

令和元年 8 月

トポロジーと量子重力

浜田賢二

<http://research.kek.jp/people/hamada/>

量子重力といえばトポロジーの足し上げと考える人が多い。2次元や3次元では重力場の自由度がないので、トポロジーの足し上げが本質的と言えるかもしれないが、4次元はそうでない。実際、重力で最も重要なインフレーション解のトポロジーは S^4 である。

S^4 とは異なるトポロジーを持つ計量場のことを重力インスタントンと呼ぶことがある。重力インスタントンの研究は Yang-Mills インスタントンの研究に比べて物理としての発展は乏しい。その理由についても述べる。

本解説書は「共形場理論を基礎に持つ量子重力理論と宇宙論」(プレアデス出版, 2016) の新たな 15 番目の章及びその付録として書いている¹。

目次

1 漸近的背景自由な量子重力理論	2
2 微分形式と曲率	5
3 局所 $SO(4)$ ゲージ変換	7
4 \mathbb{CP}^2 重力インスタントン	11
5 \mathbb{CP}^2 空間の位相的性質	14
5.1 位相不変量	14
6 \mathbb{CP}^2 上のフェルミオン	17

¹英語版 “Quantum Gravity and Cosmology Based on Conformal Field Theory” (Cambridge Scholars Publishing, 2018) では誤植を修正し、一部説明を加筆している。日本語版の正誤表は上記 URL に掲載している。

7	一般化されたスピン構造	20
7.1	$U(1)$ 背景ゲージ場	20
7.2	$SU(2)$ の部分群 $U(1)$ の背景ゲージ場	22
7.3	$SU(2)$ 背景ゲージ場	22
8	一般化されたスピン構造をもつ素粒子模型	23
A	インスタントンを記述するための道具	28
B	Eguchi-Hanson 解	30
C	Minkowski 及び Euclid 時空でのフェルミオン	32
D	スピン $1/2$ Dirac 指数 (Atiya-Singer index)	34
D.1	一般の偶数次元での表式	38
E	参考書	41

1 漸近的背景自由な量子重力理論

はじめに漸近的に背景自由性 (背景時空独立性) を持つくり込み可能な量子重力理論について述べる。この理論の重要な点の一つは、紫外極限でゲージ対称性として共形不変性が現れ、その対称性のおかげでゴーストモードがゲージ不変な物理状態から排除されることである。その量子化の方法について簡潔にまとめてから重力インスタントンについての議論を始める。

理論の定義と構造 この理論の分配関数は経路積分を用いて

$$Z = \int [dg]_g [df]_g e^{-I(g,f)} \quad (1.1)$$

で与えられて、無次元の Euclid 空間での作用は

$$I = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 + bG_4 + \frac{1}{\hbar} \mathcal{L}_2(g, f) \right] \quad (1.2)$$

で与えられる。ここで、 $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は Weyl テンソルで、 t は無次元の重力結合定数である。係数 b は Euler 密度 G_4 に比例した発散を取り除くために導入されるくり込み因子で、独立な結合定数ではない。 \hbar は還元 Planck 定数で \mathcal{L}_2 は 2

階微分以下の作用である。その中には Einstein-Hilbert 項や宇宙項も含まれる。 f は重力以外の場の総称である。

一般に、運動項として高階微分場をもつ量子論は、何の手当もしなければ、紫外極限で負計量のゴーストモードが必ず現れてしまう²。しかし、以下で述べるように、正しく重力を量子化すれば、紫外極限でもこのモードを閉じ込めることが出来る特別な対称性が理論の中に隠されていることが示せる。

結合定数 t のベータ関数が負になることから、Planck 質量スケールを超える紫外極限 $t \rightarrow 0$ で $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ の真空が実現する。そのため真空条件に影響しない共形因子場を括り出して $g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}$, $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\phi}(\hat{g}e^{th})_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + th_{\mu\nu} + \dots$ と展開する。 ϕ は共形因子場, $h_{\mu\nu}$ はトレースレステンソル場, $\hat{g}_{\mu\nu}$ は背景計量場である。重要なことは結合定数 t は Weyl 作用で支配されるテンソル場にはのみ掛かって、共形因子場には掛からないことである。すなわち ϕ は非摂動的に扱う必要があり、それによって背景時空独立性が実現することである。

量子化に於いて最も重要なことは経路積分測度の扱いである。計量場 $g_{\mu\nu}$ 上で定義された一般座標不変な測度 $[dg]_g$ は計量場が入れ子の状態になっていて実用的な測度ではない。そこで、通常の場合の量子論のように量子化するために、背景計量場 \hat{g} 上で測度を定義する。それを $[dg]_{\hat{g}}$ と書くことにする。しかしながら、この書き換えをすると、それはもはや一般座標不変でなくなる。一般座標不変にするためにはヤコビアンが必要である。それは、共形異常の Wess-Zumino 作用を S_{WZ} と書くと

$$[dg]_g[df]_g = [d\phi dh]_{\hat{g}}[df]_{\hat{g}} e^{-S_{WZ}(\phi, \bar{g})} \quad (1.3)$$

で与えられる。特に結合定数 t のゼロ次で現れる Wess-Zumino 作用は重要で、Riegert 作用と呼ばれるそれは共形因子場の 4 階微分運動項を与える。

重力の量子論はこのように元の作用 I と Wess-Zumino 作用 S を合わせた ϕ と h の背景計量場 \hat{g} 上の場の量子論として定式化することが出来る。量子化を実行すると、 $t = 0$ の紫外極限で、共形不変性がゲージ対称性として現れることが示せる。この対称性のことを BRST 共形不変性と呼ぶ。すなわち紫外極限では量子重力理論が背景時空 \hat{g} 上の BRST 共形不変性をもつ場の理論として記述される。共形不変性がゲージ対称性であるということは、背景計量を $\hat{g} \rightarrow e^{2\sigma}\hat{g}$ のように共形変形してもゲージ同値であることを表している。このように便宜的に導入した背景場の選び方によらないことが示せる。この性

²ゴーストの極に引っかけられないような低エネルギーでは、微分展開は有効理論として意味を持つ。問題はあくまで紫外極限での振る舞いである。

質のことを漸近的背景自由性 (asymptotic background-freedom) と呼ぶ。結合定数 t は共形不変性からのズレを表している。

BRST 共形不変性は量子論的な一般座標不変性で、重力場を量子化して初めて現れる厳密な対称性である。その変換性は

$$\begin{aligned}\delta_B \phi &= c^\lambda \hat{\nabla}_\lambda \phi + \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda c^\lambda, \\ \delta_B h_{\mu\nu} &= c^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} \left(\hat{\nabla}_\nu c^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda c_\nu \right) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} \left(\hat{\nabla}_\mu c^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda c_\mu \right)\end{aligned}$$

で与えられる。ここで c^μ は共形 Killing 方程式を満たすゲージゴーストである³。このゲージ対称性の存在が量子重力の物理状態が強く制限するため、理論を定義することができる。実際、高階微分場であることから必然的に含まれるすべてのゴーストモードが、このゲージ対称性の下で不変でなくなることから、物理状態として現れることない。BRST 不変の条件を解くと特定の次元を持つスカラー量のみが物理状態はになることが示せる。

1970 年代に S. Weinberg によって提唱された、紫外極限で共形不変性が実現すれば量子重力の諸問題が解決するのではないかという、漸近的安全性 (asymptotic safety) という考え方がある。この理論はその一つの実現になっている。これは計量場の揺らぎが大きくなることによる距離の概念が喪失したスケール不変な世界の実現を表している。それ故、Planck スケールを超えた高エネルギー世界を記述することが出来る。そこでは特定の時空を運動する粒子の描像はもはやない。

このように、いわゆる漸近自由性とは異なり、漸近的背景自由な量子重力理論はそれが有効なすべてのエネルギー領域で強結合状態であると言える。その状態は紫外極限では共形不変性を用いて表されるが、低エネルギーでは結合定数 t のランニングとして表される。それは新たな力学的スケール $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17}$ GeV の存在を予言して、そのスケールで共形不変性が破れた古典的な Einstein の重力に相転移する。すなわち相関距離 $\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}}$ より長い波長の重力的ゆらぎは古典的なゆらぎと見なすことが出来る。

本解説書は、時空相転移について新たな知見が得られることを期待して、結合定数 t の強結合ダイナミクスに関係するとおもわれる重力インスタントンについて記述する。

³無限個の局所的なゲージ自由度をほぼ使って重力場を輻射ゲージに固定した後でもまだ残る 15 個のゲージ自由度である。有限個にもかかわらず、その変換則の左辺が場に依存しているため、極めて強い制限を与える。

トポロジーと重力インスタントン トポロジーを足し上げることは、それが異なる種々の背景場のもとで経路積分を行うことである。この理論の真空は $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ で与えられることから、通常は Weyl 作用が消える S^4 の背景場を考える。それ以外のトポロジーでは Weyl 作用が非ゼロになるので、 t の強結合効果を与えると考えられる。

ここでは、Yang-Mills 理論の時と同様に、Weyl テンソルが自己双対になる解を考える。それを重力インスタントンと呼ぶ⁴。境界のない多様体を見ると、 \mathbb{CP}^2 がその条件を満たすことが知られている。これは Euler 標数が $\chi = 3$ で Hirzebruch 符号数が $\tau = 1$ の多様体である。ちなみに S^4 は $\chi = 2$ と $\tau = 0$ である。Hirzebruch 符号数がインスタントン数に対応していて、重力インスタントンが存在するときは

$$\bar{I} = I + i\theta\tau \quad (1.4)$$

のようにに作用に τ に比例した新たな項を加えることが出来る。

以下、 \mathbb{CP}^2 重力インスタントンに焦点を当ててその数学的性質及び物理的意味について詳しく調べる。

2 微分形式と曲率

あとでフェルミオンを定義するために 4 脚場 e_a^μ を導入する。 $SO(4)$ の局所 Euclid 空間の脚を $a, b = 0, 1, 2, 3$, Einstein の脚を $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ とすると、それは関係式

$$g_{\mu\nu} = \delta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b, \quad \delta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu$$

で定義される。

4 脚場 1-形式 $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ を導入する。その外微分からスピン接続 ω_μ^{ab} が定義される。トーションの無い時空では、それは

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0 \quad (2.1)$$

を満たす。ここで $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu$ はスピン接続の 1-形式で、反対称性 $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$ を満たす。

⁴Riemann 曲率テンソルが自己双対になる解も重力インスタントンと呼ぶが、ここでは考えない。それについては付録 B を参照。

曲率 2-形式は接続 1-形式を使って,

$$\mathcal{R}_{ab} = d\omega_{ab} + \omega_a^c \wedge \omega_{cb} \quad (2.2)$$

で定義される。これを書き換えると

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ab} &= \partial_\mu \omega_{\nu ab} dx^\mu \wedge dx^\nu + \omega_{\mu ac} \omega_{\nu b}^c dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega_{\nu ab} - \partial_\nu \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ac} \omega_{\nu b}^c - \omega_{\nu ac} \omega_{\mu b}^c) dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

を得る。曲率 2-形式は Riemann 曲率テンソル $R_{ab\mu\nu} (= R_{abcd} e_\mu^c e_\nu^d)$ を用いて

$$\mathcal{R}_{ab} = \frac{1}{2} R_{ab\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と表されることから,

$$R_{ab\mu\nu} = \partial_\mu \omega_{\nu ab} - \partial_\nu \omega_{\mu ab} + [\omega_\mu, \omega_\nu]_{ab} \quad (2.3)$$

の表式を得る。

共変微分は、ベクトル場 $V_a = e_a^\mu V_\mu$ に作用させると,

$$\nabla_\mu V_a = \partial_\mu V_a + \omega_{\mu a}^b V_b$$

で与えられる。共変微分の交換関係は

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_a = R_{\mu\nu a}^b V_b$$

となる。このとき Riemann 曲率テンソルは (2.3) で与えられる⁵。

曲率 2-形式はその外微分を取ると容易に

$$d\mathcal{R}_{ab} + \omega_{ac} \wedge \mathcal{R}_b^c - \mathcal{R}_{ac} \wedge \omega_b^c = 0$$

が成り立つことが容易に示せる。これは Bianchi 恒等式で、曲率成分で書くと

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (\partial_\lambda R_{ab\mu\nu} + \omega_{\lambda a}^c R_{b\mu\nu}^c + \omega_{\lambda a}^c R_{ac\mu\nu}) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} \nabla_\lambda R_{ab\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0 \end{aligned}$$

と書けることから、よく知られた

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu ab} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda ab} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu ab} = 0 \quad (2.4)$$

⁵一方, $\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda$ より, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\lambda = R_{\mu\nu\lambda}^\sigma V_\sigma$ の Riemann 曲率テンソルは $R_{\nu\lambda\sigma}^\mu = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\rho$ で与えられる。ここで 4 脚場が満たす条件式 $\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a = 0$ に注意すると, $V_\lambda = e_\lambda^a V_a$ より, この Christoffel 記号で書かれた通常の $R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$ がスピンの接続で表された $R_{\mu\nu a}^b e_\lambda^a e_b^\sigma$ と同じであることが示せる。

の表式が得られる。

Riemann 曲率は巡回対称性

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{cdb} + R^a{}_{dbc} = 0, \quad \text{or} \quad \epsilon^{abcd} R^e{}_{bcd} = 0 \quad (2.5)$$

を持つ。

重力インスタントンとして Riemann 曲率が自己双対になる条件 $R_{abcd} = \epsilon_{abef} R^{ef}{}_{cd}/2$ を満たすものを考えたときは、巡回対称性から、その解は

$$0 = \epsilon^{abcd} R_{ebcd} = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} \epsilon_{ebfg} R^{fg}{}_{cd} = -2R^a{}_e - \delta^a_e R$$

