基本ルート系　B_r 型：$n = 2r+1$ のとき，

$$\Pi : \ \alpha_1 = h^1 - h^2, \cdots, \alpha_{r-1} = h^{r-1} - h^r,\ \alpha_r = h^r \tag{4.109}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} h^j &= \alpha_j + \cdots + \alpha_r \,(1 \le j \le r), \\ h^j - h^k &= \alpha_j + \cdots + \alpha_{k-1} \,(1 \le j < k \le r), \\ h^j + h^k &= \alpha_j + \cdots + \alpha_{k-1} + 2\alpha_k + \cdots + 2\alpha_r \,(1 \le j < k \le r). \end{aligned} \tag{4.110}$$

D_r 型：$n = 2r$ のとき，

$$\Pi : \ \alpha_1 = h^1 - h^2, \cdots, \alpha_{r-1} = h^{r-1} - h^r,\ \alpha_r = h^{r-1} + h^r \tag{4.111}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
&h^j - h^{j+1} = \alpha_j \,(1 \le j \le r-1),\\
&h^j - h^k = \alpha_j + \cdots + \alpha_{k-1} \,(1 \le j < k-1 < r),\\
&h^j + h^k = \alpha_j + \cdots + \alpha_{k-1} + 2\alpha_k + \cdots + 2\alpha_{r-2} + \alpha_{r-1} + \alpha_r \,(1 \le j < k \le r-2),\\
&h^j + h^{r-1} = \alpha_j + \cdots + \alpha_r \,(1 \le j \le r-2),\\
&h^j + h^r = \alpha_j + \cdots + \alpha_{r-2} + \alpha_r \,(1 \le j \le r-2),\\
&h^{r-1} + h^r = \alpha_r.
\end{aligned} \tag{4.112}
$$

Gauss 分解と Weyl 基底　$\mathscr{L} = \mathscr{L}_- + \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_+$

B_r 型：$n = 2r+1$ のとき，

$$
\Delta^{\pm} = \{\, \pm h_j \mid 1 \le j \le r\} \cup \{\, \pm h_j + \eta h_k) \mid 1 \le j < k \le r, \eta = \pm 1\}\,. \tag{4.113}
$$

に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\pm}:\ \ &\alpha = \pm h^j \quad \mapsto E_\alpha = E_{j\pm} := -\frac{i}{\sqrt{2}}(M_{2r+1\,2j-1} \pm iM_{2r+1\,2j}),\\
&\alpha = \pm h^j + \eta h^k\\
&\quad \mapsto E_\alpha = E_{j\pm k\eta} := \frac{1}{2}\,\{\pm M_{2j-1\,2k-1} - \eta M_{2j\,2k} + i(M_{2j\,2k-1} \pm \eta M_{2j-1\,2k})\}
\end{aligned} \tag{4.114}
$$

D_r 型：$n = 2r$ のとき，

$$
\Delta^{\pm} = \{\, \pm h_j + \eta h_k) \mid 1 \le j < k \le r, \eta = \pm 1\}\,. \tag{4.115}
$$

に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\pm}:\ \ &\alpha = \pm h^j + \eta h^k\\
&\quad \mapsto E_\alpha = E_{j\pm k\eta} := \frac{1}{2}\,\{\pm M_{2j-1\,2k-1} - \eta M_{2j\,2k} + i(M_{2j\,2k-1} \pm \eta M_{2j-1\,2k})\}
\end{aligned} \tag{4.116}
$$

ここで，

$$
E_{j\epsilon k\eta} = -\epsilon\eta E_{k\eta j\epsilon}. \tag{4.117}
$$

Weyl 基底の交換関係

$$
\begin{aligned}
&[h_i, h_j] = 0,\\
&[X, E_\alpha] = \alpha(X)E_\alpha;\ X \in \mathscr{L}_0,\\
&[E_{j\epsilon}, E_{j(-\epsilon)}] = \epsilon h_j,\\
&[E_{j\epsilon}, E_{k\eta}] = \epsilon E_{j\epsilon k\eta},\\
&[E_{j\epsilon'}, E_{k\epsilon l\eta}] = \epsilon(\delta_{jk}\delta(\epsilon'+\epsilon)E_{l\eta} - \delta_{jl}\delta(\epsilon'+\eta)E_{k\epsilon}),\\
&[E_{j\epsilon k\eta}, E_{j(-\epsilon)k(-\eta)}] = \epsilon h_j + \eta h_k,\\
&[E_{j\epsilon k\eta}, E_{j'\epsilon' k'\eta'}] = \delta_{jj'}\delta(\epsilon'+\epsilon)\eta E_{k\eta k'\eta'} - \delta_{kk'}\delta(\eta'+\eta)\epsilon' E_{j\epsilon j'\epsilon'}\\
&\qquad +\delta_{jk'}\delta(\eta'+\epsilon)\epsilon\epsilon'\eta E_{k\eta j\epsilon'} + \delta_{kj'}\delta(\epsilon'+\eta)\epsilon' E_{j\epsilon k'\eta'}.
\end{aligned}
$$

【注 4.17】 上記の Gauss 分解は，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ないし $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の Gauss 分解の $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ への制限とはなっていない．これら 2 つの Gauss 分解は次のように対応する．

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C}) \ni A \mapsto TAT^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}).$$

ここで T は次の 2 つの行列の結合である: $T = T_2T_1$

$$T_1:\ \begin{array}{ll} (T_1)_{oo} = 1/\sqrt{2} & (T_1)_{oe} = -i/\sqrt{2} \\ (T_1)_{eo} = 1/\sqrt{2} & (T_1)_{ee} = i/\sqrt{2} \end{array}.$$

ここで，o, e はそれぞれ奇数および偶数の添え字.

$$T_2:\ \begin{array}{ll} (T_2)_{j\,2j-1} = 1; & 1 \le j \le (n+1)/2, \\ (T_2)_{n+1-j\,2j} = 1; & 1 \le j \le n/2, \\ \text{他の成分} = 0. & \end{array}$$

T_1 は座標変換

$$
\begin{aligned}
x'_{2j-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j-1} + ix_{2j}) = z_j,\\
x'_{2j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j-1} - ix_{2j}) = \tilde{z}_j
\end{aligned}
$$

と，また, T_2 は座標の並べ替え

$$(1, 2, \cdots, n-1, n) \mapsto (1, 3, \cdots, 4, 2)$$

と対応する．この写像により，$\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ の Weyl 基底は次のような $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の Weyl 基底と対応する．

$$\begin{aligned} h_j &\mapsto h_j - h_{n+1-j}, \\ E_{j\pm} &\mapsto \pm i(E^{\pm}_{j\,r+1} - E^{\pm}_{r+1\,2r+2-j}), \\ E_{j\pm k\eta} &\mapsto P_{\pm\eta}(E^{\pm}_{j\,n+1-k} - E^{\pm}_{k\,n+1-j}) + P_{\mp\eta}(E^{\pm}_{j\,k} - E^{\pm}_{n+1-k\,n+1-j})\ (j<k). \end{aligned}$$

ただし，$P_\eta = (1+\eta)/2$. □

4.7.2 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ の複素解析的既約表現

【定理 4.18 $(\mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C}))$**】**

1. $\mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は次の条件を満たす最高ウエイトと一対一に対応する：

$$\lambda = m_j h^j : m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r \geq 0.$$

   ただし，m_j はすべてが整数かすべてが半奇数.

2. $\mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C})$ の随伴表現の最高ウエイトは

$$\lambda = h^1 + h^2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_r.$$

3. $\mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C})$ の基本整ウエイトは

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = h^1,\ \cdots, \lambda_{r-1} = h^1 + \cdots + h^{r-1}, \\ &\lambda_r = \frac{1}{2}(h^1 + h^2 + \cdots + h^r). \end{aligned}$$

4. $\mathbb{C}^{2r+1}$ の p 次交代形式の作る線形空間を Λ_p とする．このとき，$\mathbb{C}^{2r+1}$ への作用から決まる $\mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C})$ の $\Lambda_p (1 \leq p \leq 2r)$ 上への表現は既約で，Λ_p への表現と Λ_{2r+1-p} への表現は同型となる．Λ_p への表現は，$1 \leq p \leq r-1$ のとき基本整ウエイト λ_p を最高ウエイトとする基本表現 ρ_p，$p = r$ のとき $2\lambda_r$ を最高ウエイトとする既約表現となる．特に，$\dim \rho_p = {}_nC_p$.

□

【定理 4.19 (SO$(2r,\mathbb{C})$)**】**

1. SO$(2r,\mathbb{C})$ の有限次元複素既約表現は次の条件を満たす最高ウエイトと一対一に対応する：
$$\lambda = m_j h^j : m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq |m_r|.$$
ただし，m_j はすべてが整数かすべてが半奇数.

2. SO$(2r,\mathbb{C})$ の随伴表現の最高ウエイトは
$$\lambda = h^1 + h^2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{r-1} + \alpha_r.$$

3. SO$(2r,\mathbb{C})$ の基本整ウエイトは
$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = h^1,\ \cdots, \lambda_{r-2} = h^1 + \cdots + h^{r-2},\\
&\lambda_{r-1} = \frac{1}{2}(h^1 + \cdots + h^{r-1} - h^r),\\
&\lambda_r = \frac{1}{2}(h^1 + \cdots + h^{r-1} + h^r).
\end{aligned}$$

4. $\mathbb{C}^{2r}$ の p 次交代形式の作る線形空間を Λ_p とする．このとき，$\mathbb{C}^{2r}$ への作用から決まる SO$(2r,\mathbb{C})$ の $\Lambda_p(1 \leq p \leq 2r-1)$ 上への表現は $p \neq r$ のとき既約で，Λ_p への表現と Λ_{2r-p} への表現は同型となる．Λ_p への表現は，$1 \leq p \leq r-2$ のとき基本整ウエイト λ_p を最高ウエイトとする基本表現 ρ_p，$p = r-1$ のとき $\lambda_{r-1} + \lambda_r$ を最高ウエイトとする既約表現となる．特に，$\dim \rho_p = {}_nC_p$. また，Λ_r への表現は可約で，Λ_r の Hodge 双対に関する固有空間への分解 $\Lambda_r = \Lambda_r^+ + \Lambda_r^-$ が既約分解を与える．Λ_r^+ および Λ_r^- への表現は，それぞれ最高ウエイト $2\lambda_r$ および $2\lambda_{r-1}$ の既約表現となる．２つの表現は同じ次元，${}_{2r}C_r/2$ をもつ．

□

4.8　スピノール群とスピノール表現

4.8.1　定義と一般的性質

【定義 4.20】　体 k 上の $C\ell(V,q)$ に対して，その可逆元の作る乗法群を $C\ell^\times(V,q)$ とする．$C\ell^\times(V,q)$ の随伴表現
$$\mathrm{Ad} : C\ell^\times(V,q) \to \mathrm{Aut}(C\ell(V,q))$$

を

$$\mathrm{Ad}_\phi(y) = \phi y \phi^{-1} \quad \phi \in C\ell^\times(V,q), y \in C\ell(V,q)$$

で，また，$C\ell^\times(V,q)$ の**ねじれ随伴表現**

$$\widetilde{\mathrm{Ad}} : C\ell^\times(V,q) \to \mathrm{GL}(C\ell(V,q))$$

を

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_\phi(y) = \alpha(\phi) y \phi^{-1} \quad \phi \in C\ell^\times(V,q), y \in C\ell(V,q)$$

により定義する．ここで，α は $\alpha(v) = -v\ (v \in V)$ により一意的に決まる $C\ell(V,q)$ の主自己同型である．ϕ が偶元，すなわち $\phi \in C\ell^0(V,q)$ のとき，$\widetilde{\mathrm{Ad}}_\phi = \mathrm{Ad}_\phi$，$\phi \in C\ell^1(V,q)$ のとき，$\widetilde{\mathrm{Ad}}_\phi = -\mathrm{Ad}_\phi$ である． □

【命題 4.21】 $v, w \in V$ に対して，$q(v) \neq 0$ のとき，$\widetilde{\mathrm{Ad}}_v$ は V における v の垂直な超平面に関する反転を表す：

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_v(w) = -\mathrm{Ad}_v(w) = w - \frac{q(v,w)}{q(v)} v.$$

□

【定義 4.22】 $C\ell^\times(V,q)$ の部分群を

$$\mathrm{Pin}(V,q) := \left\{ v_1 \cdots v_r \in C\ell^\times(V,q) \,\middle|\, q(v_j) = \pm 1 \forall j \right\},$$
$$\mathrm{Spin}(V,q) := \mathrm{Pin}(V,q) \cap C\ell^0(V,q)$$

