解析学

LastUpdate: 2008.9.19

目 次

1 関数解析 **2**
1.1 測度論 2
1.1.1 基本定義 2
1.1.2 Borel 測度 4
1.1.3 測度の拡張定理 5
1.2 積分論 6
1.3 位相線形空間 7
1.4 Banach 空間 9
1.4.1 閉作用素 9
1.5 Hilbert 空間 9
1.5.1 スペクトル 9
1.5.2 対称作用素 10
1.5.2.1 半有界作用素 10
1.5.2.2 von Neumann の公式 11
1.5.2.3 スペクトル 12
1.6 作用素環 13
1.6.1 Banach 環 13
1.6.1.1 Banach 環 13
1.6.1.2 Banach*環 14
1.6.1.3 C* 環 14

1 関数解析

[LastUpdate: 2008.9.19]

1.1 測度論

概念構成：集合 $X \Rightarrow$ 可測部分集合族 $\mathfrak{F} \Rightarrow$ 測度 $\mu \Rightarrow$ 積分

1.1.1 基本定義

【定義 1.1 (集合の加法族)**】** 空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{F}$ が，有限個の集合の和，および 2 つの集合の差をとる演算について閉じているとき，有限加法族という．さらに，$\mathfrak{F}$ が可算個の集合の和について閉じているとき，可算加法族または σ 加法族という． $\square$

【定義 1.2 (可測空間)**】** 空間 X とその σ 加法族 $\mathfrak{F}$ の組 $(X, \mathfrak{F})$ を，可測空間 (measurable space) という．また，X の与えられた部分集合の族 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}$ を含む最小の σ 加法族 $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{A}$ から生成される σ 加法族という． $\square$

【定義 1.3 (可測集合と可測関数)**】** 可測空間 $(X, \mathfrak{F})$ に対して，$\mathfrak{F}$ に属する部分集合は $\mathfrak{F}$ 可測集合とよばれる．また，X 上の $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ に値を取る関数 f は，任意の $a > 0$ に対して $E(f, a) := \{x \in X \mid f(x) \geq a\}$ が MFF 可測であるとき，$\mathfrak{F}$ 可測という．さらに，2 つの非負 $\mathfrak{F}$ 可測関数の差で表される実関数，およびそれらの複素線形結合で表される複素関数も $\mathfrak{F}$ 可測と呼ぶ． $\square$

【定義 1.4 (測度と測度空間)**】** 可測空間 $(X, \mathfrak{F})$ に対して，$\mathfrak{F}$ 上の非負関数 $\mu; 0 \leq \mu(F) \leq +\infty$ が，互いに交わらない有限個の $\mathfrak{F}$ 可測集合 $F_1, \cdots, F_n$ に対して常に $\mu(F_1 \cup \cdots \cup F_n) = \mu(F_1) + \cdots \mu(F_n)$ となるとき，有限加法的測度という．さらに，任意の互いに交わらない可算個の可測集合 $F_j \in \mathfrak{F}$ に対して $\mu(\cup_j F_j) = \sum_j \mu(F_j)$ が成り立つとき，mu は可算加法的ないし σ 加法的測度という．

可測空間とその上の σ 加法的測度の組 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間 (measure space) という． $\square$

【定義 1.5 (σ 有限)**】**　測度空間 $(X,,\mathfrak{F},\mu)$ において，$\mu(F) < +\infty$ となる可測集合 F は μ 有限であるという．全空間 X が $\mathfrak{F}$ 可測で μ 有限のとき，μ を有限測度という．さらに，μ 有限な集合の可算和として表される可測集合は σ 有限集合といい，任意の可測集合が σ 有限のとき，測度空間 $(X,\mathfrak{F},\mu)$ は σ 有限であるという．とくに，全空間 X が σ 有限であるとき，全 σ 有限という．□