のように物質の無い空間での Einstein 方程式を満たす。ここで公式

$$\begin{aligned} \epsilon_{abcd} \epsilon_{efgh} \delta^{dh} &= \sum_P \epsilon_P \{ \delta_{ae} \delta_{bf} \delta_{cg} \} = \delta_{ae} \delta_{bf} \delta_{cg} + \delta_{af} \delta_{bg} \delta_{ce} + \delta_{ag} \delta_{be} \delta_{cf} \\ &\quad - \delta_{af} \delta_{be} \delta_{cg} - \delta_{ae} \delta_{bg} \delta_{cf} - \delta_{ag} \delta_{bf} \delta_{ce} \end{aligned}$$

を使った。また、Riemann (反) 自己双対な曲率のスピン接続は (反) 自己双対になることが示せる。すなわち、

$$R_{abcd} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{abef} R^{ef}{}_{cd} \iff \omega_{\mu ab} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \omega_{\mu}{}^{cd} \quad (2.6)$$

が成り立つ。しかしながら、以下で議論する Weyl 自己双対条件の場合、スピン接続は自己双対にならないことに注意する。

3 局所 $SO(4)$ ゲージ変換

同じ長さを与える正規直交フレーム e^a はたくさんあって、各点 x で局所直交回転で関係づけられている。ここではフレームの変換を

$$e^a(x) \rightarrow e'^a(x) = \Phi^a{}_b(x) e^b(x) \quad (3.1)$$

と書くことにする。計量が不変になる条件 $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x)$, すなわち $\delta_{ab} e'^a e'^b = \delta_{ab} \Phi^a{}_c \Phi^b{}_d e^c e^d = \delta_{cd} e^c e^d$ より、

$$\delta_{ab} \Phi^a{}_c(x) \Phi^b{}_d(x) = \delta_{cd}$$

が導かれ、 $\Phi^T(x) \Phi(x) = I$ ($\Phi^{-1} = \Phi^T$) の $SO(4)$ 直交変換であることが分かる。このとき、 $\det \Phi = 1$ は多様体の向き付けが保たれることを意味する。 $\det \Phi = -1$ ならばそれは向き付けが変わることを示している。

この変換の自由度は6である。これは4脚場 e_μ^a の自由度 $4^2 = 16$ から計量場の自由度10を引いた数に一致する。すなわち、計量場を表すには4脚場の自由度が多すぎるので、それが $SO(4)$ のゲージ自由度として現れている⁶。

このとき接続1-形式は

$$\omega'^a{}_b = \Phi^a{}_c \omega^c{}_d (\Phi^{-1})^d{}_b + \Phi^a{}_c d(\Phi^{-1})^c{}_b \quad (3.2)$$

と変換する。曲率2-形式は

$$\mathcal{R}'^a{}_b = \Phi^a{}_c \mathcal{R}^c{}_d (\Phi^{-1})^d{}_b$$

と変換する。

$SO(4)$ 群の生成子 Σ^{ab} が満たす代数を

$$[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}] = -\delta^{ac}\Sigma^{bd} + \delta^{ad}\Sigma^{bc} + \delta^{bc}\Sigma^{ad} - \delta^{bd}\Sigma^{ac} \quad (3.3)$$

と規格化する。ベクトルの脚に作用する生成子は

$$(\Sigma^{ab})_{cd} = \delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c$$

で与えられる。 $SO(4)$ 群の元は変数を ε^{ab} ($= -\varepsilon^{ba}$) と書くと

$$\Phi_{cd} = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\Sigma^{ab}\right)_{cd} \quad (3.4)$$

で与えられる。

フェルミオンを定義するために Clifford 代数を導入する。 $SO(4)$ は2次形式 $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ を不変に保つ変換で、それを1次形式 $\gamma^a p_a$ の2乗に書き換えてもその絶対値が変わらないことを要請する。これを満たす係数 γ^a は c-数では存在せず、反交換関係で定義される Clifford 代数

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\delta^{ab}I \quad (3.5)$$

を満たす行列として表される⁷。この代数の独立な基底は $1, \gamma^a, \gamma^a\gamma^b$ ($a < b$), $\gamma^a\gamma^b\gamma^c$ ($a < b < c$), 及び $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ の $16 (= 1 + 4 + 6 + 4 + 1)$ 個である。これより γ^a は16個の自由度を表すために 4×4 の行列で記述される⁸。

⁶一般的に d 次元空間では、 d 脚場の自由度が d^2 , 計量の自由度が $d(d+1)/2$ なので、その差 $d(d-1)/2$ が $SO(d)$ ゲージ変換の自由度になる。

⁷負符号にしているのは、Minkowski 計量での Clifford 代数 (C.1) を Euclid 化した場合を想定しているから。

⁸一般的に $SO(d)$ の Clifford 代数の基底の数は $\sum_{r=0}^d dC_r = 2^d$ になる。特に d が偶数のとき γ^a は $2^{d/2} \times 2^{d/2}$ 行列で与えられ、フェルミオンは $2^{d/2}$ 成分のベクトルとして表される。

曲がった空間でのガンマ行列は $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu}$ で与えられる。このとき γ^a は定数の行列であるが, γ^μ は場であることに注意する。

フェルミオンに作用する代数 (3.3) を満たす生成子, 及び Φ (3.4) に伴うその元 $S(\Phi)$ は

$$\Sigma^{ab} = -\frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \quad S(\Phi) = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\Sigma^{ab}\right) \quad (3.6)$$

で与えられる。Euclid 空間でのフェルミオン ψ 及びその共役場 $\bar{\psi}$ は

$$\psi' = S\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1} \quad (3.7)$$

のように変換する独立な場として与えられる。

これは $SO(4)$ の 2 重普遍被覆群になっていて, スピン群 $Spin(4)$ と呼ばれる⁹。ただ, 両者の Lie 代数は同じなので, 大局的な群の構造を考えないときは, $Spin(4)$ 表現は単に $SO(4)$ のスピン表現と呼ばれることが多い。

無限小変換 ($\varepsilon_{ab} \ll 1$) を考えると, 局所 $SO(4)$ 変換 (3.1) の行列は

$$\Phi_b^a = \left(I + \frac{1}{2}\varepsilon_{cd}\Sigma^{cd}\right)_b^a = \delta_b^a + \varepsilon_b^a$$

で与えられ, スピン接続は (3.2) より

$$\omega'_{\mu ab} = \omega_{\mu ab} + \varepsilon_a^c \omega_{\mu bd} - \omega_{\mu ac} \varepsilon_b^c - \partial_\mu \varepsilon_{ab}$$

と変換する。

変換則 (3.7) から $\bar{\psi}\psi$ は

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

⁹一般的に $Spin(d)$ は $SO(d)$ の 2 重被覆群である。すなわち $Spin(d)/Z_2 = SO(d)$ である。簡単のため $SO(3)$ を考えて, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$, $\varepsilon_{13} = \gamma$ の場合を見てみると, $(\Sigma^{13})_{cd} = \delta_c^1 \delta_d^3 - \delta_d^1 \delta_c^3$ より, その $SO(3)$ 群の元は

$$\Phi = \exp(\gamma \Sigma^{13}) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

で与えられる。一方, $Spin(3)$ は Clifford 代数 $\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\delta^{ab}I$ の表現を, Pauli 行列を使って $\gamma^a = i\lambda^a$ と選ぶと, その元は $\Sigma^{13} = -[\gamma^1, \gamma^3]/4 = -i\lambda^2/2$ より

$$S = \exp\left(-\gamma \frac{i}{2}\lambda^2\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}$$

で与えられる。このように $Spin(3)$ 群内で 1 周 ($0 \leq \gamma \leq 4\pi$) するとき $SO(3)$ 群内では 2 週している。この議論から分かるように, $Spin(3)$ の生成子 Σ^{ab} は $-i\lambda^a/2$ で与えられることから, $Spin(3) = SU(2)$ である。また, $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$, $Spin(6) = SU(4)$ である。

のようにスカラー量であることが分かる。カレント $J^a = \bar{\psi}\gamma^a\psi$ は、関係式

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^a S &= \left(I - \frac{1}{2}\varepsilon_{cd}\Sigma^{cd}\right)\gamma^a\left(I + \frac{1}{2}\varepsilon_{cd}\Sigma^{cd}\right) \\ &= \gamma^a - \frac{1}{2}\varepsilon_{cd}[\Sigma^{cd}, \gamma^a] = \gamma^a + \varepsilon^a_b\gamma^b = \Phi^a_b\gamma^b \end{aligned} \quad (3.8)$$

を使うと

$$J^{a'} = \bar{\psi}'\gamma^{a'}\psi^{a'} = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^a S\psi = \Phi^a_b J^b$$

のようにベクトルとして変換することが分かる。関係式 (3.8) は $Spin(4)$ から $SO(4)$ への全射 (surjection, onto mapping) の準同型写像 (homomorphism) を与える。 $S \rightarrow -S$ と変更しても成り立つことから、核 (kernel) は Z_2 であり、 $Spin(4)$ が $SO(4)$ の 2 重被覆になっていることが分かる。

次にフェルミオンの共変微分

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\psi &= \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu cd}\Sigma^{cd}\right)\psi, \\ \nabla_\mu\bar{\psi} &= \bar{\psi}\overleftarrow{\nabla}_\mu = \bar{\psi}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{1}{2}\omega_{\mu cd}\Sigma^{cd}\right) \end{aligned}$$

の変換を考える。4 脚場が $\nabla_\mu e_a^\nu = 0$ を満たすことから $\nabla_\mu\gamma^\nu = \gamma^\nu\nabla_\mu$ が成り立つ¹⁰。変換 (3.1), (3.2), (3.7) より、 $\nabla_a\psi = e_a^\mu\nabla_\mu\psi$ の変換は

$$\begin{aligned} (\nabla_a\psi)' &= e_a'^\mu\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega'_{\mu cd}\Sigma^{cd}\right)\psi' \\ &= \Phi_a^b e_b^\mu S\left[S^{-1}\partial_\mu S + \frac{1}{2}(\omega_{\mu cd} + 2\varepsilon_c^e\omega_{\mu ed} - \partial_\mu\varepsilon_{cd})S^{-1}\Sigma^{cd}S\right] \end{aligned}$$

となる。ここで $S^{-1}\partial_\mu S = \partial_\mu\varepsilon_{cd}\Sigma^{cd}/2$, $S^{-1}\Sigma^{cd}S = \Sigma^{cd} + \varepsilon_{ef}[\Sigma^{cd}, \Sigma^{ef}]/2$, 及び $SO(4)$ 代数 (3.3) を使うと、角括弧内が $(\partial_\mu + \omega_{\mu cd}\Sigma^{cd}/2)\psi$ にもどるので、

$$(\nabla_a\psi)' = S\Phi_a^b\nabla_b\psi$$

と変換することが分かる。この変換則と関係式 (3.8) を使うと

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^a\nabla_a\psi)' &= \bar{\psi}'\gamma^a(\nabla_a\psi)' \\ &= \bar{\psi}S^{-1}\gamma^a S\Phi_a^b\nabla_b\psi = \bar{\psi}\gamma^a\nabla_a\psi \end{aligned}$$

¹⁰具体的には $\nabla_\mu(\gamma^\nu\psi) = e_a^\nu\nabla_\mu(\gamma^a\psi) = e_a^\nu[\gamma^a\partial_\mu\psi + \omega_{\mu b}^a\gamma^b\psi + (1/2)\omega_{\mu cd}\Sigma^{cd}\gamma^a\psi] = e_a^\nu\gamma^a[\partial_\mu\psi + (1/2)\omega_{\mu cd}\Sigma^{cd}\psi] = \gamma^\nu\nabla_\mu\psi$ が成り立つ。このとき $\Sigma^{cd}\gamma^a = \gamma^a\Sigma^{cd} + \delta^{da}\gamma^c - \delta^{ca}\gamma^d$ を使っている。

が示せる。

フェルミオンの作用は一般座標変換及び局所 $SO(4)$ 変換の下で不変な関数である。一般座標不変になるように \sqrt{g} を加えて

$$I_\psi = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^a \nabla_a \psi - \nabla_a \bar{\psi} \gamma^a \psi) - m \bar{\psi} \psi \right] \quad (3.9)$$

で与えられる。Euclid 空間でのフェルミオンの Hermite 性は定かでないので、作用の係数は経路積分を実行して Feynman 振幅を求めたときにそれが Minkowski 時空での振幅を Wick 回転したものになるように定める¹¹。フェルミオンの定義については付録 C を参照。

4 \mathbb{CP}^2 重力インスタントン

ここでは重力インスタントン解として¹²、境界のない 4 次元多様体で、Weyl 作用の運動方程式¹³

$$\begin{aligned} t^2 \Theta_{ab} = & -4R_{acde} R_b{}^{cde} + 8R_{ac} R_b{}^c - \frac{4}{3} R_{ab} R - 4\nabla^2 R_{ab} + \frac{4}{3} \nabla_a \nabla_b R \\ & + \delta_{ab} C_{cdef} C^{cdef} + \frac{2}{3} \delta_{ab} \nabla^2 R = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

と Weyl 自己双対条件

$$C_{abcd} = \frac{1}{2} \epsilon_{abef} C^{ef}{}_{cd}$$

の両方を満たすものを考える。現在知られている解は \mathbb{CP}^2 だけである¹⁴。

複素射影空間 \mathbb{CP}^2 は複素座標 z_1, z_2, z_3 で表すと、 $\sum_j |z_j|^2 = 1/a$ 及び同値関係 $z_j \simeq e^{i\alpha} z_j$ を満たす実 4 次元空間である。ここで a は質量の自乗の次元を持った定数、 α は実数である。以下で重要になる \mathbb{CP}^2 空間の特徴は部分空間として、例えば $z_3 = 0$ とすると、 $\mathbb{CP}^1 = S^2$ が現れることである。