で定義する．$\mathrm{Spin}(V,q)$ は (V,q) 上の**スピノール群**と呼ぶ． □

【定義 4.23】 体 k の乗法群 $k^\times$ が $k^\times = (k^\times)^2 \cup (-(k^\times)^2)$ となるとき，k を**スピン体**という． □

【定理 4.24】

1) V をスピン体 k 上の有限次元ベクトル空間，q をその非退化計量とするとき，次の完全列が存在する：

$$0 \to F \to \mathrm{Spin}(V,q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}=\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(V,q) \to 1,$$
$$0 \to F \to \mathrm{Pin}(V,q) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{O}(V,q) \to 1.$$

ここで，F は $\sqrt{-1} \notin k$ のとき $\mathbb{Z}_2 = \{1,-1\}$，その他のとき $\mathbb{Z}_4 = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$ である．特に，$k = \mathbb{R}$ のとき，次の完全列が存在する：

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}_{r,s} \to \mathrm{SO}_{r,s} \to 1,$$
$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Pin}_{r,s} \to \mathrm{O}_{r,s} \to 1.$$

さらに，$(r,s) \neq (1,1)$ のとき，$\mathrm{O}_{r,s}$ の各連結成分上でこの 2 価の被覆空間は非自明である．また，Spin_n は $n \geq 3$ のとき単連結である．

2) V の次元が偶数の時，次の完全列が存在する：

$$0 \to F \to \mathrm{Pin}(V,q) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{O}(V,q) \to 1.$$

V の次元が奇数の時，次の完全列が存在する：

$$0 \to F' \to \mathrm{Pin}(V,q) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(V,q) \to 1.$$

ここで，$F' = F \cup \{\Gamma, -\Gamma\}$．ただし，$e_1, \cdots, e_n$ を V の正規直交基底として $\Gamma = e_1 \cdots e_n$．

□

【定義 4.25】 $\mathcal{C}\ell_n$ の実ベクトル空間 S 上への実既約表現を Spin_n に制限して得られる表現

$$\Delta_n : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{GL}(S)$$

を Spin_n **の実スピノール表現**と呼ぶ．同様に，$\mathbb{C}\ell_n$ の複素ベクトル空間 S 上への複素既約表現を Spin_n に制限して得られる複素表現

$$\Delta_n^{\mathbb{C}} : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(S)$$

を Spin_n **の複素スピノール表現**と呼ぶ． □

【定理 4.26】 $n \equiv 3 (\mathrm{mod} 4)$ のとき，$C\ell_n$ の 2 つの既約表現から得られる実スピノール表現 Δ_n は同値となる．したがって，任意の n に対して，実スピノール表現は一意的である．さらに，次が成り立つ：

i) $n \equiv 3, 5, 6, 7 (\mathrm{mod} 8)$ のとき，Δ_n は既約である．

ii) $n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod} 8)$ のとき，Δ_n は 2 つの同値な既約表現の直和となる．

iii) $n = 4m$ のとき，Δ_n は非同値な 2 つの既約表現の直和となる：

$$\Delta_{4m} = \Delta_{4m}^{+} \oplus \Delta_{4m}^{-}.$$

それぞれは体積要素 ω の固有値 $+1$，-1 の固有空間となる．

$\square$

【定理 4.27】 n が奇数のとき，$C\ell_n$ の 2 つの既約表現から得られる複素スピノール表現 $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ は同値となる．したがって，すべての n に対して $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ は一意的である．さらに，次が成り立つ：

i) $n = 2m + 1$ のとき，$\Delta_{2m+1}^{\mathbb{C}}$ は既約で，その次元は 2^m となる．

ii) $n = 2m$ のとき，$\Delta_{2m}^{\mathbb{C}}$ は同値でない 2 つの既約表現の直和となる：

$$\Delta_{2m}^{\mathbb{C}} = \Delta_{2m}^{\mathbb{C}\,+} \oplus \Delta_{2m}^{\mathbb{C}\,-}.$$

それぞれは複素体積要素 $\omega_{\mathbb{C}} := i^m \omega$ の固有値 $+1$，-1 の固有空間となり，いずれも次元 2^{m-1} を持つ．

$\square$

4.8.2 基本スピノール表現の構成

Γ^μ を n 次元実 Clifford 代数 $C\ell_{1,n-1}$ の生成元とする：

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{4.118}$$

1. $n = 2r$ **のとき**

i) $\mathbb{C}\ell_{2r} \cong \overset{r}{\otimes}\, \mathbb{C}\ell_2 \cong \overset{r}{\otimes}\, \mathbb{C}(2) \cong \mathbb{C}(2^r)$:

$$\Gamma^{0\pm} = \frac{1}{2}(\pm\Gamma^0 + \Gamma^1),\ \Gamma^{j\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma^{2j} \pm i\Gamma^{2j+1})\ (j = 1, \cdots, r-1) \tag{4.119}$$

とおくと，

$$\{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b+}\} = 0,\ \{\Gamma^{a-}, \Gamma^{b-}\} = 0,\ \{\Gamma^{a+}, \Gamma^{b-}\} = \delta^{ab}. \tag{4.120}$$

よって，v_0 を $\mathbb{C}\ell_n$ の有限次元既約複素表現の”最高ウエイト”ベクトル

$$\Gamma^{a+} v_0 = 0 \tag{4.121}$$

とすると，表現空間は

$$|s_0\, s_1 \cdots s_{r-1}\rangle = (\Gamma^{0-})^{1-2s_0} \cdots (\Gamma^{r-1\,-})^{1-2s_{r-1}} v_0\ (s_a = \pm 1/2) \tag{4.122}$$

で張られる 2^r 次元複素空間となる．また，

$$S_0 = \frac{1}{2}\Gamma^0\Gamma^1,\ S_j = -\frac{i}{2}\Gamma^{2j}\Gamma^{2j+1}\ (j = 1, \cdots, r-1) \tag{4.123}$$

とおくと，

$$S_a = \Gamma^{a+}\Gamma^{a-} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \Gamma^{a-}\Gamma^{a+}, \tag{4.124}$$

$$[S_a, \Gamma^{b\pm}] = \pm\Gamma^{a\pm}\delta^b_a. \tag{4.125}$$

より，$\Gamma^{a\pm}$ の表現は

$$S_a|s_0\, s_1 \cdots s_{r-1}\rangle = s_a|s_0\, s_1 \cdots s_{r-1}\rangle,$$
$$\Gamma^{a\pm}|s_0\, s_1 \cdots s_{r-1}\rangle = (-1)^{(1-2s_0)+\cdots+(1-2s_{a-1})}|s_0 \cdots s_{a-1}\, s_a \pm 1/2\, s_{a+1} \cdots s_{r-1}\rangle.$$

となる．これは，成分表示では，

$$\Gamma^{a+} = \overbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}^{a} \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \overbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}^{r-a-1}, \tag{4.126a}$$

$$\Gamma^{a-} = \overbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}^{a} \otimes \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \otimes \overbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}^{r-a-1}, \tag{4.126b}$$

$$S_a = \overbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}^{a} \otimes \frac{1}{2}\sigma_3 \otimes \overbrace{I_2 \otimes \cdots \otimes I_2}^{r-a-1} \tag{4.126c}$$

と表される．これより，Γ^a は次のように成分表示される：

$$\begin{aligned}
\Gamma^0 \quad &= (i\sigma_2)\otimes\overbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}^{r-1}, && (4.127a)\\
\Gamma^1 \quad &= (\sigma_1)\otimes\overbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}^{r-1}, && (4.127b)\\
\Gamma^{2j} \quad &= \overbrace{\sigma_3\otimes\cdots\otimes\sigma_3}^{j}\otimes(\sigma_1)\otimes\overbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}^{r-j-1}, && (4.127c)\\
\Gamma^{2j+1} \quad &= \overbrace{\sigma_3\otimes\cdots\otimes\sigma_3}^{j}\otimes(\sigma_2)\otimes\overbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}^{r-j-1}. && (4.127d)
\end{aligned}$$

ただし，$j=1,\cdots,r-1$ である．特に，

$$\bar\Gamma^0=\Gamma^0,\ \bar\Gamma^1=\Gamma^1,\ \bar\Gamma^{2j}=\Gamma^{2j},\ \bar\Gamma^{2j+1}=-\Gamma^{2j+1}\,(j=1,\cdots,r-1) \tag{4.128}$$

となる．また，

$$(\Gamma^0)^T=-\Gamma^0,\ (\Gamma^1)^T=\Gamma^1,\ (\Gamma^{2j})^T=\Gamma^{2j},\ (\Gamma^{2j+1})^T=-\Gamma^{2j+1}\,(j=1,\cdots,r-1). \tag{4.129}$$

ii) $\mathrm{Spin}(2r,\mathbb{C})\subset \mathcal{C}\ell_{2r}\rhd\mathbb{C}^{2^r}$:

$$\begin{aligned}
M_{0j} &= -\Sigma^{0j}=\frac{i}{4}[\Gamma^0,\Gamma^j],\\
M_{jk} &= i\Sigma^{jk}=\frac{1}{4}[\Gamma^j,\Gamma^k]\ (j,k=1,\cdots,2r-1)
\end{aligned} \tag{4.130}$$

とおくと，$i\Sigma^{\mu\nu}$ は $\mathrm{SO}(2r-1,1)$ の標準交換関係

$$i[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\lambda\sigma}]=-\eta^{\mu\lambda}\Sigma^{\nu\sigma}-\eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\lambda}+\eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\lambda}+\eta^{\nu\lambda}\Sigma^{\nu\sigma} \tag{4.131}$$

を満たす．また，M_{ab} は $\mathrm{SO}(2r,\mathbb{C})$ の標準生成元の交換関係 (4.102) を満たし，その Cartan 部分代数の標準基底 h_a は

$$h_a=-iM_{2a\,2a+1}=S_a\ (a=0,\cdots,r-1) \tag{4.132}$$

となる．また，$\mathscr{L}_\pm$ の Weyl 基底は

$$E_{0\pm k\epsilon}=i\Gamma^{0\pm}\Gamma^{k\epsilon},\ E_{j\pm k\epsilon}=\mp\Gamma^{j\pm}\Gamma^{k\epsilon} \tag{4.133}$$

と表される．いま，$\Gamma\in\mathcal{C}\ell_{2r}$ を

$$\begin{aligned}
\Gamma\ &= i^{-r+1}\Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^{2r-1}=2^rS_0S_1\cdots S_{r-1}\\
&= \sigma_3\otimes\cdots\otimes\sigma_3
\end{aligned} \tag{4.134}$$

と定義すると，

$$(\Gamma)^2 = 1,\ \{\Gamma, \Gamma^\mu\} = 0,\ [\Gamma, \Sigma^{\mu\nu}] = 0 \tag{4.135}$$

より，スピノール表現 $\mathrm{Spin}(2r,\mathbb{C}) \triangleright \mathbb{C}^{2^r}$ は可約で，$\Gamma = \pm 1$ の二つの表現 $\rho_\pm$ に分解される:

$$\begin{aligned} \rho_+ \triangleright &\quad |s_0 \cdots s_{r-1}\rangle\ (s_0 \cdots s_{r-1} > 0), \\ \rho_- \triangleright &\quad |s_0 \cdots s_{r-1}\rangle\ (s_0 \cdots s_{r-1} < 0). \end{aligned}$$

それぞれの表現は最高ウエイトベクトル

$$\begin{aligned} \rho_+ : &\quad |1/2 \cdots 1/2\, 1/2\rangle;\ \lambda = (h^0 + \cdots + h^{r-1} + h^r)/2, \\ \rho_- : &\quad |1/2 \cdots 1/2\ -1/2\rangle;\ \lambda = (h^0 + \cdots + h^{r-1} - h^r)/2 \end{aligned}$$

を含んでおり，かつ既約である．これらは基本スピノール表現に対応し，その次元はいずれも 2^{r-1} である．

2. $n = 2r+1$ のとき .

i) $\mathcal{C}\ell_{2r+1} \cong \mathcal{C}\ell_{2r} \oplus \mathcal{C}\ell_{2r} \cong \mathbb{C}(2^r) \oplus \mathbb{C}(2^r)$: $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ は

$$\Gamma^{0\pm}, \cdots, \Gamma^{r-1\pm}, \Gamma^{2r} \tag{4.136}$$

により生成される．このとき，

$$(\Gamma\Gamma^{2r})^2 = 1,\ [\Gamma, \Gamma^{2r}] = 0,\ [\Gamma\Gamma^{2r}, \Gamma^{a\pm}] = 0\ (a = 0, \cdots, r-1). \tag{4.137}$$

$\Gamma\Gamma^{2r}$ は $\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ の中心に属する射影的要素となる．したがって，$\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ は $\Gamma^{2r} = \pm\Gamma$ となる 2 つのイデアルに直和分解され，因子はともに $\mathcal{C}\ell_{2r}$ と同型となる．

ii) $\mathrm{Spin}(2r+1,\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}\ell_{2r+1} \triangleright \mathbb{C}^{2^r}$: $\mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C})$ の標準生成元は，$\mathrm{SO}(2r,\mathbb{C})$ の標準生成元 $M_{\mu\nu}(0 \le \mu,\nu \le 2r-1)$ と

$$\begin{aligned} M_{0\,2r} &= -\Sigma^{0\,2r} = \frac{i}{4}[\Gamma^0, \Gamma^{2r}], \\ M_{j\,2r} &= i\Sigma^{j\,2r} = \frac{1}{4}[\Gamma^j, \Gamma^{2r}]\ (j = 1, \cdots, 2r-1) \end{aligned} \tag{4.138a}$$

により与えられる．したがって，$\mathcal{C}\ell_{2r+1}$ の既約分解と $\mathcal{C}\ell_{2r}$ の既約表現から $\mathrm{Spin}(2r+1,\mathbb{C})$ のスピノール表現が一意的に定まる．今の場合，$\Sigma^{\mu,2r}$ は Γ と反可換で $\Gamma = 1$ の要素と $\Gamma = -1$ の要素の間を結ぶので，この表現は既約となり，最高ウエイトは

$$|1/2\, 1/2, \cdots, 1/2 >; \lambda = (h^1 + \cdots + h^r)/2. \tag{4.139}$$

これは，$\mathrm{SO}(2r+1,\mathbb{C})$ の基本スピノール表現に対応し，その次元は 2^r.