【定義 1.6 (局所化可能測度空間)**】**　測度空間 $(X,\mathfrak{F},\mu)$ に対して，X の互いに交わらない部分集合 N および μ 有限可測集合族 $X_\alpha(\alpha \in A)$ による分割

$$X = N + \sum_\alpha X_\alpha$$

が存在して，任意の可測集合 $F \in \mathfrak{F}$ に対して

$$\mu(F) = \sum_\alpha (F \cap X_\alpha)$$

が成り立つとき，$(X,\mathfrak{F},\mu)$ は局所化可能であるといい，上記の X の分割を有限域分割とよぶ．□

【定義 1.7 (準有界測度)**】**　有限加法的測度空間 $(X,\mathfrak{K},v)$ において，$X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ $(X_n \in \mathfrak{K})$ で $v(X_n) < +\infty$ となる部分集合の族 $\{X_n\}$ が存在するとき，測度空間は準有界であるという．準有界ならば局所化可能である．□

【定義 1.8 (完備測度空間)**】**　σ 加法的測度空間 $(X,\mathfrak{F},m)$ は，

$$E \subset F, F \in \mathfrak{F}, m(F) = 0 \Rightarrow \quad E \in \mathfrak{F}$$

が成り立つとき，完備であるという．さらに，完備でない測度空間 $(X,\mathfrak{F},m)$ において，任意の $E^* \in \mathfrak{F}^*$ に対して

$$E_1 \subset E^* \subset E_2, \quad m^*(E_2 - E_1) = 0$$

となる $E_1, E_2 \in \mathfrak{F}$ が常に存在するような完備測度空間 $(X,\mathfrak{F}^*,m^*)$ が一意的に存在する．これを $(X,\mathfrak{F},m)$ の完備化という．□

1.1.2 Borel 測度

【定義 1.9 (Borel 測度)**】** 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ の閉包コンパクトな開集合族から生成される σ 加法族 $\mathfrak{B}$ を Borel 集合族，その元を Borel 集合，$\mathfrak{B}$ 上の測度 μ でコンパクト集合が常に μ 有限となるものを Borel 測度という．

さらに，Borel 測度 μ と任意の $\mathfrak{B}$ 可測集合 F に対して

$$\sup\{\mu(C) \mid C \subseteq F, C : \text{コンパクト}\} = \inf\{\mu(U) \mid F \subseteq U, U : \text{可測開集合}\}$$

が成り立つとき，μ は正則であるという． $\square$

【定義 1.10 (Baire 測度)**】** 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において，すべての連続関数が可測となる最小の σ 加法族を *Baire* 集合族，その元を Biare 集合とよぶ．また，Baire 集合族上の測度 μ で，コンパクト集合がすべて μ 有限となるものを Baire 測度とよぶ． $\square$

【定義 1.11 (Radon 測度)**】** 局所コンパクト空間 X において，台がコンパクトとなる非負値連続関数の全体を $C_c^+(X)$ とおく．$C_c^+(X)$ 上の非負値関数 I で

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g) \quad (0 \leq \forall a, b < +\infty, \forall f, g \in C_c^+(X))$$

が成り立つものを *Radon* 測度という． $\square$

【定理 1.12 (F.Riesz の定理)**】** X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．このとき，X 上の Radon 測度 I と Baire 測度 ν は，

$$I(f) = \int_X f(x) d\nu(x)$$

により一対一に対応する．さらに，任意の Baire 測度は，一意的な正則 Borel 測度への拡張を持つ． $\square$

【定理 1.13 (局所化可能定理)**】** 局所コンパクト Hausdorff 空間上のすべての正則 Borel 測度に対して，測度に依存しない共通の有限域分割が存在する． $\square$

1.1.3 測度の拡張定理

【定義 1.14 (Caratheodory の外測度)**】** 集合 X において，すべての部分集合 $A \in 2^X$ に対して $0 \le m^*(A) \le +\infty$ が対応していて，

i) $m^*(\emptyset) = 0$,

ii) $A \subset B$ ならば $m^*(A) \le m^*(B)$,

iii) $m^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$

が成り立つとき，m^* を Caratheodory の外測度という．さらに，ある $E \in 2^X$ が，任意の $A \in 2^X$ に対して

$$m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

を満たすとき，m^* 可測という．すべての m^* 可測な部分集合の族を $\mathfrak{F}^*$ とすると，$\mathfrak{F}^*$ は σ 加法族となり，m^* はその上の完備な σ 加法的測度となる． □