¹¹ 簡単のため平坦時空を考えると、運動方程式は $(i\gamma^a \partial_a - m)\psi = 0$ となる。運動量空間では $(\gamma^a k_a + m)\psi = 0$ が得られる。このとき伝播関数は正しく $-1/(\gamma^a k_a + m) = (\gamma^a k_a - m)/(k^2 + m^2)$ で与えられる。[一方、Clifford 代数として $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}$ の符号を採用するときは質量項に虚数単位を入れないと正しい伝播関数にならない。]

¹² T. Eguchi and P. Freund, *Quantum Gravity and World Topology*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1251; G. Gibbons and C. Pope, *\mathbb{CP}^2 as a Gravitational Instantons*, Commun. Math. Phys. **61** (1978) 239; T. Eguchi and A. Hanson, *Self-Dual Solutions to Euclidean Gravity*, Ann. Phys. **120** (1979) 82 を参照。

¹³ Weyl 作用を計量場で変分したものをゼロと置いたもの。このときスケールは、Planck 質量を含めて、すべて無視できる高エネルギー領域を考えているものとする。

¹⁴ Ricci 平坦で Riemann 曲率テンソルが自己双対になる解も含めるなら、 $K3$ 多様体 ($\chi = 24$, $\tau = -16$) も解である。

Fubini と Study によって 1900 年代に見つけられ $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の計量は実空間で

$$ds_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}^2 = \frac{dr^2 + r^2\sigma_3^2}{(1+ar^2)^2} + \frac{r^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{1+ar^2} \quad (4.2)$$

と書けることが知られている。後で詳しく見るように、この計量では $r \rightarrow \infty$ が点ではなく S^2 になって、これが上記の $z_3 = 0$ の部分空間を表している。このように、 S^4 が \mathbb{R}^4 の無限遠に点を加えて閉空間にしたものであるのに対して、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ は S^2 を加えて \mathbb{R}^4 を閉空間にしたものと考えることが出来る。

Fubini-Study 計量の 4 脚場 1-形式 $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ を

$$\begin{aligned} e^0 &= \frac{dr}{1+ar^2}, & e^1 &= \frac{r\sigma_1}{(1+ar^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ e^2 &= \frac{r\sigma_2}{(1+ar^2)^{\frac{1}{2}}}, & e^3 &= \frac{r\sigma_3}{1+ar^2} \end{aligned}$$

を用いて $ds_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}^2 = \delta_{ab} e^a e^b$ と書くと、 e^a の外微分は

$$\begin{aligned} de^0 &= 0, \\ de^1 &= \frac{1}{(1+ar^2)^{\frac{3}{2}}} dr \wedge \sigma_1 + \frac{2r}{(1+ar^2)^{\frac{1}{2}}} \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ &= \frac{1}{r} e^0 \wedge e^1 + \frac{2(1+ar^2)}{r} e^2 \wedge e^3, \\ de^2 &= \frac{1}{(1+ar^2)^{\frac{3}{2}}} dr \wedge \sigma_2 + \frac{2r}{(1+ar^2)^{\frac{1}{2}}} \sigma_3 \wedge \sigma_1 \\ &= \frac{1}{r} e^0 \wedge e^2 + \frac{2(1+ar^2)}{r} e^3 \wedge e^1, \\ de^3 &= \frac{1-ar^2}{(1+ar^2)^2} dr \wedge \sigma_3 + \frac{2r}{1+ar^2} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \\ &= \frac{1-ar^2}{r} e^0 \wedge e^3 + \frac{2}{r} e^1 \wedge e^2 \end{aligned}$$

で与えられる。

接続 1-形式 $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^\mu$ は 4 脚場 1-形式の外微分を通して (2.1) 式で定義されることから、 $\omega^{0a} \propto e^a$ 、 $\omega^{ab} \propto \epsilon^{abc} e^c$ となって、

$$\begin{aligned} \omega^{01} &= -\frac{1}{r} e^1, & \omega^{23} &= \frac{1}{r} e^1, \\ \omega^{02} &= -\frac{1}{r} e^2, & \omega^{31} &= \frac{1}{r} e^2, \\ \omega^{03} &= -\frac{1-ar^2}{r} e^3, & \omega^{12} &= \frac{1+2ar^2}{r} e^3 \end{aligned}$$

の表式が得られる。ここで、 ω^{01} と ω^{23} 及び ω^{02} と ω^{31} は反自己双対な関係にあるが、 ω^{03} と ω^{12} は

$$\omega^{03} = -\frac{1+\frac{1}{2}ar^2}{r} e^3 + \frac{3ar}{2} e^3, \quad \omega^{12} = \frac{1+\frac{1}{2}ar^2}{r} e^3 + \frac{3ar}{2} e^3,$$

と分解すると分かるように、自己双対と反自己双対な成分の両方を持っている。このように、いま Weyl 自己双対な解を考えているが、そのスピン接続は自己双対にならないことに注意する。これは Riemann 自己双対な解と著しく異なる点である。

これらの接続 1-形式を (2.2) に代入すると $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の曲率 2-形式が

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{01} &= a e^0 \wedge e^1 - a e^2 \wedge e^3, & \mathcal{R}_{23} &= -a e^0 \wedge e^1 + a e^2 \wedge e^3, \\ \mathcal{R}_{02} &= a e^0 \wedge e^2 - a e^3 \wedge e^1, & \mathcal{R}_{31} &= -a e^0 \wedge e^2 + a e^3 \wedge e^1, \\ \mathcal{R}_{03} &= 4a e^0 \wedge e^3 + 2a e^1 \wedge e^2, & \mathcal{R}_{12} &= 2a e^0 \wedge e^3 + 4a e^1 \wedge e^2\end{aligned}$$

のように求まる。曲率 2-形式を 4 脚場 1-形式を用いて $\mathcal{R}_{ab} = R_{abcd} e^c \wedge e^d / 2$ と書くと、Riemann 曲率テンソルの各成分は

$$\begin{aligned}R_{0101} &= a, & R_{0123} &= -a, & R_{0202} &= a, & R_{0231} &= -a, & R_{0303} &= 4a, \\ R_{0312} &= 2a, & R_{2323} &= a, & R_{3131} &= a, & R_{1203} &= 2a, & R_{1212} &= 4a\end{aligned}$$

となる。Ricci テンソル $R_{ab} = R^c{}_{acb}$ 及び Ricci スカラー $R = R^c{}_c$ は

$$R_{ab} = 6a \delta_{ab}, \quad R = 24a$$

で与えられる。

Weyl テンソルは

$$\begin{aligned}C_{abcd} &\equiv R_{abcd} - \frac{1}{2}(\delta_{ab}R_{cd} - \delta_{ad}R_{bc} - \delta_{bc}R_{ad} + \delta_{bd}R_{ac}) + \frac{1}{6}(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})R \\ &= R_{abcd} - 2a(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})\end{aligned}$$

で与えられる。各成分を書き下すと

$$\begin{aligned}C_{0101} &= C_{2301} - a, & C_{0202} &= C_{3102} = -a, & C_{0303} &= C_{1203} = 2a, \\ C_{0123} &= C_{2323} = -a, & C_{0231} &= C_{3131} = -a, & C_{0312} &= C_{1212} = 2a\end{aligned}$$

となって、Weyl 自己双対条件を満たす。自己双対な 't Hooft 記号 ($\eta^A{}_{0c} = \delta_{Ac}$, $\eta^A{}_{bc} = \epsilon_{Abc}$) を使うと

$$C_{abcd} = -a(\eta_{ab}^1 \eta_{cd}^1 + \eta_{ab}^2 \eta_{cd}^2) + 2a \eta_{ab}^3 \eta_{cd}^3$$

と書くことが出来る。

5 \mathbb{CP}^2 空間の位相的性質

初めに, 以下の計算に必要な \mathbb{CP}^2 空間 (4.2) の種々の曲率の自乗を計算すると,

$$\begin{aligned} R_{abcd}R^{abcd} &= 192a^2, & R_{ab}R^{ab} &= 144a^2, & R^2 &= 576a^2, \\ C_{abcd}C^{abcd} &= R_{abcd}^2 - 2R_{ab}^2 + \frac{1}{3}R^2 = 96a^2, \\ G_4 &= R_{abcd}^2 - 4R_{ab}^2 + R^2 = 192a^2, \\ \epsilon^{abcd}R_{abef}R_{cd}{}^{ef} &= 192a^2 \end{aligned}$$

が得られる。

\mathbb{CP}^2 空間の体積要素は

$$\begin{aligned} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 &= \frac{r^3}{(1+ar^2)^3} dr \wedge \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ &= \frac{r^3 \sin \theta}{8(1+ar^2)^3} dr \wedge d\varphi \wedge d\theta \wedge d\psi \end{aligned}$$

で与えられることから, 体積積分は $\int e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = \int d^4x \sqrt{g}$ より

$$\text{Vol}(\mathbb{CP}^2) = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{4\pi} d\psi \frac{r^3 \sin \theta}{8(1+ar^2)^3} = \frac{\pi^2}{2a^2}$$

で与えられる。

これより Weyl 作用は

$$\frac{1}{t^2} \int d^4x \sqrt{g} C_{abcd} = \frac{48\pi^2}{t^2}$$

と計算される。

5.1 位相不変量

境界を持たない多様体 M の種々の位相不変量を定義する。以下 \mathcal{R} と書けば, それは曲率 2-形式 \mathcal{R}_{ab} を 4×4 の行列として表示したものである。

第 1 Pontrjagin 数 は

$$\begin{aligned} P_1(M) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{Tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_M \mathcal{R}_a{}^b \wedge \mathcal{R}_b{}^a \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_M R_{abcd} R^{ab}{}_{ef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_M d^4x \sqrt{g} \epsilon^{abcd} R_{abef} R_{cd}{}^{ef} \end{aligned}$$

で定義される。ここで $e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d = d^4x \sqrt{g} \epsilon^{abcd}$ を使った。この量は曲率の巡回対称性 $\epsilon^{abcd} R_{abce} = 0$ を使うと

$$P_1(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M d^4x \sqrt{g} \epsilon^{abcd} C_{abef} C_{cd}{}^{ef}$$

と表すことも出来る。

Hirzebruch 符号数 は一般的に符号数 (the signature) とも呼ばれる量で

$$\begin{aligned} \tau(M) &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_M \text{Tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}) \\ &= \frac{1}{3} P_1(M) \end{aligned}$$

のように第 1 Pontrjagin 数の 3 分の 1 で与えられる。

Euler 標数 (characteristic) は

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \frac{1}{32\pi^2} \int_M \epsilon^{abcd} \mathcal{R}_{ab} \wedge \mathcal{R}_{cd} \\ &= \frac{1}{128\pi^2} \int_M d^4x \sqrt{g} \epsilon^{abcd} \epsilon^{efgh} R_{abef} R_{cdgh} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_M d^4x \sqrt{g} G_4 \end{aligned}$$

で与えられる。

多様体として \mathbb{CP}^2 の計量を代入するとそれぞれ

$$P_1(\mathbb{CP}^2) = 3, \quad \tau(\mathbb{CP}^2) = 1, \quad \chi(\mathbb{CP}^2) = 3 \quad (5.1)$$

の値を得る。 \mathbb{CP}^2 が Weyl 反自己双対ならば $\tau = -1$ になる。 \mathbb{CP}^2 の Euler 標数は Betti 数を使うと $\chi = b_0 + b_2 + b_4 = 1 + 1 + 1$ で与えられる。 S^4 は $b_0 = b_4 = 1, b_2 = 0$ で $\chi = 2$ となるのに対して、 \mathbb{CP}^2 は $b_2 = 1$ を持つ。これは \mathbb{CP}^2 の部分空間として可縮でない S^2 面が存在することに対応している。それは \mathbb{CP}^2 には closed だが exact ではない 2-形式 (ここでは Kahler 形式が対応) が存在することと関係している。

最後に境界の無い多様体 M の Atiya-Singer のスピン 1/2 Dirac 指数 $\mathcal{I}_{1/2} = \nu_+ - \nu_-$ の表式を与える。ここで ν_{\pm} はカイラリティが \pm のゼロモードの数である。 M 上に群 G のゲージ場がある一般的な場合を考えて、そのゲージ場を \mathcal{A}_μ ($\mathcal{A}_\mu^\dagger = -\mathcal{A}_\mu$) と書くと、フェルミオンは運動方程式

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} + \mathcal{A}_\mu \right) \psi = 0$$

を満たす。\$G = U(1)\$ なら \$\mathcal{A}_\mu\$ は電荷を \$x\$ として \$-ixA_\mu/2\$ で、\$SU(2)\$ ならば \$-i\lambda^A A_\mu^A/2\$ で与えられる。ここで \$\lambda^A\$ は Pauli 行列で \$\text{Tr}(\lambda^A \lambda^B) = 2\delta^{AB}\$ である。ゲージ場の曲率 2-形式 (場の強さ) は、\$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu\$ とすると、\$\Omega = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu/2\$ で与えられる。このときフェルミオンが属する群の表現を \$V\$、その次元を \$\text{dim}V\$ とすると、スピン 1/2 Dirac 指数は

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\frac{1}{2}} &= \int_M \hat{A}(M) \wedge ch(\Omega) \\ &= -\frac{\text{dim}V}{24} P_1(M) + \int_M \left[\frac{1}{2} c_1^2(\Omega) - c_2(\Omega) \right] \end{aligned}$$