交換関係による特徴付け　SO$(n,1)$ の生成元

$$i\Sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{4}[\Gamma^\mu,\Gamma^\nu] \tag{4.140}$$

は一般に交換関係

$$[i\Sigma^{\alpha\beta},\Gamma^\mu]=\eta^{\mu\beta}\Gamma^\alpha-\eta^{\mu\alpha}\Gamma^\beta \tag{4.141}$$

と表される．これより，無限小 Lorentz 変換 $\delta\Lambda^\alpha{}_\beta$ に対して，

$$\left[\frac{i}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\delta\Lambda_{\alpha\beta},\Gamma^\mu\right]=-\delta\Lambda^\mu{}_\nu\Gamma^\nu \tag{4.142}$$

が成り立つ．この積分形は

$$S(\Lambda)^{-1}\Gamma^\mu S(\Lambda)=\Lambda^\mu{}_\nu\Gamma^\nu; \tag{4.143}$$

$$\delta S=\frac{i}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\delta\Lambda_{\alpha\beta}. \tag{4.144}$$

Γ^μ の表現が

$$(\Gamma^0)^\dagger=-\Gamma^0,\ (\Gamma^j)^\dagger=\Gamma^j \tag{4.145}$$

を満たすとき，

$$S^\dagger\Gamma^0=\Gamma^0S^{-1} \tag{4.146}$$

が成り立つ．

4.8.3 Majorana スピノール

【定義 4.28 (Majorana スピノール)**】**　スピノール表現

$$\rho:\mathrm{Spin}(D-1,1)\subset\mathrm{Spin}(D,\mathbb{C})\subset\mathcal{C}\ell_D\triangleright\mathbb{C}^{2^{[D/2]}}=\mathscr{V}$$

に対して，$B\in M(\mathscr{V},\mathbb{C})$ が存在して，

$$\mathscr{M}:=\left\{\zeta\in\mathscr{V}\ \middle|\ \bar{\zeta}=B\zeta\right\} \tag{4.147}$$

が ρ で不変で $\mathscr{M}\neq\{0\}$ となるとき，$\mathscr{M}$ の元を **Majorana スピノール**という．□

【命題 4.29】　スピノール表現 ρ に対して Majorana スピノールが存在するための必要十分条件は，ρ が $\mathrm{Spin}(D-1,1)$ の $\mathbb{R}$-表現 ρ_0 の複素化を成分として含むことである．この条件はさらに，ρ で不変な $\mathscr{V}$ の複素部分空間 $\mathscr{V}_1$ および $\mathscr{V}_1$ の一次変換 B が存在して，$\rho_1=\rho|_{\mathscr{V}_1}$ とおくと，$\bar{\mathscr{V}}=\mathscr{V}$，$\bar{\rho}_1=B\rho_1B^{-1}$，$\bar{B}B=1$ が成り立つことと同値である．□

【命題 4.30】 §4.8.2 で構成した $\mathbb{C}\ell_D$ の既約表現 ρ のもとで，$D=2k+2, 2k+3$ に対して，

$$B_0 = i^k \Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{2k+1}, \quad B_1 = \Gamma B_0 \tag{4.148}$$

とおくと，

$$\bar{B}_0 = B_0, \quad \bar{B}_1 = B_1, \tag{4.149}$$

$$B_0^2 = (-1)^{k(k+1)/2}, \quad B_1^2 = (-1)^{k(k-1)/2}, \tag{4.150}$$

$$\Gamma B_0 = (-1)^k B_0 \Gamma \tag{4.151}$$

および

$$B_0 \Gamma^\mu B_0^{-1} = (-1)^k \bar{\Gamma}^\mu, \quad B_1 \Gamma^\mu B_1^{-1} = (-1)^{k+1} \bar{\Gamma}^\mu \tag{4.152}$$

が成り立つ．ただし，B_1 に対する式は $D=2k+2$ の時のみ成り立つ． □

【定理 4.31】 スピノール表現 $\rho : \mathrm{Spin}(D-1,1) \subset \mathbb{C}\ell_D \triangleright \mathbb{C}^{2^{[D/2]}} = \mathscr{V}$ に対して，Majorana スピノールが存在するための必要十分条件は各次元 D に対して次のように表される：

i) $D \equiv 0(\mathrm{mod}4)$: 常に存在し，$\mathscr{V} = \mathscr{M} \oplus i\mathscr{M}$ となる．Weyl スピノールへの分解 $\mathscr{V} = \mathscr{W}_+ + \mathscr{W}_-$ ($\mathscr{W}_\pm = P_\pm \mathscr{V}, P_\pm := (1 \pm \Gamma)/2$) に対して，$\rho = \rho_+ \oplus \rho_-$ とおくとき，$\mathbb{C}$-線形同型 $E : \mathscr{W}_- \to \mathscr{W}_+$ が存在して，$\rho_- = E^{-1} \bar{\rho}_+ E$ となる．Majorana スピノールを定義する線形変換 B は，この E を用いて

$$B = \begin{pmatrix} 0 & cE \\ (\bar{c}\bar{E})^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.153}$$

と表される．ここで，c はゼロでない任意の複素数である．スピン表示に対しては，$D \equiv 0(\mathrm{mod}8)$ の時に B_0 が，$D \equiv 4(\mathrm{mod}8)$ の時に B_1 がこの条件を満たす．Weyl 表示のもとで，$\zeta \in \mathscr{W}_+$ は

$$\zeta = \xi \oplus c^{-1} E^{-1} \bar{\xi} \tag{4.154}$$

と表される．

ii) $D \equiv 2(\mathrm{mod}4)$: 条件は $D \equiv 2(\mathrm{mod}8)$．このとき，Weyl スピノールへの分解 $\mathscr{V} = \mathscr{W}_+ + \mathscr{W}_-$ ($\mathscr{W}_\pm = P_\pm \mathscr{V}, P_\pm := (1 \pm \Gamma)/2$) に対して $\bar{\rho}_\pm \cong_{\mathbb{C}} \rho_\pm$ となり，スピン表示では線形変換 B の一般形は

$$B = e^{i\theta_+} P_+ B_0 + e^{i\theta_-} P_- B_0 \tag{4.155}$$

となる．ここで $\theta_\pm$ は任意の実数である．B_1 もこのクラスに含まれる．

iii) $D \equiv 1(\mathrm{mod}2)$: 条件は $D \equiv 1,3(\mathrm{mod}8)$. 線形変換 B の一般形は $B = e^{i\theta}B_0$ となる.

□

4.9 部分群による表現の分解

4.9.1 SU(4)

SU(4) の構造 SL(4, $\mathbb{C}$) の Weyl 基底は

$$\mathscr{L}_0: \quad h_j := E_{jj} - E_{44} \ (j = 1, 2, 3), \tag{4.156a}$$

$$\mathscr{L}_\pm: \quad E^\pm_{jk} \ (1 \le j < k \le 3),\ E^\pm_j \ (j = 1, 2, 3). \tag{4.156b}$$

基本ルート系は，$h^j(h_k) = \delta^j_k$ として，

$$\Pi: \ \alpha_1 = h^1 - h^2,\ \alpha_2 = h^2 - h^3,\ \alpha_3 = h^1 + h^2 + 2h^3. \tag{4.157}$$

基本表現系は

$$F^1 = h^1 = \frac{1}{4}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \tag{4.158a}$$

$$F^2 = h^1 + h^2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \tag{4.158b}$$

$$F^3 = h^1 + h^2 + h^3 = \frac{1}{4}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3). \tag{4.158c}$$

正ルートおよびその Dynkin 成分は

level	Dynkin weight		
3	$(1\ 0\ 1)$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2h^1 + h^2 + h^3,$	(4.159a)
2	$(-1\ 1\ 1)$	$\alpha_2 + \alpha_3 = h^1 + 2h^2 + h^3,$	(4.159b)
	$(1\ 1\ -1)$	$\alpha_1 + \alpha_2 = h^1 - h^3,$	(4.159c)
1	$(2\ -1\ 0)$	$\alpha_1,$	(4.159d)
	$(-1\ 2\ -1)$	$\alpha_2,$	(4.159e)
	$(0\ -1\ 2)$	$\alpha_3.$	(4.159f)

F^j に双対的な $\mathscr{L}_0$ の基底は

$$H_1 = h_1 - h_2,\ H_2 = h_2 - h_3,\ H_3 = h_3. \tag{4.160}$$

レベルベクトル $\bar{R} \in \mathscr{L}_0$ は

$$\bar{R} = [3\ 4\ 3] = 3H_1 + 4H_2 + 3H_3. \tag{4.161}$$

4.9.2 SO(8)

SO(8) の構造　SO(8, ℂ) の Weyl 基底は

$$\mathscr{L}_0:\ \ S_j := -iM_{2j-1\,2j}\ (j=1,2,3,4), \tag{4.162a}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\pm:\ \ E^\pm_{jk\eta} &:= E_{j\pm k\pm\eta}\\ &= -\frac{i}{2}\left[-M_{2j\,2k-1} \pm iM_{2j-1\,2k-1} \pm i\eta(-M_{2j\,2k} \pm iM_{2j-1\,2k})\right]\end{aligned} \tag{4.162b}$$

基本ルート系は，$h^j(S_k) = \delta^j_k$ として，

$$\Pi:\ \ \alpha_1 = h^1 - h^2,\ \alpha_2 = h^2 - h^3,\ \alpha_3 = h^3 - h^4,\ \alpha_4 = h^3 + h^4. \tag{4.163}$$

基本表現系は

$$F^1 = h^1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha^3 + \alpha^4), \tag{4.164a}$$

$$F^2 = h^1 + h^2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \tag{4.164b}$$

$$F^3 = \frac{1}{2}(h^1 + h^2 + h^3 - h^4) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4), \tag{4.164c}$$

$$F^4 = \frac{1}{2}(h^1 + h^2 + h^3 + h^4) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4). \tag{4.164d}$$

正ルートおよびその Dynkin 成分は

level	Dynkin weight		
5	$(0\ 1\ 0\ 0)$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = h^1 + h^2,$	(4.165a)
4	$(1\ -1\ 1\ 1)$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = h^1 + h^3,$	(4.165b)
3	$(-1\ 0\ 1\ 1)$	$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = h^2 + h^3,$	(4.165c)
	$(1\ 0\ -1\ 1)$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = h^1 + h^4,$	(4.165d)
	$(1\ 0\ 1\ -1)$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = h^1 - h^4,$	(4.165e)
2	$(-1\ 1\ -1\ 1)$	$\alpha_2 + \alpha_4 = h^2 + h^4,$	(4.165f)
	$(1\ 1\ -1\ -1)$	$\alpha_1 + \alpha_2 = h^1 - h^3,$	(4.165g)
	$(-1\ 1\ 1\ -1)$	$\alpha_2 + \alpha_3 = h^2 - h^4,$	(4.165h)
1	$(2\ -1\ 0\ 0)$	$\alpha_1,$	(4.165i)
	$(-1\ 2\ -1\ -1)$	$\alpha_2,$	(4.165j)
	$(0\ -1\ 2\ 0)$	$\alpha_3,$	(4.165k)
	$(0\ -1\ 0\ 2)$	$\alpha_4.$	(4.165l)

F^j に双対的な $\mathscr{L}_0$ の基底は

$$H_1 = S_1 - S_2,\ H_2 = S_2 - S_3,\ H_3 = S_3 - S_4,\ H_4 = S_3 + S_4. \tag{4.166}$$

レベルベクトル $\bar{R} \in \mathscr{L}_0$ は

$$\bar{R} = [6\ 10\ 6\ 6] = 6H_1 + 10H_2 + 6H_3 + 6H_4. \tag{4.167}$$

8_v **表現**　(1 0 0 0)

$$8_v: \quad \begin{array}{c} (1\ 0\ 0\ 0) \\ (-1\ 1\ 0\ 0) \\ (0\ -1\ 1\ 1) \\ (0\ 0\ -1\ 1)\ (0\ 0\ 1\ -1) \\ (0\ 1\ -1\ -1) \\ (1\ -1\ 0\ 0) \\ (-1\ 0\ 0\ 0) \end{array} \tag{4.168}$$

8_s **表現**　(0 0 0 1)

$$8_s: \quad \begin{array}{c} (0\ 0\ 0\ 1) \\ (0\ 1\ 0\ -1) \\ (1\ -1\ 1\ 0) \\ (-1\ 0\ 1\ 0)\ (1\ 0\ -1\ 0) \\ (-1\ 1\ -1\ 0) \\ (0\ -1\ 0\ 1) \\ (0\ 0\ 0\ -1) \end{array} \tag{4.169}$$

これは実表現.