【定理 1.15 (拡張定理)**】** $(X, \mathfrak{K}, v)$ を準有界有限加法的測度空間とする．このとき，

i) $(X, \mathfrak{K}, v)$ が σ 加法的測度空間 $(X, B(\mathfrak{K}), m)$ に拡張可能であるための必要十分条件は，$A, A_n \in \mathfrak{K}$, $A = \cup_n A_n$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ に対して，$v(A) = \sum_n v(A_n)$ が成り立つことである．この拡張は一意的である．

ii) 任意の $E \in 2^X$ に対して

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) \;\middle|\; E \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{K} \right\}$$

とおくと，m^* は Caratheodory の外測度となり，i) の拡張に対して，$m(E) = m^*(E)(E \in B(\mathfrak{K})$ となる．さらに，m^* から決まる完備測度空間 $(X, \mathfrak{F}^*, m^*)$ は $(X, B(\mathfrak{K}), m)$ の完備化となる．

□

1.2　積分論

【定義 1.16 (積分)**】**　測度空間 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ において，X 上の非負値関数 f に対して

$$\mu(f) \equiv \int_X f(x)d\mu(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_j \mu(E(f, j/n))$$

を，μ による f の積分をいう．特に，$\mu(f) < +\infty$ のとき，f は μ 可積分であるという．さらに，X 上の複素可測関数 g が μ 可積分非負値関数の複素線形結合 $g = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ で書かれるとき，g を μ 可積分といい，その積分を

$$\mu(g) := \mu(f_1) - \mu(f_2) + i\mu(f_3) - i\mu(f_4)$$

で定義する．□

【定理 1.17 (H.Lebesgue の定理)**】**　非負値可測関数列 f_j に対して，$0 \leq f_j(x) \leq f(x)$(a.e.$x \in X$) となる可積分関数 $f \in Ł^1(X, \mu)$ が存在するとき，

$$\int (\liminf f_j(x))d\mu(x) \leq \liminf \int f_j(x)d\mu(x) \leq \limsup \int f_j(x)d\mu(x) \leq \int (\limsup f_j(x))d\mu(x).$$

□

【定理 1.18 (P.Fatou の定理)**】**　関数の単調列 $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ に対して，

$$\lim \int f_j(x)d\mu(x) = \int (\lim f_j(x))d\mu(x).$$

□

【定義 1.19 (絶対連続)**】**　可測空間 $(X, \mathfrak{F})$ 上の 2 つの測度 μ, ν に対して，

$$\mu(F) = 0 \Rightarrow \quad \nu(F) = 0 \quad \forall F \in \mathfrak{F}$$

が成り立つとき，ν が μ に関して絶対連続であるといい，$\nu \ll \mu$ と書く．特に，$\mu \ll \nu$ かつ $\nu \ll \mu$ のとき，μ と ν は同値であるといい，$\mu \sim \nu$ と表す．□

【定理 1.20 (J.Radon-O.M.Nikodym の定理)**】**　局所化可能測度空間 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ において，μ に関して絶対連続な任意の σ 有限測度 ν に対して，X 上の非負有限値関数 ϕ があり，任意の $F \in \mathfrak{F}$ に対して次の関係式が成り立つ：

$$\nu(F) = \int_F \phi(x) d\mu(x) = \int_X \chi_F(x)\phi(x) d\mu(x).$$

この関数を $\phi(x) = (d\nu/d\mu)(x)$ と表し，*Radon-Nikodym* 微分という．□

【定義 1.21 (積測度)**】**　2 つの測度空間 $(X, \mathfrak{E}, \mu), (Y, \mathfrak{F}, \nu)$ に対して，積空間 $E \times F$ の部分集合の族 $\{E \times F \mid E \in \mathfrak{E}, F \in \mathfrak{F}\}$ から生成される σ 加法族を $\mathfrak{E} \times \mathfrak{F}$ とおく．μ, ν が共に局所化可能ならば，対応 $E \times F \mapsto \mu(E)\nu(F)$ は一意的に $\mathfrak{E} \times \mathfrak{F}$ 上の σ 加法的測度に拡張される．この積空間の測度 $\mu \times \nu$ を μ と ν の積測度という．□