で与えられる (付録 D 参照)。ここで \$\hat{A}(M)\$ は A-ループ種数 (A-roof genus), \$ch(\Omega)\$ は Chern 指標 (character) と呼ばれているもので、4次元多様体上で積分すると 4-形式の部分だけが残って右辺のようになる。右辺第 2 項の角括弧内は第 2 Chern 指標 \$ch_2\$ の表式で、\$c_1\$ と \$c_2\$ は

$$c_1(\Omega) = i\frac{1}{2\pi} \text{Tr} \Omega, \quad c_2(\Omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M [\text{Tr}(\Omega \wedge \Omega) - \text{Tr} \Omega \wedge \text{Tr} \Omega]$$

で定義されるゲージ場の曲率 2-形式 \$\Omega\$ の第 1 と第 2 Chern 類である¹⁵。これよりスピン 1/2 Dirac 指数は

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} = -\frac{\text{dim}V}{8} \tau(M) - \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{Tr} \Omega \wedge \Omega \quad (5.2)$$

と書ける。

例えば \$G = U(1)\$ ゲージ場の場合は \$\Omega = -ixF/2\$ を、\$G = SU(2)\$ ゲージ場の場合は \$\Omega = -i\lambda^A F^A/2\$ を代入する。ここで \$F\$ と \$F^A\$ はそれぞれのゲージ場の 2-形式である。

ゲージ場が無い場合の \$\mathbb{CP}^2\$ 上のフェルミオンのスピン 1/2 Dirac 指数は、\$\tau = 1\$ より

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} = -\frac{\text{dim}V}{8}$$

となる。フェルミオンが 1 種類 (\$\text{dim}V = 1\$) だと \$\mathcal{I}_{1/2} = -1/8\$ となって、非整数になる。一方、指数はゼロモードの数を表すので整数でなければならない。これは、以下でより詳しく議論するように、\$\mathbb{CP}^2\$ 上ではフェルミオンが正しく定義されないこと、すなわちスピン構造が入らないことを表している。

指数 \$\mathcal{I}_{1/2}\$ を整数にするだけなら 8 の倍数のフェルミオンを導入すればよいが、それは必要条件であって、十分ではないことが以下の議論から分かる。

¹⁵Chern 類は \$c(\Omega) = \det(1 + i\Omega/2\pi) = 1 + c_1(\Omega) + c_2(\Omega) + \dots\$ で定義される。

6 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 上のフェルミオン

多様体上にフェルミオンを上手く定義できるかどうかは自明ではない¹⁶。フェルミオンが定義できる多様体はスピン構造を持つと呼ばれる。 S^4 はスピン構造をもつ多様体であるが、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ は後述する特別な場合でしかスピン構造が許されないことが知られている。

このことを見るために $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 中の S^2 の存在を見てみる。Fubini-Study 計量の $r \rightarrow \infty$ を取ると

$$ds_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}^2 \rightarrow \frac{1}{a}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \frac{1}{4a}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

のように点ではなく、 S^2 になる。その上の接続 1-形式は

$$\omega^{03} \rightarrow \sigma_3, \quad \omega^{12} \rightarrow 2\sigma_3$$

となる。この S^2 と直接関係ない座標 ψ は固定して考えてよいので、

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \cos \theta d\varphi \quad (\psi = \text{const.})$$

で与えられる。これより $r \rightarrow \infty$ で

$$\int_{S^2} d\omega^{03} = \int_{S^2} \frac{1}{2} \sin \theta d\varphi \wedge d\theta = 2\pi, \quad \int_{S^2} d\omega^{12} = 4\pi$$

となることが分かる。

多様体上のフェルミオン ψ を考える。Dirac の運動方程式は

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} \right) \psi = 0$$

で与えられる。ここで $SO(4)$ のフェルミオンに対する生成子は

$$\Sigma^{ab} = -\frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b]$$

である。

ある曲線 C_v に沿って 1 周する平行移動 (parallel transport) を考える。無限小移動 Δx^μ に対して運動方程式は $\psi(x^\mu + \Delta x^\mu) = (1 - \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} \Delta x^\mu / 2) \psi(x^\mu)$

¹⁶S. Hawking and C. Pope, Generalized Spin Structures in Quantum Gravity, Phys. Lett. **73B** (1978) 42; A. Back and P. Freund, *New Gravitational Instantons and Universal Spin Structures*, Phys. Lett. **77B** (1978) 181; S. Avis and C. Isham, *Generalized Spin Structures on Four Dimensional Space-Times*, Commun. Math. Phys. **72** (1980) 72; C. Isham and C. Pope, *A Spinor Field Representation of The Stiefel-Whitney Class*, Phys. Lett. **114B** (1982) 137 を参照。

と書けることから,

$$\psi_v = \exp\left(-\int_{C_v} \omega\right) \psi, \quad \omega = \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} dx^\mu$$

の表式が得られる。

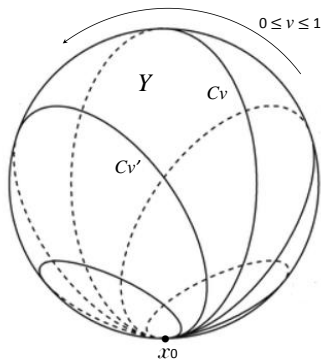


図 1: S^1 と S^1 のスマッシュ積 (smash product) から S^2 を構成する方法。
 $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$ と表記される。2つの曲線 C_v と $C_{v'}$ で囲まれた面を Y とする。

先ほどの $r \rightarrow \infty$ に現れた S^2 球面を考える。その上のある点 x_0 から球面を1周する S^1 曲線を C_v として, v を 0 から 1 まで走る変数として, $v = 0$ と $v = 1$ の曲線 C_0 と C_1 は自明な曲線, すなわち点 x_0 そのものとする, $0 \leq v \leq 1$ の連続的な曲線の束は S^2 になる (S^1 と S^1 から S^2 を構成する方法。図 1 参照)。

2つの自明でない曲線 C_v と $C_{v'}$ を考え, それらに囲まれた S^2 上の領域を Y とする。このとき S^2 上の 1-形式を ω とすると, Stokes の定理より

$$\int_{C_{v'}} \omega - \int_{C_v} \omega = \int_Y d\omega$$

となる。ここで, $v' = 1$ と $v = 0$ の自明な曲線の場合を考えると, $C_1 = C_0 = x_0$ なので, $Y = S^2$ になる。

フェルミオンが多様体上で無矛盾に定義できる条件, すなわちスピン構造が入る条件は, $v = 0$ と $v = 1$ は同一点 x_0 を表していることから, それらの ψ_v は

$$\psi_0 = \psi_1 \tag{6.1}$$

のように一致しなければならない。この条件式には 2 重被覆に伴う符号の任意性が現れないことに注意する。

しかしながら、 \mathbb{CP}^2 では $\psi_0 = -\psi_1$ となってスピンの構造が存在しないことが分かる。このことを示すために具体的に ψ_v を計算してみる。考えている S^2 上の接続 1-形式 ω は $r \rightarrow \infty$ を取って

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ab} \Sigma^{ab} \rightarrow \omega^{03} \Sigma^{03} + \omega^{12} \Sigma^{12}$$

で与えられる。 $\Sigma^{03} = -\gamma^0 \gamma^3 / 2$ と $\Sigma^{12} = -\gamma^1 \gamma^2 / 2$ より、 $[\Sigma^{03}, \Sigma^{12}] = 0$ 、 $(\Sigma^{03})^2 = (\Sigma^{12})^2 = -I/4$ となることを使うと、

$$\exp\left(-\int_{C_v} \omega\right) = \exp\left(-\int_{C_v} \omega^{03} \Sigma^{03}\right) \exp\left(-\int_{C_v} \omega^{12} \Sigma^{12}\right)$$

と分解できるので、

$$\alpha_v = -\frac{1}{2} \int_{C_v} \omega^{03}, \quad \beta_v = -\frac{1}{2} \int_{C_v} \omega^{12}$$

と書くとそれぞれ

$$\exp\left(-\int_{C_v} \omega^{03} \Sigma^{03}\right) = I \cos \alpha_v + 2\Sigma^{03} \sin \alpha_v,$$

$$\exp\left(-\int_{C_v} \omega^{12} \Sigma^{12}\right) = I \cos \beta_v + 2\Sigma^{12} \sin \beta_v$$

と計算することができる。ここで $\gamma_5^2 = I$ と $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ を満たすカイラリティのガンマ行列 $\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ を導入して $\gamma_5 \psi^\pm = \pm \psi^\pm$ を考えると、一方の符号だけを考えても一般性は失われないので、以下では ψ^+ を考えることにする。 ψ_v^+ の計算は $\Sigma^{03} \Sigma^{12} = \gamma_5 / 4$ 、 $\Sigma^{03} \psi^+ = -\Sigma^{12} \psi^+$ を使うと

$$\begin{aligned} \psi_v^+ &= \exp\left(-\int_{C_v} \omega^{03} \Sigma^{03}\right) \exp\left(-\int_{C_v} \omega^{12} \Sigma^{12}\right) \psi^+ \\ &= \left[I(\cos \alpha_v \cos \beta_v + \sin \alpha_v \sin \beta_v) \right. \\ &\quad \left. + 2\Sigma^{12}(\cos \alpha_v \sin \beta_v - \sin \alpha_v \cos \beta_v) \right] \psi^+ \\ &= \left[I \cos(\alpha_v - \beta_v) - 2\Sigma^{12} \sin(\alpha_v - \beta_v) \right] \psi^+ \end{aligned}$$

を得る。この結果を使って ψ_1^+ を ψ_0^+ で記述する。 $v = 0$ の場合の式を逆に解くと $\psi^+ = [I \cos(\alpha_0 - \beta_0) + 2\Sigma^{12} \sin(\alpha_0 - \beta_0)] \psi_0^+$ が得られるので、

$$\begin{aligned} \psi_1^+ &= \left[I \cos(\alpha_1 - \beta_1) - 2\Sigma^{12} \sin(\alpha_1 - \beta_1) \right] \\ &\quad \times \left[I \cos(\alpha_0 - \beta_0) + 2\Sigma^{12} \sin(\alpha_0 - \beta_0) \right] \psi_0^+ \\ &= \left\{ I \cos[\alpha_1 - \alpha_0 - (\beta_1 - \beta_0)] - 2\Sigma^{12} \sin[\alpha_1 - \alpha_0 - (\beta_1 - \beta_0)] \right\} \psi_0^+ \end{aligned}$$

ここで、前述したように、 $\alpha_1 - \alpha_0$ と $\beta_1 - \beta_0$ は S^2 上の積分に書き換えることが出来て、

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_0 &= -\frac{1}{2} \int_{C_1} \omega^{03} + \frac{1}{2} \int_{C_0} \omega^{03} = -\frac{1}{2} \int_{S^2} d\omega^{03} = -\pi, \\ \beta_1 - \beta_0 &= -\frac{1}{2} \int_{C_1} \omega^{12} + \frac{1}{2} \int_{C_0} \omega^{12} = -\frac{1}{2} \int_{S^2} d\omega^{12} = -2\pi\end{aligned}$$

が得られる。これより、

$$\psi_1^+ = [I \cos \pi - 2\Sigma^{12} \sin \pi] \psi_0^+ = -\psi_0^+ \quad (6.2)$$

のように負号が現れる。 ψ_v^- についても同様である。このように条件式 (6.1) を満たさないことから、 \mathbb{CP}^2 はスピン構造を持たないことが分かる。

結果 (6.2) は最終的には

$$\psi_1^+ = \exp\left(-\int_{S^2} d\omega\right) \psi_0^+ = -\psi_0^+$$

と表すことができる。このようにスピン構造が入るかどうかの条件は、2次元閉部分空間に exact でない 2-形式 $d\omega$ が存在して、それが負号を出すか否かで決まる¹⁷。

7 一般化されたスピン構造

フェルミオンはゲージ場とも結合するので、多様体上に背景ゲージ場を導入するとスピン構造を入れることが出来るようになる¹⁸。ただし、フェルミオンが複数存在する場合はゲージ群と表現に制限が付く。

7.1 $U(1)$ 背景ゲージ場

\mathbb{CP}^2 上の $U(1)$ 背景ゲージ場を考える。運動方程式 $\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$ を満たし、且つエネルギー運動量テンソル $\Theta_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda + g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} / 4$ が消える $U(1)$ ゲージ場の解が存在することが知られている。 $\Theta_{\mu\nu} = 0$ であることからこの解は重力場の運動方程式 (4.1) を変更しない。そのためこのゲージ場が存在しても \mathbb{CP}^2 多様体は保たれる。

¹⁷数学用語では、スピン構造が存在するための必要十分条件は第 2 Stiefel-Whitney 類 $w_2 \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ の閉部分空間上での積分が自明 ($0 \pmod{2}$) になること、と表される。 $M = \mathbb{CP}^2$ ではそれが $\int_{S^2} w_2 = (i/\pi) \int_{S^2} d\omega = 1$ となる。

¹⁸脚注 16 の文献を参照。

ゲージ場の曲率 2-形式 $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu / 2 = F_{ab} e^a \wedge e^b / 2$ で表すと、その解は

$$\begin{aligned} F &= 2a (e^0 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^2) \\ &= 2a \left(\frac{r}{(1+ar^2)^2} dr \wedge \sigma_3 + \frac{r^2}{1+ar^2} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

で与えられる。これは自己双対解で、真中の符号を負にすれば反自己双対な解になる。 $F = dA$ で定義される 1-形式 $A = A_\mu dx^\mu$ は

$$A = \frac{ar^2}{1+ar^2} \sigma_3 = -\bar{\eta}_{3\mu\nu} \frac{ax^\nu}{1+ar^2} dx^\mu$$