$8_s'$ **表現**　(0 0 1 0)

$$8_s': \quad \begin{array}{c} (0\ 0\ 1\ 0) \\ (0\ 1\ -1\ 0) \\ (1\ -1\ 0\ 1) \\ (-1\ 0\ 0\ 1)\ (1\ 0\ 0\ -1) \\ (-1\ 1\ 0\ -1) \\ (0\ -1\ 1\ 0) \\ (0\ 0\ -1\ 0) \end{array} \tag{4.170}$$

これは実表現.

$\mathrm{U}(4)=\mathrm{SU}(4)\times\mathrm{U}(1)\subset\mathrm{SO}(8)$　対応 $\mathbb{C}^4\to\mathbb{R}^8:(z_1,\cdots,z_4)\mapsto(x_1,y_1,\cdots,x_4,y_4)$ $(z_j=x_j-iy_j)$ により U(4) を SO(8) を埋め込むと，

$$\begin{aligned} E_{jk} &\mapsto E_{2j-1\,2k-1}+E_{2j\,2k}, && (4.171a)\\ iE_{jk} &\mapsto E_{2j-1\,2k}-E_{2j\,2k-1} && (4.171b)\end{aligned}$$

より，複素化 $\mathrm{GL}(4,\mathbb{C})=\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ と $\mathrm{SO}(8,\mathbb{C})$ の Lie 代数の Weyl 基底は次のように対応する：

$$\begin{aligned} -1 &\mapsto S_1+S_2+S_3+S_4, && (4.172a)\\ h_j &\mapsto S_j-S_4\ (j=1,2,3), && (4.172b)\\ E^{\pm}_{jk} &\mapsto E^{\pm}_{jk-}\ (1\le j<k\le 3). && (4.172c)\end{aligned}$$

これより，基本表現系の双対基底の対応は

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) &\qquad \mathrm{SO}(8,\mathbb{C}) && \\ H_1=h_1-h_2 &\mapsto S_1-S_2=H_1, && (4.173a)\\ H_2=h_2-h_3 &\mapsto S_2-S_3=H_2, && (4.173b)\\ H_3=h_3 &\mapsto S_3-S_4=H_3, && (4.173c)\\ H_4=-1 &\mapsto S_1+S_2+S_3+S_4=H_1+2H_2+H_3+2H_4 && (4.173d)\end{aligned}$$

となる．したがって，基本表現系の対応は

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(8) &\qquad \mathrm{SU}(4)\times\mathrm{U}(1) && \\ F^1 &\mapsto F^1+F^4, && (4.174a)\\ F^2 &\mapsto F^2+2F^4, && (4.174b)\\ F^3 &\mapsto F^3+F^4, && (4.174c)\\ F^4 &\mapsto 2F^4. && (4.174d)\end{aligned}$$

Dynkin 表示でのウエイトベクトルは行列

$$P(\mathrm{SO}(8)\to\mathrm{SU}(4)\times\mathrm{U}(1))=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&2&1&2\end{pmatrix} \qquad (4.175)$$

により変換される．

たとえば，SO(8) の $8_v, 8_s, 8'_s$ 表現は次のように分解される．

8_v 表現：

$$\begin{array}{cc}
8_v = & 4_1 + \bar{4}_{-1} \\
 & \\
(1\ 0\ 0\ 0) & (1\ 0\ 0)_1 \\
(-1\ 1\ 0\ 0) & (-1\ 1\ 0)_1 \\
(0\ -1\ 1\ 1) & (0\ -1\ 1)_1 \\
(0\ 0\ -1\ 1)\ (0\ 0\ 1\ -1) & (0\ 0\ -1)_1\ (0\ 0\ 1)_{-1} \\
(0\ 1\ -1\ -1) & (0\ 1\ -1)_{-1} \\
(1\ -1\ 0\ 0) & (1\ -1\ 0)_{-1} \\
(-1\ 0\ 0\ 0) & (-1\ 0\ 0)_{-1}
\end{array} \tag{4.176}$$

8_s 表現：

$$\begin{array}{cc}
8_s = & 6_0 + 1_2 + 1_{-2} \\
 & \\
(0\ 0\ 0\ 1) & (0\ 0\ 0)_2 \\
(0\ 1\ 0\ -1) & (0\ 1\ 0)_0 \\
(1\ -1\ 1\ 0) & (1\ -1\ 1)_0 \\
(-1\ 0\ 1\ 0)\ (1\ 0\ -1\ 0) & (-1\ 0\ 1)_0\ (1\ 0\ -1)_0 \\
(-1\ 1\ -1\ 0) & (-1\ 1\ -1)_0 \\
(0\ -1\ 0\ 1) & (0\ -1\ 0)_0 \\
(0\ 0\ 0\ -1) & (0\ 0\ 0)_{-2}
\end{array} \tag{4.177}$$

$8'_s$ 表現：

$$\begin{array}{cc}
8'_s = & 4_{-1} + \bar{4}_1 \\
 & \\
(0\ 0\ 1\ 0) & (0\ 0\ 1)_1 \\
(0\ 1\ -1\ 0) & (0\ 1\ -1)_1 \\
(1\ -1\ 0\ 1) & (1\ -1\ 0)_1 \\
(-1\ 0\ 0\ 1)\ (1\ 0\ 0\ -1) & (-1\ 0\ 0)_1\ (1\ 0\ 0)_{-1} \\
(-1\ 1\ 0\ -1) & (-1\ 1\ 0)_{-1} \\
(0\ -1\ 1\ 0) & (0\ -1\ 1)_{-1} \\
(0\ 0\ -1\ 0) & (0\ 0\ -1)_{-1}
\end{array} \tag{4.178}$$

4.10 具体例

4.10.1 SO(4)

Lie 代数

$$J_i := -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}, \quad N_i := M_{i4} \tag{4.179}$$

とおくと,

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, N_j] = \epsilon_{ijk}N_k, \quad [N_i, N_j] = \epsilon_{ijk}J_k. \tag{4.180}$$

これより,

$$J_i^{\pm} := \frac{1}{2}(J_i \pm N_i) \tag{4.181}$$

とおくと,

$$[J_i^{\pm}, J_j^{\pm}] = \epsilon_{ijk}J_k^{\pm}, \quad [J_i^{\pm}, J_j^{\mp}] = 0. \tag{4.182}$$

したがって,

$$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3). \tag{4.183}$$

SU(2) × SU(2) → SO(4): $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を Pauli 行列として,

$$\sigma : x \in E^4 \to \sigma(x) := x_4 - i(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3) \in M(2, \mathbb{C}) \tag{4.184}$$

とおくと,

$$\det\sigma(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad \sigma(x)\sigma(x)^\dagger = \det\sigma(x) \tag{4.185}$$

より，σ は S^3 から SU(2) への同相写像を与える：

$$\sigma : S^3 \simeq \mathrm{SU}(2). \tag{4.186}$$

この対応により，SU(2) の SU(2) への左作用および右作用から誘導される S^3 の変換は,

$$-\frac{i}{2}(\sigma_i)_L \mapsto J_i^+, \quad \frac{i}{2}(\sigma_i)_R \mapsto J_i^- \tag{4.187}$$

となる．これより，写像

$$\begin{aligned} &\phi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \ni (A, B) \to O \in \mathrm{SO}(4); \\ &A\sigma(x)B^\dagger = \sigma(Ox) \end{aligned} \tag{4.188}$$

は局所同型写像となり,

$$\phi^{-1}(1) = \{(1, 1), (-1, -1)\} \cong \mathbb{Z}_2. \tag{4.189}$$

よって,

$$\mathrm{SO}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2. \tag{4.190}$$

Hopf fibring:　$Z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ に対して，

$$\sigma(Z)=\begin{pmatrix} z_2 & i\bar{z}_1 \\ iz_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \tag{4.191}$$

とおくと，Hopf fibring は

$$p: S^3 \ni Z \mapsto [z_1,z_2]\in\mathbb{C}P^1, \tag{4.192a}$$
$$\mathrm{U}(1) \triangleright S^3 : Z \to e^{i\psi}Z. \tag{4.192b}$$

また，$\mathbb{C}P^1$ と S^2 の対応は

$$\mathbb{C}P^1 \ni [z_1,z_2] \mapsto \left(\frac{2z_1\bar{z}_2}{|z_1|^2+|z_2|^2}, \frac{|z_2|^2-|z_1|^2}{|z_2|^2+|z_1|^2}\right) \in S^2. \tag{4.193}$$

これより，S^2 の標準的な角度座標 (θ,ϕ) を用いて

$$\frac{z_1}{z_2}=e^{i\phi}\tan\frac{\theta}{2}. \tag{4.194}$$

したがって，$Z\in S^3$ は

$$z_1=e^{i(\psi+\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2},\quad z_2=e^{i(\psi-\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2}. \tag{4.195}$$

ここで，θ,ϕ,ψ の標準的な変域は

$$0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\phi<2\pi,\quad 0\le\psi<4\pi. \tag{4.196}$$

S^3 の標準計量は，これらを用いて，

$$ds^2(S^3)=\frac{1}{4}(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)+\frac{1}{4}(d\psi-\cos\theta d\phi)^2. \tag{4.197}$$

また，左不変微分形式 ω が，$Z_0=(0,1)$，

$$\begin{aligned} U(\theta,\phi,\psi) &= \begin{pmatrix} e^{i(\psi-\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} & ie^{-i(\psi+\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{i(\psi+\phi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi-\phi)/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.198}$$

とおくとき，左不変微分形式 ω が

$$\begin{aligned} &\omega=\mathrm{Tr}(A\sigma(dZ_0)); \\ &\sigma(dZ)=U(\theta,\phi,\psi)\sigma(dZ_0)=dU(\theta,\phi,\psi)\sigma(Z_0) \end{aligned} \tag{4.199}$$

より，

$$\omega = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[A\begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^1 - i\omega^2 \\ \omega^1 + i\omega^2 & -\omega^3 \end{pmatrix}\right]. \tag{4.200}$$

ここで，

$$\omega^1 = d\theta\cos\psi - d\phi\sin\theta\sin\psi, \tag{4.201a}$$
$$\omega^2 = d\theta\sin\psi + d\phi\sin\theta\cos\psi, \tag{4.201b}$$
$$\omega^3 = d\psi - d\phi\cos\theta. \tag{4.201c}$$

よって，$\omega^1, \omega^2, \omega^3$ が左不変微分形式の基底となる．A と ω^I との対応は

$$A = -i\sigma_I \to \omega^I. \tag{4.202}$$

$U = U(\alpha, \beta, \gamma)$ の右作用に対応する変換を f とおくと，

$$\omega = \mathrm{Tr}A\sigma(Z)^{-1}\sigma(dZ) \tag{4.203}$$

に対して，

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \mathrm{Tr}A\sigma(f(Z))^{-1}\sigma(df(Z)) = \mathrm{Tr}AU^{-1}\sigma(Z)^{-1}\sigma(dZ)U \\ &= \mathrm{Tr}UAU^{-1}\sigma(Z)^{-1}\sigma(dZ). \end{aligned} \tag{4.204}$$