【定理 1.22 (G.Fubini の定理)**】**　局所化可能測度空間 $(X, \mathfrak{E}, \mu), (Y, \mathfrak{F}, \nu)$ の積測度空間 $(X \times Y, \mathfrak{E} \times \mathfrak{F}, \mu \times \nu)$ において，任意の非負値可測関数 $f(x, y)$ に対して次の関係式が成り立つ：

$$\int f(x,y) d(\mu \times \nu)(x,y) = \int d\mu(x) \left(\int f(x,y) d\nu(y) \right) = \int d\nu(y)) \left(\int f(x,y) d\mu(x) \right).$$

□

1.3　位相線形空間

【定義 1.23 (位相線形空間)**】**　線形空間 V が定数倍および和の演算が連続となる位相 τ を持つとき，(V, τ) を線形位相空間 *(topological vector space)* という．□

【定義 1.24 (半ノルム)**】**　複素線形空間 V 上の関数 ρ が，次の性質を持つとき半ノルム *(seminorm)* という：

i) $0 \leq \rho(v) < +\infty \quad \forall v \in V,$

ii) $\rho(u+v) \leq \rho(u) + \rho(v) \quad \forall u, v \in V,$

iii) $\rho(av) = |a|\rho(v), \quad \forall a \in \mathbb{C}, \forall v \in V.$

$\square$

【**定義 1.25** (局所凸線形位相空間)】　線形位相空間 V が，次の性質を持つ集合からなる原点の基本近傍系を持つとき，局所凸線形位相空間という：

i) (凸性）$u, v \in U \Rightarrow \quad tu + (1-t)vinU \quad 0 \leq \forall t \leq 1,$

ii) (円形性) $|a| \leq 1 \Rightarrow \quad aU \subset U,$

iii) (吸収性) $\forall v \in V, \exists a \in \mathbb{C}\text{s.t.} v \in aU.$

$\square$

【**命題 1.26** (半ノルム vs 局所凸)】　複素線形空間 V 上に半ノルムの族 $P = \{\rho\}$ が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
&U_\rho(a) := \{v \in V \mid \rho(v) \leq a\} \quad (a > 0),\\
&\mathfrak{U} := \{U_{\rho_1}(a_1) \cap \cdots U_{\rho_n}(a_n) \mid n \in NN, \rho_j \in P, a_j > 0\},
\end{aligned}
$$

で定義される集合族を原点の基本近傍系として位相 τ を定義すると，(V, τ) は局所凸線形位相空間となる．

逆に，任意の局所凸線形位相空間 (V, τ) に対して，上の定義の条件を満たす原点の基本近傍系 $\mathfrak{U}$ に対して，

$$
U \in \mathfrak{U} \mapsto \rho_U(v) := \inf\{a > 0 \mid v \in aU\}
$$

と定義すれば，$P = \{\rho_U \mid U \in \mathfrak{U}\}$ は元の位相 τ を再現する半ノルムの族 (τ 半ノルム) となる．　$\square$

【**命題 1.27** (列収束)】　局所凸線形位相空間 (V, τ) において，点列 $v_n \in V$ が原点に収束するための必要十分条件は，任意の τ 半ノルム ρ に対して，$\lim_n \rho(v_n) = 0$ となることである．　$\square$

【**定義 1.28** (有界集合)】　局所凸線形位相空間 (V, τ) の部分集合 B は，すべての τ 半ノルム ρ が B 上で有界のとき，有界という．　$\square$

【定義 1.29 (共役空間)**】** 線形位相空間 V 上の連続な複素線形関数を線形汎関数といい，その全体の作る複素線形空間 V^* を V の共役空間という．

半ノルムの族 $\{\rho_f(v) = |f(v)| \mid f \in V^*\}$ から定義される V の位相を弱位相という．

V が局所凸のとき，任意の有界集合上で線形汎関数の値は有界である．そこで，各有界集合 B と $f \in V^*$ に対して $\rho_B(f) := \sup_{v \in B} |f(v)|$ とおくと，ρ_B は V^* の半ノルムとなる．この半ノルムの全体で定義される V^* の位相を強位相という．一方，各 $v \in V$ に対して $\rho_v(f) := |f(v)|$ により定義される半ノルムの族に対応する位相を弱 $*$ 位相という． □