と書くことが出来る。

スピン構造で問題となっている \mathbb{CP}^2 の中の S^2 について考える。それが現れる $r \rightarrow \infty$ でゲージ場は、スケール a が消えて、

$$F \rightarrow 2\sigma_1 \wedge \sigma_2 = d\sigma_3$$

となる。これより、

$$\int_{S^2} F = \int_{S^2} d\sigma_3 = \int_{S^2} \frac{1}{2} \sin \theta d\varphi \wedge \theta = 2\pi$$

が得られる。

$U(1)$ ゲージ場が存在する場合の \mathbb{CP}^2 上のフェルミオンの運動方程式は

$$\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} - i \frac{x}{2} A_\mu \right) \psi = 0$$

に変更される。ここで x はフェルミオンがもつ電荷の大きさで、その単位 e はゲージ場に吸収させている。スピン接続のときと同様に、 S^2 上の平行移動によるゲージ場からの寄与を考えると、

$$\psi_v = \exp \left(i \frac{x}{2} \int_{C_v} A \right) \psi$$

となる。異なる 2 つの曲線 $C_{v'}$ と C_v 上の平行移動を考えて、 ψ を消去すると、

$$\psi_{v'} = \exp \left(i \frac{x}{2} \int_{C_{v'}} A - i \frac{x}{2} \int_{C_v} A \right) \psi_v = \exp \left(i \frac{x}{2} \int_Y F \right) \psi_v$$

を得る。前と同じように自明な曲線 $v' = 1$ と $v = 0$ に選ぶと、それらは同一点 $C_1 = C_0 = x_0$ を表すので、 Y は S^2 となる。これより、

$$\psi_1 = \exp \left(i \frac{x}{2} \int_{S^2} F \right) \psi_0 = e^{i\pi x} \psi_0$$

が得られる。したがって、 x が奇数なら符号が出てスピンの接続からの符号と相殺することが出来る。

この一般化されたスピンの構造を $Spin_c(4) = [Spin(4) \times U(1)]/Z_2$ と表す。 Z_2 は多様体からの符号と $U(1)$ からの符号が消えるような表現を選ぶことを指定している。

このように、背景 $U(1)$ ゲージ場を導入して、フェルミオンに「奇数」の電荷を割り当てれば、 \mathbb{CP}^2 にスピンの構造を入れることが出来る。一方、ボソン場の場合はスピンの接続から符号がでないで、その電荷は符号が出ないように「偶数」でなければならない (Dirac の量子化条件に相当)。この条件は重力場と結合する物質の内容によって \mathbb{CP}^2 にスピンの構造が入るかどうかが決まることを示している。

7.2 $SU(2)$ の部分群 $U(1)$ の背景ゲージ場

議論をより大きな群 G に拡張して、その中の $U(1)$ 部分群を考える。ここでは $SU(2)$ を考えて、その $U(1)$ 部分群の F^3 を F (7.1) として、背景ゲージ場 $-(i/2)\lambda^3 F^3$ を導入する。このとき運動方程式は $\gamma^\mu(\partial_\mu + \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab}/2 - i\lambda^3 A_\mu^3/2)\psi = 0$ で与えられる。 $SU(2)$ の 2 重項 (doublet) を考えると、 $\lambda^3 = \text{diag}(1, -1)$ なので、その上下成分はそれぞれ $U(1)$ 電荷 $x = \pm 1$ の運動方程式を満たす。そのため 2 重項のフェルミオン全体に負号が出て、 \mathbb{CP}^2 の負号と相殺するので、スピンの構造が入ることが分かる。一方、一般の $2j + 1$ 表現では $\lambda^3 = \text{diag}(2j, 2j - 2, \dots, -2j)$ となって、背景ゲージ場からの符号は $e^{i2\pi j}$ となる。そのため、 j が半整数のときは符号が相殺してスピンの構造が入るが、整数のときは \mathbb{CP}^2 の負号が残ってしまうためスピンの構造が入らないことが分かる。

7.3 $SU(2)$ 背景ゲージ場

\mathbb{CP}^2 上には、 $SU(2)$ の $U(1)$ 部分ではなく、 $SU(2)$ ゲージ場の運動方程式を満たし、且つそのエネルギー運動量テンソルが消える解が存在する。それは \mathbb{CP}^2 のスピンの接続と 't Hooft 記号を用いて

$$A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\eta}_{ab}^A \omega_\mu^{ab} \quad (7.2)$$

で与えられる。また, 't Hooft 記号 $\bar{\eta}_{ab}^A$ を η_{ab}^A に置き換えたものも解である。
この $SU(2)$ ゲージ場の曲率は

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + \epsilon^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\eta}_{ab}^A (\partial_\mu \omega_\nu^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu^{ab} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{ab}) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\eta}_{ab}^A R_{\mu\nu}{}^{ab} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで $\epsilon^{ABC} \bar{\eta}_{ab}^B \bar{\eta}_{cd}^C = \delta_{ac} \bar{\eta}_{bd}^A - \delta_{ad} \bar{\eta}_{bc}^A - \delta_{bc} \bar{\eta}_{ad}^A + \delta_{bd} \bar{\eta}_{ac}^A$ を使った。この $F_{\mu\nu}^A$ は自己双対でも反自己双対でもなく, 両方の成分を持っている。これらは η_{ab}^A に置き換えた解も同様である。実際, \mathbb{CP}^2 上で

$$\begin{aligned} D^\mu F_{\mu\nu}^A &= \nabla^\mu F_{\mu\nu}^A + \epsilon^{ABC} A^{B\mu} F_{\mu\nu}^C \\ &= g^{\mu\lambda} (\partial_\lambda F_{\mu\nu}^A - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma F_{\sigma\nu}^A - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma F_{\mu\sigma}^A + \epsilon^{ABC} A_\lambda^B F_{\mu\nu}^C) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\eta}_{ab}^A g^{\mu\lambda} (\partial_\lambda R_{\mu\nu}{}^{ab} - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma R_{\sigma\nu}{}^{ab} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma R_{\mu\sigma}{}^{ab} + \omega_\lambda^{ac} R_{\mu\nu c}{}^b + \omega_\lambda^{bc} R_{\mu\nu a}{}^c) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\eta}_{ab}^A \nabla^\mu R_{\mu\nu ab} = 0 \end{aligned}$$

となる。またエネルギー運動量テンソルも $\Theta_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda}^A F_\nu^{A\lambda} + g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}^A F^{\lambda\sigma A} / 4 = 0$ が示せる。そのため重力場のエネルギー運動量テンソルが変更を受けないので, \mathbb{CP}^2 解に影響を与えない。

この $SU(2)$ 背景ゲージ場が存在する場合, その2重項 (一般的には j が半整数の表現) のフェルミオンにスピン構造を入れることが出来る。そこでゲージ場の $r \rightarrow \infty$ の S^2 での振る舞いを見てみると $A_\mu^A \rightarrow \delta^{A3} \omega_\mu^{03} - \epsilon^{A12} \omega_\mu^{12}$ となってゲージ場1-形式 $A^A = A_\mu^A dx^\mu$ は $A^1, A^2 \rightarrow 0, A^3 \rightarrow \omega^{03} - \omega^{12} = -\sigma_3$ となるので,

$$F^1, F^2 \rightarrow 0, \quad F^3 \rightarrow -d\sigma_3$$

となる。したがって, スピン構造については $U(1)$ 部分群での議論がそのまま使えるので, j が半整数の表現のフェルミオンは \mathbb{CP}^2 上で定義することが出来る。

8 一般化されたスピン構造をもつ素粒子模型

最後にフェルミオンが複数存在する現実的な模型を考える。まず始めに, \mathbb{CP}^2 上では $G = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ を持つ標準模型にスピン構造を

入れることが出来ないことが分かる。実際、スピン 1/2 Dirac 指数を整数にするために、まず右手型ニュートリノを加えて Weyl フェルミオンの数を世代ごとに 16 個にする必要がある。しかし、右手型ニュートリノはゲージ電荷を一切もたないので、 \mathbb{CP}^2 多様体からの符号を背景ゲージ場を導入して消すことが出来ない。それ以外のフェルミオンやボゾン場についても上手くスピン構造が入るように電荷が割り振られていない¹⁹。

また、世代ごとの Weyl フェルミオン数が 15 個の $SU(5)$ GUT もスピン 1/2 Dirac 指数 $\mathcal{I}_{1/2}$ が整数にならないのでスピン構造が入らない。

標準模型を含む数々の GUT 模型の中で \mathbb{CP}^2 上にスピン構造が入る最も簡単なゲージ群は $SO(10)$ (厳密には $Spin(10)$) である。スピン構造を入れるための背景ゲージ場の導入方法にはいくつか選択肢があって、先ず $SO(10) \rightarrow SU(5) \times U(1)_X$ のように自発的対称性の破れが起こる場合を考える。このとき一世代を表す $SO(10)$ の 16 表現に属する Weyl フェルミオンが

$$16 \rightarrow 10_{-5} + \bar{5}_3 + 1_{-1}$$

のように分解される。添え字は $U(1)_X$ の電荷で、すべて奇数になる。一方、ボソン場は

$$45 \rightarrow 24_0 + 10_{-4} + \bar{10}_4 + 1_0,$$

$$10 \rightarrow 5_{-2} + \bar{5}_2$$

のように偶数の電荷を持つ。そのため $U(1)_X$ の背景ゲージ場を導入すればスピン構造が入ることが分かる。

スピン 1/2 Dirac 指数も電荷 x の各フェルミオンに対して、 $\Omega = i(x/2)F$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} \text{Tr} \Omega \wedge \Omega &= -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} F \wedge F \\ &= -\frac{x^2}{4} \frac{2(2a)^2}{8\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = -\frac{x^2}{8} \end{aligned}$$

であることから、 $\dim V = 16$, $N_X = 10 \times (-5)^2 + 5 \times 3^2 + 1 \times (-1)^2 = 296$ を代入すると

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} = -\frac{\dim V}{8} \tau(\mathbb{CP}^2) - \left(-\frac{N_X}{8}\right) = -2 + 37 = 35$$

¹⁹余分な $U(1)$ ゲージ場を加えてそれに電荷を割り当ててスピン構造が許されるように修正する考えもある。

のように整数になる。 F が反自己双対解の場合は真ん中の符号が負になって、 -39 になる。ただ、これらの場合、値が非ゼロなのでフェルミオンのゼロモードが存在する。そのため分配関数は消えてしまう²⁰。

次に対称性の破れの別のパターンとして $SO(10) \rightarrow SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ を考える。このときフェルミオンの表現は

$$16 \rightarrow (4, 2, 1) + (\bar{4}, 1, 2)$$

のように分解される。一方、ボソン場は

$$45 \rightarrow (15, 1, 1) + (6, 2, 2) + (1, 3, 1) + (1, 1, 3),$$

$$10 \rightarrow (6, 1, 1) + (1, 2, 2)$$

のように分解される。そこで、 $SU(2)_L$ と $SU(2)_R$ の2つの $U(1)$ 部分群の両方に $-(i/2)\lambda^3 F_{L,R}^3$ を導入する。ここで $F_{L,R}^3$ は2-形式 $F(7.1)$ である。運動方程式は $\gamma^\mu(\partial_\mu + \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab}/2 - i\lambda^3 A_{L\mu}^3/2 - i\lambda^3 A_{R\mu}^3/2) \psi = 0$ で与えられる。16 表現のフェルミオンは L と R それぞれ4個、合計8個の2重項に分解され、 j が整数の表現は含まれないので、負号が出て \mathbb{CP}^2 の負号と相殺する。そのため一般化されたスピン構造が入ることが分かる。

さらにこの場合のスピン $1/2$ Dirac 指数を計算すると、 $\dim V = 8 \times 2$, $\Omega = -i\lambda^3 F^3/2$, $\text{Tr}(\lambda^3 \lambda^3) = 2$ より、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\frac{1}{2}} &= -\frac{\dim V}{8} \tau(\mathbb{CP}^2) + \frac{4}{16\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} F_L^3 \wedge F_L^3 + \frac{4}{16\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} F_R^3 \wedge F_R^3 \\ &= -2 + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} F \wedge F = -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

となって消えるため、分配関数が存在することが分かる。一方、 F として反自己相反な解を持ってくると符号が逆転して $\mathcal{I}_{1/2} = -2 - 2 = -4$ となるため、分配関数が存在しなくなる。

上と同じように対称性が $SO(10) \rightarrow SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ のように破れる場合を考えて、左右の $SU(2)$ に (7.2) 解を当ててもスピン構造が入る。上の議論との違いはスピン $1/2$ Dirac 指数がゼロにならないことである。

指数へのゲージ場の寄与は各フェルミオンの2重項に対して、 $\Omega = -i\lambda^A F^A/2$,

²⁰ゼロモードの作用関数は消えるので、そのモードの Grassmann 経路積分は消えてしまう。もし質量項 $m\bar{\psi}\psi$ があればそれはゼロモードを含むので Grassmann 積分が値を持って、分配関数は質量 m に比例する。ゼロモードの数が複数の場合はそれらに関する質量の積になる。しかし、ここでは質量がゼロと見なせる高エネルギー極限を考えている。

$\tau(\mathbb{CP}^2) = 1, \chi(\mathbb{CP}^2) = 3$ より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} \text{Tr} \Omega \wedge \Omega &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} F^A \wedge F^A = -\frac{1}{64\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} d^4x \sqrt{g} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}^A F_{\lambda\sigma}^A \\ &= -\frac{1}{64\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} R_{\mu\nu ab} R_{\lambda\sigma}{}^{ab} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \epsilon^{abcd} R_{\mu\nu ab} R_{\lambda\sigma cd} \right) \\ &= -\frac{3}{4} \tau(\mathbb{CP}^2) + \frac{1}{2} \chi(\mathbb{CP}^2) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。 $\bar{\eta}_{ab}^A$ を η_{ab}^A に変えた場合は真中の符号が逆になって $-9/4$ になる。両 $SU(2)$ に同じ $\bar{\eta}_{ab}^A$ の解を当てると、2重項が8個になるので、