これより

$$\begin{aligned} f^*\omega^1 = {} & (\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)\,\omega^1 + (\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)\,\omega^2 \\ & + \sin\alpha\sin\gamma\,\omega^3, \end{aligned} \tag{4.205a}$$
$$\begin{aligned} f^*\omega^2 = {} & (\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)\,\omega^1 + (\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\,\omega^2 \\ & - \sin\alpha\cos\gamma\,\omega^3, \end{aligned} \tag{4.205b}$$
$$f^*\omega^3 = -\sin\alpha\sin\beta\,\omega^1 + \sin\alpha\cos\beta\,\omega^2 + \cos\alpha\,\omega^3. \tag{4.205c}$$

4.11 実単純 Lie 群

4.11.1 分類

複素型	実型	定義	極大コンパクト群
A_{n-1}		$X \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$	
	$\mathrm{SU}(n)$ $\mathrm{SU}(p,q)(p+q=n)$ $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ $\mathrm{SU}^*(n)=\mathrm{SL}(n/2,\mathbb{H})$	$X^\dagger X = I_n$ $X^\dagger I_{p,q} X = I_{p,q}$ $\bar{X} = X$ $J_{n/2} X = \bar{X} J_{n/2},\ n$:even	コンパクト $S(\mathrm{U}(p)\times \mathrm{U}(q))$ $\mathrm{SO}(n)$ $\mathrm{Sp}(n/2)$
B_n		$X^T X = I_n,\ X \in \mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{C})$	
	$\mathrm{SO}(2n+1)$ $\mathrm{SO}(p,q)(p+q=2n+1)$	$\bar{X} = X$ $\bar{X} = I_{p,q} X I_{p,q}$	コンパクト $\mathrm{SO}(p)\times \mathrm{SO}(q)$
C_n		$X^T J_n X = J_n,\ X \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$	
	$\mathrm{Sp}(n)$ $\mathrm{Sp}(p,q)(p+q=n)$ $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$	$X^\dagger X = I_{2n}$ $X^\dagger K_{p,q} X = K_{p,q}$ $\bar{X} = X$	コンパクト $\mathrm{Sp}(p)\times \mathrm{Sp}(q)$ $\mathrm{U}(n)$
D_n		$X^T X = I_n,\ X \in \mathrm{SL}(2n,\mathbb{C})$	
	$\mathrm{SO}(2n)$ $\mathrm{SO}(p,q)(p+q=2n)$ $\mathrm{SO}^*(2n)=\mathrm{SO}(n,\mathbb{H})$	$\bar{X} = X$ $\bar{X} = I_{p,q} X I_{p,q}$ $X^\dagger J_n X = J_n$	コンパクト $\mathrm{SO}(p)\times \mathrm{SO}(q)$ $\mathrm{U}(n)$
G_2	G_2 $G_{2(2)}$		コンパクト $\mathrm{SU}(2)\times \mathrm{SU}(2)$
F_4	F_4 $F_{4(-20)}$ $F_{4(4)}$		コンパクト $\mathrm{SO}(9)$ $\mathrm{Sp}(3)\times \mathrm{SU}(2)$
E_6	E_6 $E_{6(2)}$ $E_{6(-14)}$ $E_{6(6)}$ $E_{6(-26)}$		コンパクト $\mathrm{SU}(6)\times \mathrm{SU}(2)$ $\mathrm{SO}(10)\times \mathrm{U}(1)$ $\mathrm{Sp}(4)$ F_4
E_7	E_7 $E_{7(7)}$ $E_{7(-5)}$ $E_{7(-25)}$		コンパクト $\mathrm{SU}(8)$ $\mathrm{SO}(12)\times \mathrm{SU}(2)$ $E_6 \times \mathrm{U}(1)$
E_8	E_8 $E_{8(8)}$ $E_{8(-24)}$		コンパクト $\mathrm{SO}(16)$ $E_7 \times \mathrm{SU}(2)$

Ref: Helgason S 1978B; Besse AL 2002B

注：

1. この表において，実型について位相の自由度は考慮されていない（Lie 代数のみの分類）.
2. 半単純 Lie 群の実型 G に対して，その Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を極大コンパクト部分代数 $\mathfrak{k}$ を用いて $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ と直和分解するとき，$\delta = \dim(\mathfrak{m}) - \dim(\mathfrak{k})$ を $\mathfrak{g}$ の**標数** (charater) と呼ぶ．例外群に対しては，各単純複素 Lie 群において同じ標数をもつ実型は同型となるので，上の表では，実型をランク r と標数 δ を用いて，$G_{r(\delta)}$ と表記している.

4.11.2 同型関係

1. A 型 $\Rightarrow$ B/D 型

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3),\\
&\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6),\\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(2,1),\\
&\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(3,3),\\
&\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,1),\\
&\mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{so}(2,1),\\
&\mathfrak{su}(2,2) \cong \mathfrak{so}(4,2),\\
&\mathfrak{su}(3,1) \cong \mathfrak{so}^*(6) = \mathfrak{so}(3,\mathbb{H}),\\
&\mathfrak{su}^*(2) = \mathfrak{sl}(1,\mathbb{H}) \cong \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3),\\
&\mathfrak{su}^*(4) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{H}) \cong \mathfrak{so}(5,1).
\end{aligned}
$$

2. C 型 $\Rightarrow$ B/D 型

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{so}(3),\\
&\mathfrak{sp}(2) \cong \mathfrak{so}(5),\\
&\mathfrak{sp}(1,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(2,1),\\
&\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(3,2),\\
&\mathfrak{sp}(1,1) \cong \mathfrak{so}(4,1).
\end{aligned}
$$

3. B/D 型内部での同値関係

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3),\\
&\mathfrak{so}(2,2) \cong \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{so}(2,1),\\
&\mathfrak{so}^*(4) = \mathfrak{so}(2,\mathbb{H}) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2,1),\\
&\mathfrak{so}^*(8) = \mathfrak{so}(4,\mathbb{H}) \cong \mathfrak{so}(6,2).
\end{aligned}
$$

5 例外群

Reviews

- John C. Baez, ”The Octonions”

6　超代数と超群

6.1　超代数

【定義 6.1 (超環)】　環 $(R, +, \cdot)$ は，その $\mathbb{Z}_2$ 次数付け，すなわち加法群としての直和分解 $R = R_0 \oplus R_1$ が与えられ，$R_\alpha \cdot R_\beta \subset R_{\alpha+\beta} (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2)$ が成り立つとき，**超環** (super-ring) という．

超環 R において，$a \in R_0$ ないし $a \in R_1$ となる元を**斉次元** (homogeneous element) といい，その全体を $h(R)$ で表す．また，$a \in h(R)$ の次数 $|a|$ を，

$$|\quad| : h(R) \to \mathbb{Z}_2; \quad a \mapsto \alpha \quad \Leftrightarrow \quad a \in R_\alpha$$

により定義する．

さらに，超環 R において，常に

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

が成り立つとき，R は**可換** (commutative) であるという．　□

【定義 6.2 (結合的超代数)】　$\mathbb{Z}_2$ 次数付き代数 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ は，その積演算が結合的であるとき結合的超代数という．　□

【定義 6.3 (可換超代数)】　結合的超代数 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$ において，

$$ab = (-1)^{\deg a \deg b} ba$$

が成り立つとき，$\mathscr{A}$ を可換超代数という．　□

【例 6.4 (行列超代数)**】**　$\mathbb{F}$ を係数とする $p+q$ 次の正方行列の全体 $M(p+q, \mathbb{F})$ の作る代数に，

$$\text{次数}\, 0 : \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad A \in M(p, \mathbb{F}), D \in M(q, \mathbb{F})$$

$$\text{次数}\, 1 : \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad B \in M(p, q, \mathbb{F}), C \in M(q, p, \mathbb{F})$$

により $\mathbb{Z}_2$ 次数を定義すると，結合的超代数が得られる．この超代数を $M(p|q, \mathbb{F})$ と表す．　□

【例 6.5 (外積代数)**】**　$\mathbb{F}$ 係数 L 次元線形空間 $V(FF = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ から作られる外積代数 $\bigwedge V$ を $\mathbb{F}B_L$ と表し，その偶元の次数を 0，奇元の次数を 1 とおくと，可換超代数が得られる．これは，Grassmann 代数に単位元を付加したものと一致する．□

【定義 6.6 (超行列)**】**　可換超代数 $\mathscr{A}$ を係数とする行列を超行列と呼ぶ．超行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad A \in M(p,r,\mathbb{F}), B \in M(p,s,\mathbb{F}), C \in M(q,r,\mathbb{F}), D \in M(q,s,\mathbb{F})$$

と表すとき，

$$\begin{aligned} (p|q) \times (r|s)\ \text{偶超行列：}\ & A, D \in \mathscr{A}_0,\ B, C \in \mathscr{A}_1 \\ (p|q) \times (r|s)\ \text{奇超行列：}\ & A, D \in \mathscr{A}_1,\ B, C \in \mathscr{A}_0 \end{aligned}$$

と定義する．このタイプの超行列の全体を $M(p|q, r|s; \mathscr{A})$ と表す．

特に，$(p|q) \times (p|q)$ 型の超行列の集合を $M(p|q; \mathscr{A})$ と表す．これは，結合的超代数をなす．行列超代数 $M(p|q; \mathbb{F})$ は，自然な埋め込みにより，$M(p|q; \mathbb{F}B_L)$ の部分超代数となる．さらに，$(1|0) \times (r|s)$ 偶超行列を $(r|s)$ 超行ベクトル，$(p|q) \times (1|0)$ 偶超行列を $(p|q)$ 超列ベクトルという．□

【定義 6.7 (超行列の基本演算)**】**

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

を超行列 $M \in M(p|q, r|s, \mathscr{A})$ とする．

i) (**Grassmann 数との積**) Grassmann 数 $E \in \mathscr{A}$ と M の積を，

$$\begin{aligned} EM &:= \begin{pmatrix} E1_p & 0 \\ 0 & (-1)^{\deg E} E1_q \end{pmatrix} M, \\ ME &:= M \begin{pmatrix} E1_r & 0 \\ 0 & (-1)^{\deg E} E1_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により定義する．

ii) (**超転置**) M の超行列としての転置を

$$ {}^{\mathrm{st}}M := \begin{pmatrix} A^T & (-1)^{\deg M} C^T \\ -(-1)^{\deg M} B^T & D^T \end{pmatrix} $$

により定義する．このとき，次の性質がなりたつ：

$$ \begin{aligned} &{}^{\mathrm{st}}(MN) = (-1)^{\deg M \deg N}\,{}^{\mathrm{st}}N\,{}^{\mathrm{st}}M, \\ &{}^{\mathrm{st}}(EM) = E\,{}^{\mathrm{st}}(M), \quad {}^{\mathrm{st}}(ME) = {}^{\mathrm{st}}(M)E, \quad E \in \mathbb{F}B_L \end{aligned} $$

iii) (**超トレース**) 超行列としてのトレースを

$$ \mathrm{str}M := \mathrm{Tr}A - (-1)^{\deg M}\mathrm{Tr}D $$

で定義する．このとき，次の性質が成り立つ．

$$ \begin{aligned} &\mathrm{str}(MN) = (-1)^{\deg M \deg N}\mathrm{str}(NM), \\ &\mathrm{str}(EM) = E(\mathrm{str}M), \quad \mathrm{srt}(ME) = (\mathrm{str}M)E, \\ &\mathrm{str}({}^{\mathrm{st}}M) = \mathrm{str}M, \\ &\mathrm{str}(SMS^{-1}) = \mathrm{str}M. \end{aligned} $$

ここで，S は可逆な $(p|q)$ 正方偶超行列である．

iv) (**超行列式**) M が $(p|q)$ 正方偶超行列であるとき，超行列としての行列式を

$$ \mathrm{sdet}M := \frac{\det(A - BD^{-1}C)}{\det D} $$

により定義する．このとき次の性質が成り立つ：

$$ \begin{aligned} &\mathrm{sdet}(MN) = (\mathrm{sdet}M)(\mathrm{sdet}N), \\ &\mathrm{sdet}({}^{\mathrm{st}}M) = \mathrm{sdet}M, \\ &\mathrm{sdet}(\exp M) = \exp(\mathrm{str}M). \end{aligned} $$

v) (**共役**) $E \in \mathbb{C}B_L$ に対してその共役 $E^\sharp$ を

$$ E^\sharp := \begin{cases} E^* & E \in \mathbb{C}B_{L0} \\ -iE^* & E \in \mathbb{C}B_{L1} \end{cases} $$

により定義する．ここで，E^* は通常の複素共役である．これを用いて，M の共役を

$$M^{\ddagger} := \begin{pmatrix} A^{\sharp T} & C^{\sharp T} \\ B^{\sharp T} & D^{\sharp T} \end{pmatrix}$$