【定義 1.30 (有界作用素)**】** 線形位相空間 V, W に対して，V 全体で定義された V から W への連続な線形作用素を有界作用素と呼び，その全体を $\mathscr{B}V, W$ で表す． □

1.4 Banach 空間

1.4.1 閉作用素

【定理 1.31 (閉グラフ定理)**】** Banach 空間 X から Banach 空間 Y への線形作用素 A が閉作用素でかつ $\mathrm{dom}\,(A) = X$ なら，A は有界作用素である． □

1.5 Hilbert 空間

1.5.1 スペクトル

【定義 1.32 (準正則点，正則点，レゾルベント)**】** Hilbert 空間 X の線形作用素 A および $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\lambda I - A$ が有界な逆 $(\lambda I - A)^{-1}$ を持つとき，λ を準正則点という．さらに，λ が準正則点で，$\lambda I - A$ の値域が X で稠密となるとき，λ を正則点という．正則点全体の作る集合をレゾルベント集合といい，$\rho(A)$ で表す．また，正則点に対して，$R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ を A のレゾルベントという． □

【定義 1.33 (スペクトル)**】** Hilbert 空間 X の線形作用素 A に対して，レゾルベント集合 $\rho(A)$ の $\mathbb{C}$ における補集合を A のスペクトルといい，$\sigma(A)$ と表す．スペクトルはさらに次の 3 つの部分集合に分類される：

i) 点スペクトル：$\lambda I - A$ が単射でない $\lambda \in \sigma(A)$ の全体.

ii) 連続スペクトル：$\lambda I - A$ が単射で，$\overline{\mathrm{ran}\ (\lambda I - A)} = X$ となる $\lambda \in \sigma(A)$ の全体.

iii) 余剰スペクトル：$\lambda I - A$ が単射で，$\overline{\mathrm{ran}\ (\lambda I - A)} \neq X$ となる $\lambda \in \sigma(A)$ の全体.

□

【定義 1.34 (連続部分)**】** A を Hilbert 空間 X の閉線形作用素とする．A のスペクトルのうち $\overline{\mathrm{ran}\ (\lambda I - A)} \neq \mathrm{ran}\ (\lambda I - A)$ となる $\lambda \in \sigma(A)$ の全体をスペクトルの連続部分という．連続スペクトルは連続部分に含まれる． □

1.5.2 対称作用素

【定義 1.35 (対称作用素と自己共役作用素)**】** Hilbert 空間の作用素 T の定義域 $\mathrm{dom}\ (T)$ が X で稠密であって，$T \subset T^*$ が成り立つとき，T を対称作用素という．特に，$T = T^*$ となる対称作用素 T を自己共役作用素という． □

【命題 1.36 (対称作用素の判定条件)**】** X で稠密な定義域 $\mathrm{dom}\ (T)$ をもつ作用素 T が対称となるための必要十分条件は，任意の $x \in \mathrm{dom}\ (T)$ に対して (x, Tx) が実数となることである． □

【定理 1.37 (自己共役性の十分条件)**】** T が Hilbert 空間 X の対称作用素で，$\mathrm{dom}\ (T) = X$ ないし $\mathrm{ran}\ (T) = X$ となるならば T は自己共役作用素である．

□

1.5.2.1 半有界作用素

【定義 1.38 (半有界作用素)**】** 対称作用素 T が下に半有界であるとは，ある実数 α が存在して，すべての $x \in \mathrm{dom}\ (T)$ に対して，$(x, Tx) \geq \alpha(x, x)$ となることである．また，$-T$ が下に有界の時，T は上に有界であるという． □

【定理 1.39 (Friedrichs-Freudenthal)**】** 下に半有界な対称作用素 T は，同じ α で下に半有界となる自己共役拡張 $\tilde{T}$ をもつ．これを T の *Friedrichs* 拡張という．

□

1.5.2.2 von Neumann の公式

【定理 1.40 (Cayley 変換)**】**

1. H を Hilbert 空間 X の対称閉作用素とする．このとき，

   i) $(H+iI)^{-1}$ が存在して連続であり，$U_H = (H-iI)(H+iI)^{-1}$ は等長閉作用素である．

   ii) $\mathrm{ran}\,(I-U_H)$ は $\mathrm{dom}\,(H)$ と一致し，X で稠密である．

   iii) $(1-U_H)^{-1}$ が存在して，$H = i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}$ となる．