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\frac{1}{2}} &= -\frac{\dim V}{8} \tau(\mathbb{CP}^2) - \frac{8}{8\pi^2} \int_{\mathbb{CP}^2} \text{Tr} \Omega \wedge \Omega \\ &= -\frac{16}{8} - 8 \times \frac{3}{4} = -8 \end{aligned}$$

が得られる。このように整数になるが、ゼロにはならない。また、一方の $SU(2)$ に η_{ab}^A の解を当てると、 $\mathcal{I}_{1/2} = -2 - 4 \times (3/4) - 4 \times (-9/4) = 4$ となる。同様に両方とも η_{ab}^A の解にかえると $\mathcal{I}_{1/2} = -2 - 8 \times (-9/4) = 16$ になる。いずれにせよフェルミオンのゼロモードが存在するので分配関数が消えてしまう。

他にも $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 部分に $U(1)$ 解と $SU(2)$ 解を適当に組み合わせるとスピンの構造を入れることが出来るが、スピン $1/2$ Dirac 指数がゼロになるのは両 $SU(2)$ の $U(1)$ 部分群に自己双対な背景ゲージ場を入れた場合だけである。

いずれにせよ \mathbb{CP}^2 空間が物理的に意味があるとするならば、素粒子模型として $SO(10)$ GUT 模型が強く示唆されることになる。 $SO(10)$ GUT 模型は標準模型が持つ1世代16個の Weyl フェルミオンを最小に含むアノーマリーフリーな優れた模型である。しかしながら、ゲージ場の数は12個から45個の約4倍に増え、さらに自発的対称性引き起こすためには非常に多くの Higgs 場を導入しなければならなくなる。例えば

$$\begin{aligned} SO(10) &\implies SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \implies SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \\ &\quad 54_H \qquad\qquad\qquad 126_H \\ &\implies SU(3)_C \times U(1)_{em} \\ &\quad 10_H \end{aligned}$$

のように、実54表現及び126と10の複素表現の Higgs 場を入れる必要があるので指摘されている。

$SO(10)$ GUT 模型は神岡の陽子崩壊の実験からもまだ棄却されていないし、ニュートリノに質量が見つかったことから 1 世代 16 個が自然に入るのは好ましい性質である。また、バリオン生成についても、電弱スファレロン過程による希釈を逃れることが出来る、GUT スケールで $B - L$ が破れるバリオン生成シナリオを考えることもできる²¹。

このように $SO(10)$ GUT 模型は良い性質を持っているが、それは $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 空間とは直接関係のない性質で、本来、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 重力インスタントンを考える動機づけはインスタントン効果によって CP を破る有効相互作用が誘導されて、Planck スケール付近でバリオン生成が出来ないだろうか、というものであった。しかし、 $SO(10)$ が選ばれるなら、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 空間を考えるという物理的動機付けが弱くなってしまう。

そもそも、 $SO(10)$ 以外の模型が選ばれるなら $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ をトポロジーの足し上げから外せばよいだけである。実際、重力で大事なインフレーションは S^4 のトポロジーに含まれるからである。このように、現時点では、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ が必要であるという強い物理的動機付けはない。

²¹例えば K. Babu and R. Mohapatra, *B - L Violating Proton Decay Modes and New Baryogenesis Scenario in $SO(10)$* , Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 091803 を参照。

A インスタントンを記述するための道具

まず初めにインスタントンの物理でよく使われる 't Hooft 記号を導入する。 $SU(2)$ の足を $A, B = 1, 2, 3$, \mathbb{R}^4 の時空の脚を $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ 、完全反対称テンソルを $\epsilon^{0123} = 1$ とすると、それは

$$\begin{aligned}\eta_{\alpha\beta}^A &= \epsilon_{0A\alpha\beta} + \frac{1}{2}\epsilon_{ABC}\epsilon_{BC\alpha\beta}, \\ \bar{\eta}_{\alpha\beta}^A &= \epsilon_{0A\alpha\beta} - \frac{1}{2}\epsilon_{ABC}\epsilon_{BC\alpha\beta}\end{aligned}$$

で定義される。成分で書くと

$$\begin{aligned}\eta_{0\beta}^A &= \delta_{A\beta}, & \eta_{BC}^A &= \epsilon_{ABC}, \\ \bar{\eta}_{0\beta}^A &= -\delta_{A\beta}, & \bar{\eta}_{BC}^A &= \epsilon_{ABC}\end{aligned}$$

となる。 $\eta_{\alpha\beta}^A$ は脚 α, β について自己双対 (self-dual), $\bar{\eta}_{\alpha\beta}^A$ は反自己双対 (anti-self-dual) で、

$$\eta_{\alpha\beta}^A = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta_{\gamma\delta}^A, \quad \bar{\eta}_{\alpha\beta}^A = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\eta}_{\gamma\delta}^A$$

を満たす。

反自己双対な 't Hooft 記号を用いて表される微分 1-形式

$$\sigma_A = \bar{\eta}_{\alpha\beta}^A \frac{x^\alpha dx^\beta}{r^2}$$

を導入する。ここで、 $x^\alpha = (t, x, y, z)$, $r^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ である。 σ_A 及び dr を成分で書くと

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{r^2} (xdt - tdx - zdy + ydz), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{r^2} (ydt + zdx - tdy - xdz), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{r^2} (zdt - ydx + xdy - tdz), \\ dr &= \frac{1}{r} (tdt + xdx + ydy + zdz)\end{aligned}$$

である。1-形式 σ_A の外微分は関係式 $d\sigma_A = \epsilon_{ABC}\sigma_B \wedge \sigma_C$ を満たす。すなわち、

$$d\sigma_1 = 2\sigma_2 \wedge \sigma_3, \quad d\sigma_2 = 2\sigma_3 \wedge \sigma_1, \quad d\sigma_3 = 2\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

である。

\mathbb{R}^4 空間は σ_A を使って

$$\begin{aligned} ds_{\mathbb{R}^4}^2 &= dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \end{aligned}$$

と書ける。

さらにこの研究分野でよく使われる Euler 角 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$ を用いた座標

$$\begin{aligned} x + iy &= r \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi + \varphi)}, \\ z + it &= r \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi - \varphi)} \end{aligned}$$

を導入すると

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (\sin \psi d\theta - \sin \theta \cos \psi d\varphi), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} (-\cos \psi d\theta - \sin \theta \sin \psi d\varphi), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} (d\psi + \cos \theta d\varphi) \end{aligned}$$

を得る。このとき \mathbb{R}^4 空間は

$$ds_{\mathbb{R}^4}^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4} (d\theta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \theta d\varphi d\psi)$$

と表せる。

ここで θ と φ を固定した面を考えると, $ds_{\mathbb{R}^4}^2|_{\theta, \varphi = \text{fix}} = dr^2 + (r^2/4)d\psi^2$ になる。これが錐状特異点 (conical singularity) の無い \mathbb{R}^2 平面 [$ds_{\mathbb{R}^2}^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2$ ($0 \leq \omega \leq 2\pi$)] になるためには $\omega = \psi/2$ となる必要がある。すなわち $0 \leq \psi \leq 4\pi$ となる。これは S^3 を Euler 角で表したときと同じである。

't Hooft 記号の公式 最後に η が満たす公式を以下にまとめると

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}^A &= -\eta_{\beta\alpha}^A, & \eta_{\alpha\beta}^A \eta_{\alpha\beta}^B &= 4\delta^{AB}, \\ \eta_{\alpha\beta}^A \eta_{\alpha\gamma}^A &= 3\delta_{\beta\gamma}, & \eta_{\alpha\beta}^A \eta_{\alpha\beta}^A &= 12, \\ \eta_{\alpha\beta}^A \eta_{\gamma\delta}^A &= \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\ \eta_{\alpha\beta}^A \eta_{\alpha\gamma}^B &= \delta^{AB} \delta_{\beta\gamma} + \epsilon^{ABC} \eta_{\beta\gamma}^C, \\ \epsilon^{ABC} \eta_{\alpha\gamma}^B \eta_{\beta\delta}^C &= \delta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta}^A - \delta_{\alpha\delta} \eta_{\gamma\beta}^A - \delta_{\gamma\beta} \eta_{\alpha\delta}^A + \delta_{\gamma\delta} \eta_{\alpha\beta}^A, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_{\delta\epsilon}^A &= -\delta_{\gamma\epsilon} \eta_{\alpha\beta}^A - \delta_{\beta\epsilon} \eta_{\gamma\alpha}^A - \delta_{\alpha\epsilon} \eta_{\beta\gamma}^A \end{aligned}$$

などがある。 $\bar{\eta}$ が満たす同様の公式は

$$\eta^A_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \longrightarrow \bar{\eta}^A_{\alpha\beta}, -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

と置き換えればよい。また、 η と $\bar{\eta}$ の積の公式として

$$\eta^A_{\alpha\beta} \bar{\eta}^B_{\alpha\beta} = 0, \quad \eta^A_{\alpha\beta} \bar{\eta}^B_{\alpha\gamma} = \eta^A_{\alpha\gamma} \bar{\eta}^B_{\alpha\beta}$$

などがある。

B Eguchi-Hanson 解

(反) 自己双対な Riemann テンソルをもつ重力インスタントン解として Eguchi-Hanson 解がよく知られている。ここではその解について簡単にまとめておく。

この解は Weyl (反) 自己双対解の場合と違って、Riemann テンソルの (反) 自己双対条件を解くと簡単に求めることが出来る。まず、計量の形を

$$ds^2 = f^2(r)dr^2 + r^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + r^2g^2(r)\sigma_3^2$$

と仮定すると、4 脚場 1-形式は $e^0 = fdr$, $e^1 = r\sigma_1$, $e^2 = r\sigma_2$, $e^3 = rg\sigma_3$, スピン接続 1-形式は

$$\begin{aligned} \omega^{01} &= -\frac{1}{rf} e^1, & \omega^{02} &= -\frac{1}{rf} e^2, & \omega^{03} &= -\frac{1}{rfg} \left(g + r \frac{\partial g}{\partial r} \right) e^3, \\ \omega^{23} &= \frac{g}{r} e^1, & \omega^{31} &= \frac{g}{r} e^2, & \omega^{12} &= \left(\frac{2}{rg} - \frac{g}{r} \right) e^3 \end{aligned}$$

で与えられる。

Riemann テンソルが (反) 自己双対なときは (2.6) のようにスピン接続も (反) 自己双対になることが示せるので、ここでは反自己双対条件を選ぶと、

$$fg = 1, \quad \frac{1}{f} \left(g + r \frac{\partial g}{\partial r} \right) = 2 - g^2$$

が得られる。最初の式を使って第 2 式から f を消去すると

$$r \frac{\partial g^2}{\partial r} = 4(1 - g^2)$$

が得られるので、これを解くと $a (> 0)$ を積分定数とすると $g^2 = 1 - a^4/r^4$ が得られる。ここで、 g^2 の解として $1 + a^4/r^4$ を考えることもできるが、それ

は $r = 0$ で特異点になる。それに対して前者の負号の解は以下で示すように $r \geq a$ とすれば特異点を取り除くことが出来る。このようにして反自己双対な Eguchi-Hanson 計量が

$$ds_{\text{EH}}^2 = \frac{1}{1 - \frac{a^4}{r^4}} dr^2 + r^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + r^2 \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) \sigma_3^2$$

と求まる。自己双対な解は $g \rightarrow -g$ とすれば求まる。これは向き付けを変更したことに相当する。この空間の曲率 2-形式は

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{01} = -\mathcal{R}_{23} &= \frac{2a^4}{r^6} (-e^0 \wedge e^1 + e^2 \wedge e^3), \\ \mathcal{R}_{02} = -\mathcal{R}_{31} &= \frac{2a^4}{r^6} (-e^0 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^1), \\ \mathcal{R}_{03} = -\mathcal{R}_{12} &= \frac{4a^4}{r^6} (e^0 \wedge e^3 - e^1 \wedge e^2) \end{aligned}$$

で与えられる。

ここで $r = a$ に現れる錐状特異点 (conical singularity) を取り除くことを考える。いま空間は $r \geq a$ としているので、 $r = a$ の近傍について調べる。変数を $u^2 = r^2(1 - a^4/r^4)$ と変換すると、 $dr = [\sqrt{1 - a^4/r^4}/(1 + a^4/r^4)] du$ が得られるので、計量は

$$ds_{\text{EH}}^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)^2} du^2 + u^2 \sigma_3^2 + r^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

と書くことが出来る。ここで $u \rightarrow 0$ ($r \rightarrow a$) の極限を取ると

$$ds_{\text{EH}}^2 \rightarrow \frac{1}{4} du^2 + \frac{1}{4} u^2 (d\psi + \cos \theta d\varphi)^2 + \frac{a^2}{4} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

となる。 S^2 の座標 θ と φ を固定した 2 次元面を考えると、 $u = 0$ 近傍の計量は

$$\frac{1}{4} (du^2 + u^2 d\psi^2)$$

と表される。これが平面 \mathbb{R}^2 の計量と同定できるなら、錐状特異点が無いことになる。 \mathbb{R}^2 の計量は $\rho \geq 0, 0 \leq \omega \leq 2\pi$ として $d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$ で与えられることから、 $u = 2\rho$ と思えば、 ψ の領域を

$$0 \leq \psi \leq 2\pi$$

と制限すれば錐状特異点を取り除けることが分かる。このとき $r = a$ 近傍のトポロジーは $\mathbb{R}^2 \times S^2$ になる。

次に $r \rightarrow \infty$ の振る舞いを見てみる。元々定義されていた領域 $0 \leq \psi \leq 4\pi$ で考えた場合は, $r \rightarrow \infty$ はトポロジーが S^3 の境界になる。それが半分に制限されていることから境界が $\mathbb{RP}^3 = S^3/Z_2$ になることが分かる。