と定義する．このとき，次の性質が成り立つ．

$$\begin{aligned} &(MN)\ddagger = N^{\ddagger} M^{\ddagger}, \\ &(M^{\ddagger})^{\ddagger} = M, \\ &\mathrm{sdet}(M^{\ddagger}) = (\mathrm{sdet} M)^{\sharp} = (\mathrm{sdet} M)^*. \end{aligned}$$

□

6.2 超空間

【定義 6.8 (超空間)**】** 外積代数 $\mathbb{R}B_L = \mathbb{R}_{L0} + \mathbb{R}_{L1}$ より作られる実線形空間

$$\mathbb{R}B_L^{m,n} = \overbrace{\mathbb{R}B_{L0} \times \cdots \times \mathbb{R}B_{L0}}^{m} \times \overbrace{\mathbb{R}B_{L1} \times \cdots \times \mathbb{R}B_{L1}}^{n}$$

を超空間といい，その点を一般に

$$(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\Theta}) = (X^1, \cdots, X^m, \Theta^1, \cdots, \Theta^n)$$

で表す．

$\mathbb{R}B_L$ の元 Z を基底 $\mathscr{E}_M$(M は $\{1, \cdots, L\}$ の部分集合）を用いて $Z = \sum_M Z^M \mathscr{E}_M$ と表すとき，Z のノルムを

$$\|Z\| = \sum_M |Z^M|$$

により定義する．このとき，$\mathbb{R}B_L$ は Banach 代数となる．このノルムを用いて，超空間のノルムを

$$\|(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\Theta})\| := \sum_j \|X^j\| + \sum_k \|\Theta^k\|$$

により定義する． □

【定義 6.9 (超微分)**】** Banach 代数 $\mathbb{C}B_L$ に値を取る超空間 $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ の開集合 U 上の関数 $F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Theta})$ に対して，

$$F(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\Theta}+\boldsymbol{\Psi}) = F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})+\sum_j Y^j \frac{\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})}{\partial X^j}+\sum_k \Psi^k \frac{\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})}{\partial \Theta^k}+\|(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\Psi})\eta(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\Psi})$$

となる U 上の $\mathbb{C}B_L$ 値関数 $\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})/\partial X^j$，$\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})/\partial\Theta^k$ および $(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\Psi}) = (0;0)$ の近傍で定義された関数 $\eta(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\Psi})$ が存在して，

$$\|(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\Psi})\| \to 0 \Rightarrow \quad \|\eta(\boldsymbol{Y};\boldsymbol{\Psi})\| \to 0$$

が成り立つとき，$\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})/\partial X^j$，$\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})/\partial\Theta^k$ を $F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ の超偏微係数という．ただし，$\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})/\partial\Theta^k$ はこの定義では一意的に定まらず，$\mathscr{E}_{1,\cdots,L}$ に比例する項を加える自由度の除いて決まる． □

【定理 6.10 (C^∞ 関数)**】** 超空間 $\mathbb{C}B_L^{m,n}$ の開集合 U 上の $\mathbb{C}B_L$ 値関数 $F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ が，超微分の意味で C^∞ とする．

i) Θ^k の積を一般に Θ^Λ と表すと，

$$F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}) = \sum_\Lambda F^\Lambda(\boldsymbol{X})\Theta^\Lambda$$

となる．すなわち，F は Θ^k の多項式となる．さらに，$\boldsymbol{X}$ の c 数成分 ($\mathscr{E}_\emptyset = 1$ の係数）を $\boldsymbol{X}_0$ として

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{X}_0) = F(\boldsymbol{X}_0\mathscr{E}_\emptyset)$$

とおくと，

$$F(\boldsymbol{X}) = \mathscr{F}(\boldsymbol{X}) \equiv \sum_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{j}^{-1})D^{\mathtt{j}}\mathscr{F}(\boldsymbol{X}_0)(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\mathscr{E}_\emptyset)^{\mathtt{j}}.$$

□

【定義 6.11 (超微分可能関数)**】** $U \subset \mathbb{R}B_L^{m,n}$ 上の $C^\infty\mathbb{C}B_L$ 値関数を $F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ とする．$L \geq 2n$ として，$L' = [(L+1)/2]$ とおく．このとき，

$$F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}) = \sum_\Lambda \mathscr{F}^\Lambda(\boldsymbol{X})\Theta^\Lambda$$

において，$\mathscr{F}^\lambda(\boldsymbol{X}_\emptyset)$ の値が常に $\mathbb{C}B_{L'}(\subset \mathbb{C}B_L)$ に含まれるとき，F を U 上の超微分可能関数という． □

【定理 6.12】 $F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ を $U\subset\mathbb{C}B_L^{m,n}$ 上の超微分可能関数とする．このとき，その奇変数 Θ^k に関する偏微分を

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})}{\partial\Theta^k}=\sum_{\Lambda}(-1)^{\deg\mathscr{F}^\Lambda}\mathscr{F}^\Lambda(\boldsymbol{X})\Theta^{\Lambda/k}$$

と定義し，上記の一般的定義における $\mathscr{E}_{1,\cdots,L}$ に比例する不定性を取り除く．ただし，k が Λ に含まれる場合は，その位置を $p(k)$ として

$$\Theta^{\Lambda/k}:=\begin{cases}(-1)^{p(k)-1}\Theta^{\Lambda-\{k\}} & k\in\Lambda,\\ 0 & k\notin\Lambda.\end{cases}$$

このとき，次が成り立つ．

i) 超偏微分は線形作用素である．

ii) 超偏微分について一般化されたLeibnitzの公式が成り立つ．ただし，$F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ が同次元のとき，
$$\frac{\partial FG}{\partial\Theta^k}=\frac{\partial F}{\partial\Theta^k}G+(-1)^{\deg F}F\frac{\partial G}{\partial\Theta^k}.$$

iii) $\partial/\partial X^j$ と $\partial/\partial X^{j'}$ および $\partial/\partial\Theta^k$ は可換，$\partial/\partial\Theta^k$ と $\partial/\partial\Theta^{k'}$ は反可換.

□

【定義 6.13 (超解析関数)**】** $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ の開集合 U 上の $\mathbb{C}B_L$ に値を取る超微分可能関数 $F(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ は，その $\mathbb{C}B_L$ の基底 $\mathscr{E}_M$ に関する成分 $F^M(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ がすべて X_μ^j の解析関数のとき，超解析的という． □

6.3 Lie 超代数

【定義 6.14 (Lie 超代数)**】** $\mathbb{Z}_2$ 次数付き線形空間 $\mathscr{L}_s = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$ に次の性質をもつ積 $[a,b]$ が定義されているとき，$\mathscr{L}_s$ を Lie 超代数という：

i) a,b がそれぞれ同次元のとき，

$$\deg([a,b]) = \deg a + \deg b.$$

ii) $a,b,c \in \mathscr{L}_s$，$\alpha,\beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ のとき，

$$[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a,c] + \beta[b,c].$$

iii) a,b が同次元のとき，

$$[b,a] = -(-1)^{\deg a \deg b}[a,b].$$

iv) a,b,c が同次元のとき

$$[a,[b,c]](-1)^{\deg a \deg c} + [b,[c,a]](-1)^{\deg b \deg a} + [c,[a,b]](-1)^{\deg c \deg b} = 0.$$

□

【例 6.15 (行列の Lie 超代数)**】** 行列の超代数 $M(p|q,\mathbb{F})(\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C})$ において

$$[M,N] := MN - (-1)^{\deg M \deg N} NM$$

とおくと，この超交換子に対して $M(p|q,\mathbb{F})$ は Lie 超代数となる．

さらに，

$$\mathfrak{sl}(p|q;\mathbb{F}) := \{M \in M(p|q,\mathbb{F}) \mid \mathrm{str} M = 0\}$$

は，$M(p|q;\mathbb{F})$ の部分 Lie 超代数となる．また，

$$K := \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & J_q \end{pmatrix}; \quad J_q := \begin{pmatrix} 0 & 1_{q/2} \\ -1_{q/2} & 0 \end{pmatrix}$$

で定義される $K \in M(p|q;\mathbb{F})$ を用いて，

$$\mathrm{osp}(p|q;\mathbb{F}) := \left\{M \in M(p|q,\mathbb{F}) \,\middle|\, {}^{\mathrm{st}}MK + (-1)^{\deg M} KM = 0\right\}$$

とおくと，次数ゼロの部分が

$$\mathscr{L}_0 = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q/2,\mathbb{F})$$

となる直交シンプレクティック Lie 超代数が得られる． □

【定義 6.16 (Lie 超代数の次数付き表現)**】** Lie 超代数 $\mathscr{L}_s$ から，行列の作る Lie 超代数 $M(p|q,\mathbb{F})$ への Lie 超代数としての準同型 Γ を，$\mathscr{L}_s$ の次数付き表現という． □

6.4　単純複素 Lie 超代数

【定義 6.17 (**古典 Lie 超代数と Cartan 型 Lie 超代数**)**】**　Lie 超代数 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1$ において，代数演算により誘導される表現 $\mathscr{L}_0 \rhd \mathscr{L}_1$ が完全可約のとき，$\mathscr{L}$ は**古典 Lie 超代数** (classical Lie superalgebra)，完全可約でないとき **Cartan 型 Lie 超代数** (Cartan type Lie superalgebra) という．□

【定義 6.18 (簡約可能な Lie 代数)**】**　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，半単純 Lie 代数と中心の直和となるとき**簡約可能**という．□

【命題 6.19】　Lie 超代数が古典的であることと，Lie 代数 $\mathscr{L}_0$ が簡約可能であることは同等である．□

【定理 6.20 (古典複素 Lie 超代数の分類定理)**】**　単純複素 Lie 超代数は次のように分類される：

(1) 基本 (basic) 古典単純複素 Lie 超代数

(a) Killing 形式が非退化となるもの．

(i) 単純複素 Lie 代数

(ii) 次の６つの系列：

$$
\begin{aligned}
&A(m|n)=\mathrm{sl}(m+1|n+1;\mathbb{C}),\ m>n=0,1,2,\cdots,\\
&B(m|n)=\mathrm{osp}(2m+1|2n;\mathbb{C}),\ m=0,1,\cdots,\ n=1,2,\cdots,\\
&C(n)=\mathrm{osp}(2|2n-2;\mathbb{C}),\ n=2,3,\cdots,\\
&D(m|n)=\mathrm{osp}(2m|2n;\mathbb{C}),\ m=2,3,\cdots,\ n=1,2,\cdots,\ m\neq n+1,\\
&F(4),\\
&G(3).
\end{aligned}
$$

(b) Killing 形式が恒等的にゼロとなるもの．

$$
\begin{aligned}
&A(n|n)=\mathrm{sl}(n+1|n+1;\mathbb{C}),\ n=1,2,\cdots,\\
&D(n+1|n)=\mathrm{osp}(2n+2|2n;\mathbb{C}),\ n=1,2,\cdots,\\
&D(2|1;\alpha),\ \alpha\in\mathbb{C}-\{0,-1,\infty\}.
\end{aligned}
$$

(2) 特異 (strange) 古典単純複素 Lie 超代数

$$P(n),\ n = 2, 3, \cdots ,$$
$$Q(n),\ n = 2, 3, \cdots$$

[Cornwell JF 1989[Cor89]; Kac VG 1977[Kac77]] □

【定理 6.21 (Cartan 型 Lie 超代数の分類定理)】 Cartan 型 Lie 超代数は次の４つの離散系列で尽くされる：

1) $W(n)$ $(n = 3, 4, \cdots)$

2) $S(n)$ $(n = 3, 4, \cdots)$

3) $\tilde{S}(n)$ $(n = 4, 5, \cdots ,)$

4) $H(n)$ $(n = 4, 5, \cdots ,)$

[Cornwell JF 1989[Cor89]; Kac VG 1977[Kac77]] □

6.4.1 古典 Lie 超代数

$\mathrm{gl}(m|N)$: $Q \in \mathrm{M}(m+N)$ を $A \in \mathrm{M}(m), B \in \mathrm{M}(m,N), C \in \mathrm{M}(N,m), D \in \mathrm{M}(N)$ を用いて

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

と表し，

$$\mathscr{L} = \mathrm{M}(m+N), \tag{6.2a}$$
$$\mathscr{L}_0 = \{Q \in \mathscr{L} \mid\ B = C = 0\}, \tag{6.2b}$$
$$\mathscr{L}_1 = \{Q \in \mathscr{L} \mid\ A = D = 0\} \tag{6.2c}$$

とおく．このとき，$[*,*]_\pm$ を

$$[Q_1, Q_2]_\pm = [Q_1, Q_2] \quad \text{for } Q_1, Q_2 \in \mathscr{L}_0, \tag{6.3a}$$
$$[Q_1, Q_2]_\pm = [Q_1, Q_2] \quad \text{for } Q_1 \in \mathscr{L}_0, Q_2 \in \mathscr{L}_1, \tag{6.3b}$$
$$[Q_1, Q_2]_\pm = \{Q_1, Q_2\} \quad \text{for } Q_1, Q_2 \in \mathscr{L}_1 \tag{6.3c}$$