   この等長閉作用素 U_H を H の *Cayley* 変換という．

2. U が Hilbert 空間 X の等長閉作用素で，$\mathrm{ran}\,(I-U)$ が X で稠密なら，$U=U_H$ となる X の対称閉作用素が存在する．

□

【定理 1.41 (von Neumann の公式１)**】**　H を対称閉作用素とし，

$$X_H^{\pm} = \{x \in \mathrm{dom}\,(H^*) \mid H^*x = \pm ix\}$$

とおく．このとき

i) H の Cayley 変換を U_H に対して，

$$X_H^+ = \mathrm{dom}\,(U_H)^{\perp}, \quad X_H^- = \mathrm{ran}\,(U_H)^{\perp}.$$

ii) 任意の $x \in \mathrm{dom}\,(H^*)$ は

$$x = x_0 + x_+ + x_-; \quad x_0 \in \mathrm{dom}\,(H),\ x_{\pm} \in X_H^{\pm}$$

と一意的に表される．逆に，このような元は $\mathrm{dom}\,(H^*)$ に属する．さらに，この表示のもとで

$$H^*x = Hx_0 + ix_+ - ix_-$$

となる．

□

目次へ

【定理 1.42】 H を対称閉作用素とするとき，H が自己共役となることと，その Cayley 変換 U_H がユニタリとなることは同等である． □

【定義 1.43 (不足指数)**】** 対称閉作用素 H に対して，$X_H^+ = \mathrm{dom}\,(U_H)^\perp, X_H^- = \mathrm{ran}\,(U_H)^\perp$，$m = \dim X_H^+, n = \dim X_H^-$ とするとき，(m,n) を H の不足指数という． □

【定理 1.44 (von Neumann の公式２)**】** 対称閉作用素 H に対して，その不足空間を $X_H^+ = \mathrm{dom}\ (U_H)^\perp, X_H^- = \mathrm{ran}\ (U_H)^\perp$，不足指数を (m,n) とする．$m \geq p, n \geq p$ となる整数 $0 < p \leq \infty$ に対して，$X_H^\pm$ の p 次元部分空間 $V^\pm$ および V^+ から V^- への等長写像を U' を任意に取り，

$$\mathrm{dom}\,(\tilde{H}) = \left\{x_0 + y - U'y \,\middle|\, x_0 \in \mathrm{dom}\,(H), y \in V^+\right\}$$

を定義域とする線形作用素 $\tilde{H}$ を

$$\tilde{H} : x_0 + y - U'y \mapsto Hx_0 + i(y + U'y)$$

により定義すると，$\tilde{H}$ は H の対称閉な拡大を与え，その不足指数は $(m-p, n-p)$ となる．また，H のすべての対称閉な拡大はこのようにして得られる． □

【定理 1.45 (自己共役拡大の存在条件)**】** 対称閉作用素 H の不足指数を (m,n) とするとき，$m \geq p, n \geq p$ となる整数 $p > 0$ に対して，$(m-p, n-p)$ を不足指数とする H の対称閉な拡大が存在する．特に，H が極大対称となるための必要十分条件は $m = 0$ ないし $n = 0$ となることである．また，H が自己共役拡張をもつための必要十分条件は，$m = n$ となることである． □

1.5.2.3 スペクトル

【定理 1.46】 A を相等しい有限な不足指数 (m,m) をもつ対称作用素とする．このとき，

i) A のすべての自己共役な拡張に対して，そのスペクトルの連続部分は一致する．

ii) A のすべての自己共役な拡張に対して，固有値の重複度の増加分は m を超えない．

iii) $\lambda \in \sigma(A)$ が準正則点で（したがって余剰スペクトルに属し）実数ならば，A のある自己共役な拡張に対して λ は重複度 m の固有値となる．

□

1.6　作用素環

1.6.1　Banach 環

1.6.1.1　Banach 環

【定義 1.47 (Banach 環)**】**　F を実ないし複素体として，F 上の Banach 空間 R が次の構造を持つとき，R は **Banach 環** (Banach algebra) という．