C Minkowski 及び Euclid 時空でのフェルミオン

Minkowski 時空では場の Hermite 性が明白で, 分散関係も解くことができ, 正準量子化を行うことが出来る。一方, Euclid 時空では Hermite 性は不明瞭になり, 量子化は経路積分で行うことが前提になる。一般に, Euclid 時空のフェルミオンは Wick 回転したとき Feynman 振幅が正しく出るように定義する (Osterwalder-Schrader の方法)。

Minkowski 時空のフェルミオン 局所 Minkowski 計量 $\eta_{ab} = (-1, 1, 1, 1)$ を持つ曲がった時空上のフェルミオンを定義する。計量を不変に保つゲージ変換, 局所 Lorentz 変換, を $e'^a(x) = \Lambda^a_b(x)e^b(x)$ と書くと, $\eta_{ab}\Lambda^a_c(x)\Lambda^b_d(x) = \eta_{cd}$ を満たす $SO(3, 1)$ Lorentz 群を構成する。この変換の下で接続 1-形式は $\omega'^a_b = \Lambda^a_c \omega^c_d (\Lambda^{-1})^d_b + \Lambda^a_c d(\Lambda^{-1})^c_b$ と変換する。曲率 2-形式は $\mathcal{R}'^a_b = \Lambda^a_c \mathcal{R}^c_d (\Lambda^{-1})^d_b$ と変換する。

$SO(3, 1)$ 群の生成子 Σ^{ab} が満たす代数を

$$[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}] = -\eta^{ac}\Sigma^{bd} + \eta^{ad}\Sigma^{bc} + \eta^{bc}\Sigma^{ad} - \eta^{bd}\Sigma^{ac}$$

と規格化する。ベクトルの脚に作用する生成子は $(\Sigma^{ab})_{cd} = \delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c$ で与えられる。 $SO(3, 1)$ 群の元は変数を $\varepsilon^{ab} (= -\varepsilon^{ba})$ と書くと

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\Sigma^{ab}\right)$$

で与えられる。

局所 Minkowski 時空での Clifford 代数を

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = -2\eta^{ab}I \tag{C.1}$$

と定義する。この Clifford 代数で構成される $Spin(1, 3)$ 群の元は

$$\Sigma^{ab} = -\frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \quad S(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\Sigma^{ab}\right) \tag{C.2}$$

で与えられる。

フェルミオン ψ 及びその共役場 $\bar{\psi}$ は $\psi' = \mathcal{S}\psi$ 及び $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathcal{S}^{-1}$ のように変換する場と定義する。ここでは, ガンマ行列の一つの表現として $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^{j\dagger} = -\gamma^j$ ($j = 1, 2, 3$), すなわち $\gamma^{a\dagger} = \gamma^0\gamma^a\gamma^0$ を満たすものを選ぶことにすると, この変換則を満たす $\bar{\psi}$ は $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ と書くことが出来る。実際, $\Sigma^{ab\dagger} = -\gamma^0\Sigma^{ab}\gamma^0$ 及び $(\gamma^0)^2 = I$ から

$$\gamma^0\mathcal{S}^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\left(I + \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\Sigma^{ab\dagger}\right)\gamma^0 = \left(I - \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\Sigma^{ab}\right) = \mathcal{S}^{-1}$$

が成り立つことを使うと,

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\mathcal{S}^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}\gamma^0\mathcal{S}^\dagger\gamma^0 = \bar{\psi}\mathcal{S}^{-1}$$

のように示せる。

これより, スカラー $\bar{\psi}\psi$ は

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}\psi = \bar{\psi}\psi, \quad (\bar{\psi}\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma^{0\dagger}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar{\psi}\psi$$

のように局所 Lorentz 不変な Hermite 関数であることが分かる。さらに $\nabla_a\psi$ の Hermite 性を見てみると

$$\begin{aligned} (\nabla_a\psi)^\dagger &= e_a^\mu\left(\partial_\mu\psi^\dagger - \frac{1}{2}\omega_{\mu cd}\psi^\dagger\gamma^0\Sigma^{cd}\gamma^0\right) \\ &= e_a^\mu\left(\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{2}\omega_{\mu cd}\bar{\psi}\Sigma^{cd}\right)\gamma^0 = \nabla_a\bar{\psi}\gamma^0 \end{aligned}$$

が得られるので

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^a\nabla_a\psi)^\dagger &= (\nabla_a\psi)^\dagger\gamma^{a\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi \\ &= \nabla_a\bar{\psi}\gamma^0(\gamma^0\gamma^a\gamma^0)\gamma^0\psi = \nabla_a\bar{\psi}\gamma^a\psi \end{aligned}$$

が成り立つ。また, 局所 Lorentz 不変性も $SO(3, 1)$ の

$$\mathcal{S}^{-1}\gamma^a\mathcal{S} = \Lambda^a_b\gamma^b$$

を使うと示せる。

局所 Minkowski 時空でのフェルミオンの作用は Hermite 関数なので, 微分項に i を加え, 一般座標不変になるように $\sqrt{-g}$ を加えて

$$I_\psi^M = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^a\nabla_a\psi - \nabla_a\bar{\psi}\gamma^a\psi) - m\bar{\psi}\psi\right\} \quad (\text{C.3})$$

で与えられる。

Euclid 時空上のフェルミオン Euclid 時空では場の Hermite 性が不明瞭になるので、局所 $SO(4)$ ゲージ変換の章で定義したように、フェルミオン ψ と $\bar{\psi}$ は変換則 (3.7) を満たす独立な場として扱う。

$Spin(4)$ 群を構成する Clifford 代数は時間成分の Wick 回転から自然に得られる (3.5) とし、ガンマ行列の Hermite 性も上で採用した Minkowski 空間の場合を Wick 回転して自然に得られる $\gamma^{a\dagger} = -\gamma^a$ とする。

作用関数は局所 $SO(4)$ ゲージ変換及び一般座標変換の下で不変なるように決める。ただし、場の Hermite 性が分からないので質量項は Wick 回転したとき Feynman 伝播関数が正しく出るように決めると、Minkowski 空間での作用 (C.3) と同じ (3.9) で与えられる (脚注 11 を参照)。

このように定義すると、Minkowski 時空で導いた Feynman 振幅を Wick 回転したものが正しく得られる。この定義の仕方は Osterwalder と Schrader によって提案された²²。

D スピン 1/2 Dirac 指数 (Atiya-Singer index)

ここでは軸性カレントのダイバージェンスとスピン 1/2 Dirac 指数との関係及びその表式を求める。

背景ゲージ場と結合した質量ゼロのフェルミオン作用 $I_\psi = \int d^4x \sqrt{g} i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi$ を考える。共変微分は $D_\mu = \nabla_\mu + \mathcal{A}_\mu$ で与えられ、 $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^\Lambda T^\Lambda$ ($\mathcal{A}_\mu^\dagger = -\mathcal{A}_\mu$) である。例えば本文では $SU(2)$ の場合は $T^\Lambda = -i\lambda^\Lambda/2$, $U(1)$ の場合は x を電荷として $\mathcal{A}_\mu = -ixA_\mu/2$ である。ゲージ場の曲率 (場の強さ) の 2-形式は、 $\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu$ として、 $\Omega = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu/2$ で与えられる。

分配関数を $Z = \int d\psi d\bar{\psi} e^{-I_\psi}$ とかくと、軸性カレント $J_\mu^5 = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ の真空期待値は

$$\begin{aligned} \langle J_\mu^5(x) \rangle &= \frac{1}{Z} \int d\psi d\bar{\psi} e^{-I_\psi} i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) \\ &= -i\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5 H(x, x)] \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、固有値方程式 $i\gamma^\mu D_\mu\psi_n = E_n\psi_n$ を導入すると、Green

²²K. Osterwalder and R. Schrader, Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 1423; Helv. Phys. Acta **46** (1973) 277. この定義は Feynman 振幅を計算する上で極めて実用的であるが、場の自由度を 2 倍にしていることや、場を Wick 回転して定義されたものではないので、新たな定義が提案されている。P. Nieuwenhuizen and A. Waldron, Phys. Lett. B **389** (1996) 29 を参照。

関数 H は固有関数と固有値の逆数を用いて

$$H(x, x') = \sum_n \frac{1}{E_n} \psi_n(x) \bar{\psi}_n(x')$$

で与えられる。実際、演算子を作用させると $i\gamma^\mu D_\mu H(x, 0) = \sum_n \psi_n(x) \bar{\psi}(0) = \delta^4(x)/\sqrt{g}$ が成り立つ。

これより軸性カレントは

$$\langle J_\mu^5(x) \rangle = \sum_n \frac{1}{E_n} i\bar{\psi}_n(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n(x)$$

で与えられる。これより軸性カレントのダイバージェンスは固有値方程式 $i\gamma^a \nabla_a \psi_n = E_n \psi_n - i\mathcal{A}_a \gamma^a \psi_n$ 及びのその共役方程式 $i\nabla_a \bar{\psi}_n \gamma^a = -E_n \bar{\psi}_n + i\mathcal{A}_a \bar{\psi}_n \gamma^a$ より、

$$\begin{aligned} \nabla^a \langle J_a^5(x) \rangle &= \sum_n \frac{1}{E_n} i\nabla^a (\bar{\psi}_n \gamma_a \gamma_5 \psi_n) \\ &= \sum_n \frac{1}{E_n} (i\nabla^a \bar{\psi}_n \gamma_a \gamma_5 \psi_n - \bar{\psi}_n \gamma_5 i\gamma_a \nabla^a \psi_n) \\ &= -2 \sum_n \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n = 2 \text{Tr} \langle x | \gamma_5 | x \rangle \end{aligned}$$

となる。また、スピン 1/2 Dirac 指数は

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} = \int d^4x \sqrt{g} \sum_n \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n = - \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \langle x | \gamma_5 | x \rangle \quad (\text{D.1})$$

で定義される。ここで Tr は必要な諸々のトレースの総称である。

以下では γ_5 を含むトレースの部分

$$\text{Tr} \langle x | \gamma_5 | x \rangle = \lim_{s \rightarrow 0} \text{Tr} \langle x | \gamma_5 e^{-sK} | x \rangle \quad (\text{D.2})$$

のように正則化して計算する。ここで $K = (\gamma^\mu D_\mu)^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu$ は正定値の演算子で、 $\nabla_\mu \gamma_\nu = \gamma_\nu \nabla_\mu$ を使って式を変形している。

正則化の演算子 K を詳しく見てみると $\gamma^\mu \gamma^\nu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}/2 + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2 = -g^{\mu\nu} - 2\Sigma^{\mu\nu}$ より

$$\begin{aligned} K &= (-g^{\mu\nu} - 2\Sigma^{\mu\nu}) D_\mu D_\nu = -D^\mu D_\mu - \Sigma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] \\ &= D^\mu D_\mu - \Sigma^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} R_{\mu\nu ab} \Sigma^{ab} + \mathcal{F}_{\mu\nu} \right) \\ &= -D^\mu D_\mu + \frac{1}{4} R - \mathcal{F}_{ab} \Sigma^{ab} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

が得られる。最後の等式はガンマ行列の反対称積を $\gamma^{ab} = [\gamma^a, \gamma^b]/2!$ 及び $\gamma^{abcd} = (\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d + \text{anti-sym.})/4!$ とすると,

$$\gamma^{ab} \gamma^{cd} = \gamma^{abcd} + \delta^{ac} \gamma^{bd} - \delta^{ad} \gamma^{bc} - \delta^{bc} \gamma^{ad} + \delta^{bd} \gamma^{ac} - \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}$$

が成り立つことから, Riemann テンソルの巡回対称性等により $R_{abcd} \Sigma^{ab} \Sigma^{cd} = R_{abcd} \gamma^{ab} \gamma^{cd}/4 = -R/2$ となることを使っている。

ここで (D.2) を計算するために熱核 $G^{(s)}(x, y) = \langle x | e^{-sK} | y \rangle$ を導入する。これは初期条件 $\lim_{s \rightarrow 0} G^{(s)}(x, y) = \delta^4(x - y)/\sqrt{g}$ を満たす熱伝導方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + K \right) G^{(s)}(x, y) = 0$$

の解として与えられる。パラメータ s が小さいとき, 同一点の熱核は

$$G^{(s)}(x, x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{s^2} [1 + s a_1(x) + s^2 a_2(x) + \dots]$$

のように展開される。

まず初めに平坦時空に背景ゲージ場がある場合を考える。正則化の演算子を

$$K = -\partial^2 - V \quad (\text{D.4})$$

と分解すると, この場合は $V = \mathcal{F}_{ab} \Sigma^{ab} + \dots$ で与えられ, ドットはガンマ行列を含まないゲージ場の項である。平坦時空で上記の初期条件を満たす熱核は

$$G_0^{(s)}(x, y) = \langle x | e^{s\partial^2} | y \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2 s^2} e^{-(x-y)^2/4s} \quad (\text{D.5})$$

で与えられるので, これを使うと

$$\begin{aligned} G^{(s)}(x, x) &= G_0^{(s)}(x, x) \exp(s \mathcal{F}_{ab} \Sigma^{ab}) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \mathcal{F}_{ab} \Sigma^{ab} + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ab} \mathcal{F}_{cd} \Sigma^{ab} \Sigma^{cd} + \dots \right] \end{aligned}$$