と定義すると，$\{\mathscr{L}, [*,*]_\pm\}$ は超代数 $\mathrm{gl}(m|N)$ となる．以下，$Q \in \mathscr{L}$ を $Q[A, D; B, C]$ と表記する．

osp($N|2p$)： $\Omega_{(2p)}$ を条件

$$\Omega_{(2p)}^2 = -1, \quad {\Omega_{(2p)}}^T = -\Omega_{(2p)} \tag{6.4}$$

を満たす $2p$ 次の正方行列，$G_{(N)}$ を N 次の対称正則行列とする．

osp($N|2p$) を次の条件を満たす gl($N|2p$) の部分代数として定義する：

$$A^T G_{(N)} + G_{(N)} A = 0, \tag{6.5a}$$

$$D^T \Omega_{(2p)} + \Omega_{(2p)} D = 0, \tag{6.5b}$$

$$C = \Omega(2p) B^T G_{(N)} \tag{6.5c}$$

このとき，$[\mathrm{osp}(N|2p)]_0$ の生成する群 G は

$$G = \mathrm{O}(N) \otimes \mathrm{Sp}(p) \tag{6.6}$$

が成り立つ．

特に，

$$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{SO}(5, \mathbb{C}) \tag{6.7}$$

より，osp($N|4$) の適当な実型は $\mathrm{SO}(2,3) \times \mathrm{SO}(N)$ に対応する実超代数，すなわち AdS^4 上の N-拡張超代数となる．また，”宇宙項”ゼロの極限をとると，Minkowski 時空 $E^{3,1}$ 上の N-拡張超代数が得られる．

sl($m|N$)： sl($m|N$) を次の条件を満たす gl($m|N$) の部分代数として定義する：

$$\mathrm{Tr} A = \mathrm{Tr} D. \tag{6.8}$$

このとき，

$$G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{SL}(N, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \tag{6.9}$$

が成り立つ．

さらに，$H_{(m)}$ を符号 $(p,q)(p+q=m)$ の m 次エルミート行列，$H_{(N)}$ を正の N 次エルミート行列として，条件

$$H_{(m)} A H_{(m)}^{-1} = -A^\dagger, \tag{6.10a}$$

$$H_{(N)} D H_{(N)}^{-1} = -D^\dagger, \tag{6.10b}$$

$$H_{(m)} B H_{(N)}^{-1} = -C^\dagger \tag{6.10c}$$

を満たす sl($m|N$) の実部分代数を su($p,q|N$) とおくと，

$$G = \mathrm{SU}(p,q) \otimes \mathrm{SU}(N) \otimes \mathrm{U}(1) \tag{6.11}$$

が成り立つ．

特に，

$$\mathrm{SU}(2,2) \cong \mathrm{SO}(2,4) \tag{6.12}$$

より，$\mathrm{su}(2,2|N)$ は AdS^5 上の拡張超対称代数を与える．

$P(n)$ と $Q(n)$:　$P(n)$ は次の条件を満たす $\mathrm{gl}(n|n)$ の部分代数として定義される：

$$A^T + D = 0, \quad \mathrm{Tr} A = 0, \tag{6.13a}$$

$$B^T = B, \quad C^T = -C. \tag{6.13b}$$

すなわち，

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \tag{6.14a}$$

$$G \triangleright \mathscr{L}_1 : \ (2)_n + [2]_n. \tag{6.14b}$$

また，$Q'(n)$ を次の条件を満たす $\mathrm{sl}(n|n)$ の部分代数として定義する：

$$A = D, \quad B = C, \quad \mathrm{Tr} B = 0. \tag{6.15}$$

ただし，$Q'(n)$ は中心 $\{aI_{2n} |\ a \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$ をもつので，

$$Q(n) = Q'(n)/\mathbb{C} \tag{6.16}$$

により単純な超代数 $Q(n)$ を定義する．このとき，

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \tag{6.17a}$$

$$G \triangleright \mathscr{L}_1 : \text{Adjoint 表現} \tag{6.17b}$$

となる．

$D(2,1,\alpha), G(3), F(4)$:

1. $D(2,1,\alpha)$

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \tag{6.18a}$$

$$G \triangleright \mathscr{L}_1 : (2,2,2). \tag{6.18b}$$

2. $G(3)$

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes G_2, \tag{6.19a}$$

$$G \triangleright \mathscr{L}_1 : (2,7) \tag{6.19b}$$

3. $F(4)$

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathrm{SO}(7,\mathbb{C}), \tag{6.20a}$$

$$G \triangleright \mathscr{L}_1 : (2,8) \tag{6.20b}$$

6.4.2 Cartan 型超代数

$a_i, a_i^\dagger (i = 1, \cdots, n)$ をフェルミ型生成消滅演算子とする：

$$\left\{a_i, a_j^\dagger\right\} = \delta_{ij}, \quad \{a_i, a_j\} = \left\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\right\} = 0.$$

$W(n)(n \geq 3)$**:**

$$W(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_{n-1}, \tag{6.21a}$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \tag{6.21b}$$

$$\mathscr{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \cdots, \quad \mathscr{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \cdots. \tag{6.21c}$$

ここで,

$$\begin{aligned} G_{-1} &= \langle a_i \, (i = 1, \cdots, n) \rangle, & (6.22a)\\ G_0 &= \langle a_i^\dagger a_j \, (i, j = 1, \cdots, n) \rangle, & (6.22b)\\ G_1 &= \langle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k \, (i \neq j, k = 1, \cdots, n) \rangle, & (6.22c)\\ \cdots & \quad \cdots, & \\ G_{n-1} &= \langle a_1^\dagger \cdots a_n^\dagger a_i \, (i = 1, \cdots, n) \rangle. & (6.22d) \end{aligned}$$

$G_0 \cong \mathfrak{gl}(n)$ で $W(n)$ の次元は $n \cdot 2^n$．また，$W(2) = sl(2|1)$.

$S(n)$ $(n \geq 3)$**:**

$$S(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_{n-2}, \tag{6.23a}$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \tag{6.23b}$$

$$\mathscr{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \cdots, \quad \mathscr{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \cdots. \tag{6.23c}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
G_{-1} &= \langle a_i\,(i=1,\cdots,n)\rangle, && (6.24a)\\
G_0 &= \langle a_1^\dagger a_1 - a_j^\dagger a_j\,(j=2,\cdots,n), &&\\
&\quad\ a_i^\dagger a_j\,(i\neq j=1,\cdots,n)\rangle, && (6.24b)\\
G_1 &= \langle a_i^\dagger(a_1^\dagger a_1 - a_j^\dagger a_j)\,(i\neq j=1,\cdots,n), &&\\
&\quad\ a_1^\dagger(a_2^\dagger a_2 - a_j^\dagger a_j)\,(j=3,\cdots,n), &&\\
&\quad\ a_i^\dagger a_j^\dagger a_k\,(i\neq j\neq k=1,\cdots,n)\rangle, && (6.24c)\\
G_2 &= \langle a_i^\dagger a_j^\dagger(a_1^\dagger a_1 - a_k^\dagger a_k)\,(i\neq j\neq k=1,\cdots,n), &&\\
&\quad\ a_k^\dagger a_1^\dagger(a_2^\dagger a_2 - a_j^\dagger a_j)\,(k\neq j=3,\cdots,n), &&\\
&\quad\ a_1^\dagger a_2^\dagger(a_3^\dagger a_3 - a_j^\dagger a_j)\,(j=4,\cdots,n), &&\\
&\quad\ a_i^\dagger a_j^\dagger a_k^\dagger a_l\,(i\neq j\neq k\neq l=1,\cdots,n)\rangle, && (6.24d)\\
\cdots &\quad \cdots
\end{aligned}
$$

$G_0 \cong \mathfrak{sl}(n)$ で $\dim(S(n)) = (n-1)2^n + 1$.

$\tilde{S}(n)$ ($n\geq 4$):　$S(n)$ において，G_{-1} を次の集合で置き換えたのも：

$$G_{-1} = \langle (1 + a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_n^\dagger) a_i\,(i=1,\cdots,n)\rangle. \tag{6.25}$$

$H(n)$ ($n\geq 4$):

$$H(n) = G_{-1}\oplus G_0\oplus G_1\oplus\cdots\oplus G_{n-3}, \tag{6.26a}$$

$$[G_i, G_j]\subset G_{i+j}, \tag{6.26b}$$

$$\mathscr{L}_0 = G_0\oplus G_2\oplus\cdots,\quad \mathscr{L}_1 = G_{-1}\oplus G_1\oplus\cdots. \tag{6.26c}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
G_{-1} &= \langle a_i\,(i=1,\cdots,n)\rangle, && (6.27a)\\
G_0 &= \langle a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i\,(i,j=1,\cdots,n)\rangle, && (6.27b)\\
G_1 &= \langle a_{[i}^\dagger a_j^\dagger a_{k]}\,(i,j,k=1,\cdots,n)\rangle, && (6.27c)\\
\cdots &
\end{aligned}
$$

$G_0 \cong \mathfrak{so}(n)$ で $\dim(H(n)) = 2^n - 2$.

6.5 単純実 Lie 超代数

6.5.1 分類

Ref: Parker M: JMP21, 689(1980)

【定理 6.22 (実古典単純 Lie 超代数と複素古典単純 Lie 超代数の関係)】 実古典単純 Lie 超代数 $\mathscr{L}$ の複素化 $\mathscr{L}\otimes\mathbb{C}$ は，複素古典単純 Lie 超代数 $\mathscr{L}'$ と同型であるか，またはそらの 2 個の直和である．後者の場合，対応する複素古典単純 Lie 超代数は実 Lie 超代数として単純である．また，この対応において，$\mathscr{L}$ を複素 Lie 超代数 $\mathscr{L}'$ の実型という．[Parker M 1980[Par80]] □

【定理 6.23 (実古典単純 Lie 超代数の分類)】 古典複素単純 Lie 超代数 $\mathscr{L}$ の実型は，複素 Lie 代数 $\mathscr{L}_0$ の実型により同型を除いて一意的に定まり，次のいずれかで与えられる：

1. $A(m|n)$ $(m>n\geq 0)$ の実型

$$\begin{aligned}
\mathrm{sl}(m+1|n+1;\mathbb{R}) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{sl}(m+1,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R},\\
\mathrm{sl}\left(\tfrac{m+1}{2}|\tfrac{n+1}{2};\mathbb{H}\right) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{su}^*(m+1)\oplus\mathfrak{su}^*(n+1)\oplus\mathbb{R},\ m,n:\text{奇数},\\
\mathrm{su}(m+1-p,p|n+1-q,q) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{su}(m+1-p,p)\oplus\mathfrak{su}(n+1-q,q)\oplus i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

2. $A(n|n)$ $(n\geq 1)$ の実型

$$\begin{aligned}
\mathrm{sl}(n+1|n+1;\mathbb{R}) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}),\\
\mathrm{sl}\left(\tfrac{n+1}{2}|\tfrac{n+1}{2};\mathbb{H}\right) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{su}^*(n+1)\oplus\mathfrak{su}^*(n+1),\ n:\text{奇数},\\
\mathrm{su}(n+1-p,p|n+1-p,p) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{su}(n+1-p,p)\oplus\mathfrak{su}(n+1-p,p),\\
H(4;n;\mathbb{R}) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

3. $B(m|n)$ $(m\geq 0, n\geq 1)$ の実型

$$\mathrm{osp}(2m+1-p,p|2n;\mathbb{R}) : \mathscr{L}_0=\mathfrak{so}(2m+1-p,p)\oplus\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}).$$

4. $C(n)$ $(n\geq 2)$ の実型

$$\begin{aligned}
\mathrm{osp}(2|2n-2;\mathbb{R}) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{so}(2)\oplus\mathfrak{sp}(n-1;\mathbb{R}),\\
\mathrm{osp}(1|n-1-p,p;\mathbb{H}) &: \mathscr{L}_0=\mathfrak{so}^*(2)\oplus\mathfrak{sp}(n-1-p,p).
\end{aligned}$$

5. $D(m|n)$ $(m \geq 2, n \geq 1)$ の実型

$$\begin{aligned} \mathrm{osp}(2m-p,p|2n;\mathbb{R}) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{so}(2m-p,p) \oplus \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}), \\ \mathrm{osp}(m|n-p,p;\mathbb{H}) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{so}^*(2m) \oplus \mathfrak{sp}(n-p,p). \end{aligned}$$

6. $P(n)$ $(n \geq 2)$ の実型

$$\begin{aligned} P_I(n) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{su}(n+1), \quad n : \mathrm{odd}, \\ P_{II}(n) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

7. $Q(n)$ $(n \geq 2)$ の実型

$$\begin{aligned} Q_I(n) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{su}(p, n+1-p), \\ Q_{II}(n) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{su}^*(n+1), \quad n : \mathrm{odd}, \\ Q_{III}(n) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

8. $D(2|1;\alpha)$ の実型

$$\begin{aligned} D_I(2|1;\alpha) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R});\ \alpha : \mathrm{real}, \\ D_{II}(2|1;\alpha) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R});\ \alpha : \mathrm{real}, \\ D_{III}(2|1;\alpha) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R});\ \alpha + \bar{\alpha} = -1. \end{aligned}$$

9. $G(3)$ の実型

$$\begin{aligned} G_I(3) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_{2,0}, \\ G_{II}(3) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_{2,2}. \end{aligned}$$

ここで，$\mathfrak{g}_{2,0}$ は G_2 の Lie 代数のコンパクト実型 $(= \mathrm{Aut}\mathfrak{C})$，$\mathfrak{g}_{2,2}$ は非コンパクト実型.