1. R は F 上の代数をなす．
2. 積について連続性 $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ が成り立つ．

□

【定義 1.48 (表現)**】**　Banach 環 R の表現 (X, π) とは，R から Banach 空間 X の有界作用素の作る作用素環 $\mathscr{B}(X)$ への代数としての準同型 π で，$|\pi(x)| \leq |x|$ を満たすものをいう．このとき，X は表現空間という．

表現 (X, π) は，不変部分空間が $\{0\}$ と X しかないとき代数的に既約，また閉不変部分空間が $\{0\}$ と X しかないとき位相的に既約という．□

【定義 1.49 (原始イデアル)**】**　Banach 環 R に対し，代数的に既約な表現の核 I を**原始イデアル** (primitive ideal) という．また，R の左イデアル $J(\neq \{0\}, R)$ に対して，任意の $x \in R$ につき $x - xu \in J$ となる $u \in R$ が存在するとき，J は正則であるという．R が可換なとき，原始イデアルと正則極大イデアルは一致する．

原始イデアルの共通部分を R の**根基** (radial) といい，根基が 0 のみからなるとき，R は**半単純** (semisimple) であるという．□

【定義 1.50 (構造空間)**】**　Banch 環 R の原始イデアル全体 $\mathfrak{I}$ に次の**莢核位相** (hull-kernel toplogy)$\mathfrak{T}$ を入れた位相空間を**構造空間** (structure space) という：

$\mathfrak{T}$: $\mathfrak{I}$ の部分集合 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A}$ に含まれるイデアル全体の共通部分を含む原始イデアルの全体を，$\mathfrak{A}$ の閉包とする．

□

【定義 1.51 (Gel'fand-Mazur の定理)**】**　複素 Banach 環が体をなすなら，それは複素数体と同型である．□

【定義 1.52 (極大イデアル空間)**】** R を可換 Banach 環とするとき，その正則極大イデアル J は閉集合で，自然な準同型 $\phi_J : R \to R/J \cong \mathbb{C}$ を通して，R から $\mathbb{C}$ への準同型と 1 対 1 に対応する．この正則極大イデアルの全体 $\mathfrak{M}(R)$ に R の双対空間の汎弱位相から誘導される位相（**Gel'fand 位相**）を入れた空間を，**極大イデアル空間** (maximal ideal space) という． □

【定義 1.53 (Gel'fand 表現)**】** R を可換 Banach 環として，$x \in R$ から $\mathfrak{M}(R)$ 上の複素連続関数で無限遠でゼロとなるものの全体が作る環 $C_0(\mathfrak{M}(R))$ への準同型 $x \mapsto \hat{x} : \hat{x}(\phi) = \phi(x)$ を R の **Gel'fand 表現** (Gel'fand representation)，またこの表現による R の像 $\hat{R} \subset C_0(\mathfrak{M}(R))$ を R の **Gel'fand 変換** (Gel'fand transform) という． □

1.6.1.2 Banach*環

【定義 1.54 (Banach*環)**】** Banach 環 R において，次の 4 つの条件を満たす対合 $x \to x^*$ が定義されているとき，R を **Banach*環** (Banach *-algebra) という．

i) $(x+y)^* = x^* + y^*$

ii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$

iii) $(xy)^* = y^* x^*$

iv) $(x^*)^* = x$

□

1.6.1.3 C* 環

【定義 1.55 (C* 環)**】** Banach*環 A がノルム条件

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A$$

を満たすとき，**C* 環** (C*-algebra) という． □

【定理 1.56 (Gel'fand-Naĭmark の定理)**】** C^* 環は常に，ある Hilbert 空間 H 上の有界作用素環 $\mathscr{B}(H)$ の $*$ 閉な閉部分環と C^* 環として同型である． □

【定理 1.57】

- C^* 環はすべて半単純である.
- C^* 環の $*$ 表現について，位相的既約性と代数的既約性は同等である（R.V. Kadison).
- 可換 C^* 環 A は Gel'fand 表現により $C_0(\mathfrak{M}(A))$ と $*$ 同型である.

$\square$