10. $F(4)$ の実型

$$\begin{aligned} F_I(4) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(7), \\ F_{II}(4) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(3,4), \\ F_{III}(4) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(2,5), \\ F_{IV}(4) &: \mathscr{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(1,6). \end{aligned}$$

[Parker M 1980[Par80]] ―――――――― □

6.5.2 単純超対称代数

【定理 6.24 (単純超対称代数の分類)】 古典単純実 Lie 超代数 $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$ で．$\mathscr{L}_0$ が時空対称性を表す Lie 代数 $\mathfrak{so}(D,1), \mathfrak{so}(D-1,2), \mathfrak{so}(D,2)$ を直和因子として含むものは次のものに限られる：

D	$\mathscr{L}$	$\mathscr{L}_0$	$\mathscr{L}_1$	複素型
2	$\mathfrak{su}(1,1\|p,N-p)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{u}(p,N-p);\ N\neq 2$	$(2,N)+(2,\bar{N})$	$A(1\|N-1)$
	$\mathfrak{sl}(2\|N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{sl}(N,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R};\ N\neq 2$	$(2,N)+(2,N)$	
	$\mathfrak{su}(1,1\|2)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(2,2)+(2,2)$	$A(1\|1)$
	$\mathfrak{su}(1,1\|1,1)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{su}(1,1)$	$(2,2)+(2,2)$	
	$\mathfrak{sl}(2\|2;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$(2,2)+(2,2)$	
	$\mathrm{osp}(p,N-p\|2;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{so}(p,N-p)$	$(2,N)$	$B/D([N/2]\|1)$
	$\mathrm{osp}(2,1\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{sp}(N;\mathbb{R})$	$(3,2N)$	$B(1\|N)$
	$\mathrm{osp}(2\|p,N-p;\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{sp}(p,N-p)$	$(2,2,2N)$	$D(2\|N)$
	$D_I(2\|1;\alpha)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$		$D(2\|1;\alpha)$
	$D_{II}(2\|1;\alpha)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{so}(4)$	$(2,4)$	
	$D_{III}(2\|1;\alpha)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$		
	$G_I(3)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{g}_{2,0}$	$(2,7)$	$G(3)$
	$G_{II}(3)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{g}_{2,2}$		
	$F_I(4)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{so}(7)$	$(2,8)$	$F(4)$
	$F_{II}(4)$	$\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathfrak{so}(3,4)$		
3	$H(4;1;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3,1)$	$(2,1)+(1,2)$	$A(1\|1)$
	$\mathrm{osp}(3,1\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3,1)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$D(2\|N)$
	$\mathrm{osp}(3\|p,N-p;\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(3,1)\oplus\mathfrak{sp}(p,N-p)$		$D(3\|N)$
	$D_{III}(2\|1;\alpha)$	$\mathfrak{so}(3,1)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$\alpha+\bar{\alpha}=-1$	$D(2\|1;\alpha)$
	$\mathrm{osp}(2,2\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2,2)\oplus\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$		$D(2\|N)$
4	$\mathrm{osp}(4,1\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(4,1)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$B(2\|N)$
	$\mathrm{osp}(1\|1,1;\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(4,1)\oplus\mathfrak{so}(1,1)$	$4+\bar{4}$	$C(3)$
	$\mathrm{osp}(N\|1,1;\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(4,1)\oplus\mathfrak{so}^*(2N);N\geq 2$		$D(N\|2)$
	$\mathrm{osp}(p,N-p\|4;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3,2)\oplus\mathfrak{so}(p,N-p);\ N\geq 1$	$(4,N)$	$B/D([N/2]\|2)$
	$\mathrm{osp}(3,2\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3,2)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$B(2\|N)$
	$\mathrm{osp}(2\|4;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3,2)\oplus\mathfrak{so}(2)$		$C(5)$

D	$\mathscr{L}$	$\mathscr{L}_0$	$\mathscr{L}_1$	複素型
5	$\mathfrak{sl}(2\|N;\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(5,1)\oplus\mathfrak{su}^*(2N)\oplus\mathfrak{u}(1)$	$N\neq 2$	$A(3\|2N-1)$
	$\mathfrak{sl}(2\|2;\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(5,1)\oplus\mathfrak{so}(5,1)$		$A(3\|3)$
	$\mathrm{osp}(5,1\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(5,1)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$D(3\|N)$
	$Q_{II}(3)$	$\mathfrak{so}(5,1)$	15_{adj}	$Q(3)$
	$\mathfrak{su}(2,2\|p,N-p)$	$\mathfrak{so}(4,2)\oplus\mathfrak{u}(p,N-p);N\neq 4$	$(4,N)+(\bar{4},\bar{N})$	$A(3\|N-1)$
	$\mathfrak{su}(2,2\|p,4-p)$	$\mathfrak{so}(4,2)\oplus\mathfrak{su}(p,4-p)$	$(4,4)+(\bar{4},\bar{4})$	$A(3\|3)$
	$\mathfrak{sp}(4,2\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(4,2)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$D(3,N)$
	$Q_I(3)$	$\mathfrak{so}(4,2)$	15_{ad}	$Q(3)$
6	$\mathrm{osp}(6,1\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(6,1)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$B(3\|N)$
	$F_{IV}(4)$	$\mathfrak{so}(6,1)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(8,2)$	$F(4)$
	$\mathrm{osp}(5,2\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(5,2)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$B(3\|N)$
	$F_{III}(4)$	$\mathfrak{so}(5,2)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$(8,2)$	$F(4)$
7	$\mathrm{osp}(7,1\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(7,1)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		$D(4\|N)$
	$\mathrm{osp}(4\|p,N-p;\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(6,2)\oplus\mathfrak{sp}(p,N-p)$	$(8,2N)$	$D(4\|N)$
	$\mathrm{osp}(6,2\|2N;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(6,2)\oplus\mathfrak{sp}(N,\mathbb{R})$		
$2m$	$\mathrm{osp}(2m,1\|2n;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m,1)\oplus\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$		$B(m\|n)$
	$\mathrm{osp}(2m-1,2\|2n;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m-1,2)\oplus\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$		$B(m\|n)$
$2m-1$	$\mathrm{osp}(2m-1,1\|2n;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m-1,1)\oplus\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$		$D(m\|n)$
	$\mathrm{osp}(2m-2,2\|2n;\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m-2,2)\oplus\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$		$D(m\|n)$

□

6.6　Lie 超群

【定義 6.25 (線形超群)**】**　$(p|q)\times(p|q)$ 型偶超行列の集合 $\mathscr{G}_s$ が次の条件を満たすとき，次元 (m,n) の線形超群という：

i) $\mathscr{G}_s$ は Lie 群である．

ii) $\mathscr{G}_s$ の単位元の近傍の局所座標系 (V,ϕ) として

$$\phi : V \to U \subset \mathbb{R}B_L^{m,n}$$

がとれ，ϕ^{-1} の各成分は U 上の超解析関数である．

□

【例 6.26 $(U(p|q), SU(p|q))$**】**

$$U(p|q) := \left\{ G \in M_0(p|q;\mathbb{C}B_L) \,\middle|\, G^{\ddagger}G = 1 \right\},$$
$$SU(p|q) := \{ G \in U(p|q) \mid \mathrm{sdet}G = 1 \}.$$

□

【定理 6.27 (Lie 代数と超生成元)**】**　$\mathscr{G}_s$ を次元 (m,n) の超群とし，その単位元の近傍での超空間座標表示を $G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ とする．

i) $\mathscr{G}_s$ は $(m+n)2^{L-1}$ 次元の Lie 群であり，その線形 Lie 代数 $\mathscr{L}(\mathscr{G}_s)$ の基底は

$$M_j^I = \frac{\partial G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}}{\partial X_I^j}\Big|_{(\mathrm{x}\ ;\boldsymbol{\Theta})=\mathbf{0}},\quad N_k^J = \frac{\partial G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}}{\partial \Theta_J^k}\Big|_{(\mathrm{x}\ ;\boldsymbol{\Theta})=\mathbf{0}}$$

で与えられる．ここで，I, J はそれぞれ $\{1,\cdots,L\}$ の偶数個，奇数個の部分集合である．

ii) $G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta})$ の超偏微係数を

$$M_j = \frac{\partial G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}}{\partial X^j}\Big|_{(\mathrm{x}\ ;\boldsymbol{\Theta})=\mathbf{0}},\quad N_k = \frac{\partial G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}}{\partial \Theta^k}\Big|_{(\mathrm{x}\ ;\boldsymbol{\Theta})=\mathbf{0}}$$

とおくと，

$$M_j^I = \mathscr{E}_I M_j,\quad N_k^J = \mathscr{E}_J N_k$$

が成り立ち，$\mathscr{L}(\mathscr{G}_s)$ の元は一般に $(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}) \in \mathbb{R}B_L^{m,n}$ をパラメーターとして

$$M = \sum_j X^j M_j + \sum_k \Theta^k N_k$$

と表される．$M_j, N_k \in M(p|q;\mathbb{C}B_L^{m,n})$ は $\mathscr{L}(\mathscr{G}_s)$ の超生成元と呼ばれる．

iii) 単位元の近傍では

$$G(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\Theta}) = \exp \boldsymbol{M}$$

が成り立つ．

$\square$

【定理 6.28 (Lie 超代数との関係)**】** $\mathscr{L}_s = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1$ を $\dim \mathscr{L}_0 = m, \dim \mathscr{L}_1 = n$ となる実 Lie 超代数，$\Gamma : \mathscr{L}_s \to M(p|q;\mathbb{C})$ をその忠実な次数付き表現とする．このとき，次が成り立つ．

i) $a_1, \cdots, a_m$ を $\mathscr{L}_0$ の基底，$b_1, \cdots, b_n$ を $\mathscr{L}_1$ の基底として，

$$M_j^I = \mathscr{E}_I \Gamma(a_j), \quad N_k^J = \mathscr{E}_J \Gamma(b_k)$$

により $M(p|q;\mathbb{C}B_L)$ の元を定義すると，これらの線形包は $(m+n)2^{L-1}$ 次元実 Lie 代数 $\mathscr{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ をなす．

ii) Lie 代数 $\mathscr{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ に対応する線形 Lie 群は次元 (m, n) の線形 Lie 超群となる．

iii) $0 \leq N \leq L$ となる任意の整数 N に対して，M_j^I, N_k^J のうち $|I|, |J| \geq N$ となるもので張られる $\mathscr{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ の部分空間はそのイデアルとなる．$N \geq 1$ ならこれは固有イデアルとなり，さらに，$N > L/2$ ならば可換イデアルとなる．特に，$\mathscr{L}_s(\mathbb{C}B_L)$ は半単純 Lie 代数とならない．

iv) i),ii) で定義される Lie 超代数の集合から線形 Lie 超群の集合への写像は全射でない．

$\square$

参考文献

[BR86] Barut, A. and Raczka, R.: *Theory of Group Representations and Applications*, World Scientific, Singapore (1986).

[Cor89] Cornwell, J.: Elsevier (1989).

[Kac77] Kac, V.: Lie superalgebras, *Adv. Math.* **26**, 8–96 (1977).

[LM89] Lawson,, Jr., H. and Michelsohn, M.-L.: *Spin Geometry*, Princeton Univ. Press (1989).

[Par80] Parker, M.: Classification of real simple Lie superalgebra of classical type, *J. Math. Phys.* **21**, 689–97 (1980).

[横田 71] 横田一郎：裳華房 (1971).

[松島 65] 松島与三：多様体入門, 裳華房 (1965).

[辰馬 94] 辰馬伸彦：位相群の双対定理, 紀伊国屋書店 (1994).

[竹内 83] 竹内外史：Lie 代数と素粒子論, 裳華房 (1983).