が得られる。これに γ_5 を掛けてトレースを取ると, 通常ガンマ行列のトレースが $\text{Tr}(\gamma_5) = \text{Tr}(\gamma_5 \Sigma^{ab}) = 0$ を満たすことから $s \rightarrow 0$ で発散する項は消えて, さらに $\text{Tr}(\gamma_5 \Sigma^{ab} \Sigma^{cd}) = \epsilon^{abcd}$ より, (D.2) は有限な値

$$\lim_{s \rightarrow 0} \text{Tr}[\gamma_5 G^{(s)}(x, x)] = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{abcd} \text{Tr}(\mathcal{F}_{ab} \mathcal{F}_{cd}) \quad (\text{D.6})$$

になる。

次に, 曲がった時空上での (D.2) の計算を同様に行うために, 原点で局所平坦になる座標系を取ることにする, すなわち $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(0) = 0$ となるように選ぶ。

このとき演算子 (D.3) は (D.4) のように平坦空間の Laplace 演算子と原点での曲率を含むポテンシャル項に分解することができる。平坦時空で熱核 (D.5) を使うと、熱伝導方程式の解は積分方程式 $G = G_0 + G_0 V G$ で与えられる。これを逐次的に解くと、

$$\begin{aligned} G^{(s)}(0,0) &= G_0^{(s)}(0,0) + \int_0^s dt \int d^4x G_0^{(s-t)}(0,x) V(x) G_0^{(t)}(x,0) \\ &+ \int_0^s dt \int d^4x G_0^{(s-t)}(0,x) V(x) \int_0^t du \int d^4y G_0^{(t-u)}(x,y) V(y) G_0^{(u)}(y,0) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

のように解が得られる。

演算子 K を実際に原点の周りで展開してみる。原点での Riemann 曲率が定数であるとして計量場を展開すると

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} x^\lambda x^\sigma R_{\mu\lambda\nu\sigma}(0) + o(x^3), \\ \sqrt{g(x)} &= 1 - \frac{1}{6} x^\lambda x^\sigma R_{\lambda\sigma}(0) + o(x^3), \\ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) &= \frac{1}{3} x^\sigma [R_{\mu\sigma\nu}^\lambda(0) + R_{\nu\sigma\mu}^\lambda(0)] + o(x^2), \\ \omega_{\mu ab}(x) &= \frac{1}{2} x^\lambda R_{\lambda\mu ab}(0) + o(x^2) \end{aligned}$$

となる²³。以下では原点を表す (0) は省略する。この展開のもとで Laplace 演算子を求めると

$$\begin{aligned} \nabla^\mu \nabla_\mu &= g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \nabla_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} \nabla_\nu \right) \\ &= \partial^2 + \frac{1}{3} x^\lambda x^\sigma R_{\lambda\sigma}^\mu{}_\nu \partial_\mu \partial_\nu - \frac{2}{3} x^\lambda R_{\lambda}^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2} x^\lambda R_{\lambda}^\mu{}_{ab} \Sigma^{ab} \partial_\mu \\ &\quad - \frac{1}{6} x^\lambda x^\sigma R_{\lambda}^\mu R_{\sigma\mu ab} \Sigma^{ab} + \frac{1}{16} x^\lambda x^\sigma R_{\lambda\mu ab} R_{\sigma}^\mu{}_{cd} \Sigma^{ab} \Sigma^{cd} \quad (D.7) \end{aligned}$$

となる。これより演算子 K (D.3) は (D.4) のように分解出来て、 V の中で γ_5 を掛けてトレースを取った後で残る可能性のある Σ^{ab} を含んだ項だけを抜き出すと、 $V = V_1 + V_2$ として、

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} x^\lambda R_{\lambda\mu ab} \Sigma^{ab} \partial^\mu + \mathcal{F}_{ab} \Sigma^{ab}, \\ V_2 &= -\frac{1}{6} x^\lambda x^\sigma R_{\lambda}^\mu R_{\sigma\mu ab} \Sigma^{ab} + \frac{1}{16} x^\lambda x^\sigma R_{\lambda ab}^\mu R_{\mu\sigma cd} \Sigma^{ab} \Sigma^{cd} \end{aligned}$$

²³実際、1 列目の $g_{\mu\nu}(x)$ から $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$ が求められて、それを Riemann 曲率の定義式に代入すると、巡回対称性より、 $R_{\mu\sigma\nu}^\lambda(x) = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda(x) + o(x^2) = 2R_{\mu\sigma\nu}^\lambda(0)/3 - [R_{\nu\mu\sigma}^\lambda(0) + R_{\sigma\nu\mu}^\lambda(0)]/3 + o(x^2) = R_{\mu\sigma\nu}^\lambda(0) + o(x^2)$ が得られる。同様に、最後のスピンの接続の表式も (2.3) に代入すれば $R_{\mu\nu ab}(0) + o(x^2)$ が求まる。

となる。これより, $\text{Tr}[\gamma_5 G^{(s)}(0, 0)]$ を計算して, 残る可能性のある部分は

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\gamma_5 \int_0^s dt \int d^4 x G_0^{(s-t)}(0, x) V_2(x) G_0^{(t)}(x, 0) \right] \\ & + \text{Tr} \left[\gamma_5 \int_0^s dt \int d^4 x G_0^{(s-t)}(0, x) V_1(x) \int_0^t du \int d^4 y G_0^{(t-u)}(x, y) V_1(y) G_0^{(u)}(y, 0) \right] \end{aligned}$$

の 2 項である。ここでは x や y が小さいとして K を展開したけれども, s が無限小のときは, それらの積分の寄与は原点付近に集中するので, 積分領域が $(-\infty, \infty)$ であっても結果は変わらない。そのため積分公式 $\int d^4 x e^{-ax^2} = \pi^2/a^2$, $\int d^4 x x^2 e^{-ax^2} = 2\pi^2/a^3$, $\int d^4 x x^a e^{-ax^2} = 0$, $\int d^4 x x^a x^b e^{-ax^2} = \delta^{ab} \pi^2/2a^3$ を使って計算すればよい。先ず最初の項を計算すると, V_2 の中の Σ^{ab} の 1 次部分はガンマ行列のトレースを取ると消えて, 2 次部分から s に依存しない

$$\text{Tr}[\gamma_5 G^{(s)}(0, 0)] = \frac{1}{768\pi^2} \epsilon^{abcd} R_{\mu\nu ab} R^{\mu\nu}{}_{cd}$$

が得られる。第 2 項は, V_1 の重力部分は積分を実行すると $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu ab} = 0$ により消えて, ゲージ場部分だけが残り, (D.6) が得られる。原点の選び方は自由なので $x = 0$ を一般の x に戻すと, スピン 1/2 Dirac 指数 (D.1) が

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{768\pi^2} \int d^4 x \sqrt{g} \epsilon^{abcd} R_{\mu\nu ab} R^{\mu\nu}{}_{cd} - \frac{1}{32\pi^2} \int d^4 x \sqrt{g} \epsilon^{abcd} \text{Tr}(\mathcal{F}_{ab} \mathcal{F}_{cd}) \\ &= -\frac{1}{8} \tau - \frac{1}{8\pi^2} \int \text{Tr} \Omega \wedge \Omega \end{aligned}$$

で与えられることが分かる。ここで $\Omega = \mathcal{F}_{ab} e^a \wedge e^b/2$ である。

D.1 一般の偶数次元での表式

上記のように逐次解いていく方法は分かりやすいが, 次元が高くなるとややこしくなる。ここでは, さらに原点で Ricci 平坦な場合を考えて, 一般的に $2n$ 偶数次元での熱核を求めることにする。実際, 上の計算からも推測できるように, この手の計算では Ricci テンソルが寄与する項は Tr を取ると消える項として無視するのが一般的である。Laplace 演算子の展開式 (D.7) はそのまま $R_{\mu\nu} = 0$ として一般の次元でも使える。

熱伝導方程式を解くために, 解として

$$G^{(s)}(x, 0) = \exp\left(\frac{1}{2} P_{\mu\nu}(s) x^\mu x^\nu + Q(s)\right) \quad (\text{D.8})$$

の形を仮定する。ここで $P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}$ である。最終的に導きたい量は $x = 0$ で残る $Q(s)$ である。このとき熱伝導方程式の左辺は

$$\frac{\partial}{\partial s} G^{(s)}(x, 0) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial s} x^\mu x^\nu + \frac{\partial Q}{\partial s} \right) G^{(s)}(x, 0)$$

となる。一方、右辺の重力部分は $\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu ab} \Sigma^{ab}$ と書くと

$$\begin{aligned} -K G^{(s)}(x, 0) &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu G^{(s)}(x, 0) \\ &= \left[P^\mu_\mu + \left(P^\lambda_\mu P_{\lambda\nu} + \frac{1}{3} R^\lambda_{\mu\nu} P_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} \bar{R}^\lambda_\mu P_{\lambda\nu} - \frac{1}{16} \bar{R}^\lambda_\mu \bar{R}_{\lambda\nu} \right) x^\mu x^\nu \right] G^{(s)}(x, 0) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで脚 μ, ν についてのトレースを tr と書くと、 $\bar{R}_{\mu\nu}$ が反対称行列であることから $\text{tr}(\bar{R}P) = 0$ となること、及び Ricci テンソルをゼロにしていることに注意すると、方程式として

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \text{tr} P = \text{tr} P^2 - \frac{1}{16} \text{tr} \bar{R}^2, \quad \frac{\partial}{\partial s} Q = \text{tr} P$$

が求まる。第 1 式を解くと

$$P = -\frac{1}{4} \left(\bar{R} \coth \frac{\bar{R}s}{2} \right) = -\frac{1}{2s} I - \frac{1}{24} \bar{R}^2 s + \frac{1}{1440} \bar{R}^4 s^3 + \dots$$

のトレースが解であることが分かる。これを使って第 2 式を解くと

$$\begin{aligned} Q &= \text{tr} \left[-\frac{1}{2} \log \left(\sinh \frac{\bar{R}s}{2} \right) + C \right] \\ &= \text{tr} \left(C - \frac{1}{2} \log \frac{\bar{R}s}{2} - \frac{1}{48} \bar{R}^2 s^2 + \frac{1}{5760} \bar{R}^4 s^4 + o(s^6) \right) \end{aligned}$$

が得られる。第 1 式の解を (D.8) に代入して $s \rightarrow 0$ の極限を取ったときの初期条件が $\lim_{s \rightarrow 0} G^{(s)}(x, 0) = \exp(-x^2/2s)/(4\pi s)^n = \delta^{2n}(x)$ でなければならないことから、未定定数 C を決めるための条件は $\lim_{s \rightarrow 0} Q(s) = -\log(4\pi s)^n = \text{tr}[-\log(4\pi s I)/2]$ になる。ここで、 $-\log(\sinh(\bar{R}s/2))/2 = -\log(\bar{R}s/2)/2 + o(s^2)$ であることから、 $C = \log(\bar{R}/8\pi)/2$ が得られる。したがって、 $x = 0$ で熱核は $\exp(\text{tr} \log X) = \det X$ より

$$\begin{aligned} G^{(s)}(0, 0) &= e^{Q(s)} = \frac{1}{(4\pi s)^n} \sqrt{\det \frac{\bar{R}s/2}{\sinh \bar{R}s/2}} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{1}{s^n} \left(1 - \frac{s^2}{48} \text{tr} \bar{R}^2 + o(s^4) \right) \end{aligned}$$

が得られる。

Hermite 性 $\gamma_{2n+1}^\dagger = \gamma_{2n+1}$ と $\gamma_{2n+1}^2 = I$ を満たす $2n$ 次元のカイラリティのガンマ行列を

$$\gamma_{2n+1} = -i^n \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^{2n-1}$$

と定義すると、スピン 1/2 Dirac 指数は

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} &= -\lim_{s \rightarrow 0} \int d^{2n} x \sqrt{g} \operatorname{Tr} [\gamma_{2n+1} \exp(s\bar{\mathcal{F}}) G^{(s)}(x, x)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-1}{(4\pi s)^n} \int d^{2n} x \sqrt{g} \operatorname{Tr} \left[\gamma_{2n+1} \sqrt{\det \frac{\bar{R}s/2}{\sinh \bar{R}s/2}} \exp(s\bar{\mathcal{F}}) \right]\end{aligned}$$

で与えられる。ここではゲージ場の寄与 $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{ab} \Sigma^{ab}$ も加えている。トレースを実行すると $\Sigma^{ab} = -[\gamma^a, \gamma^b]/4$ 及び $\operatorname{Tr}(I) = 2^n$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\gamma_{2n+1} \Sigma^{a_1 b_1} \Sigma^{a_2 b_2} \dots \Sigma^{a_n b_n}) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{Tr}(\gamma_{2n+1} \gamma^{a_1} \gamma^{b_1} \gamma^{a_2} \gamma^{b_2} \dots \gamma^{a_n} \gamma^{b_n}) \\ &= -i^n \epsilon^{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n}\end{aligned}$$

のように Σ^{ab} が n 個存在する部分だけが残って、完全反対称テンソルが現れる。その際 s の依存性は相殺して消える。このことから、 $e^{a_1} \wedge e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{a_n} \wedge e^{b_n} = d^{2n} x \sqrt{g} \epsilon^{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n}$ に注意すると、 $-\operatorname{Tr} \gamma_{2n+1}$ を取る代わりに $\Sigma^{ab} \rightarrow e^a \wedge e^b$ と置き換えて $2n$ 次元体積積分を行えば良いことが分かる。さらに積分の後で残る係数 $(i/4\pi)^n$ を曲率に吸収させて

$$\bar{R}^\mu_\nu \rightarrow \frac{i}{4\pi} R^\mu_{\nu ab} e^a \wedge e^b = \frac{i}{2\pi} \mathcal{R}^\mu_\nu, \quad \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \frac{i}{4\pi} \mathcal{F}_{ab} e^a \wedge e^b = \frac{i}{2\pi} \Omega$$

のように被積分関数を曲率 2-形式 $\mathcal{R}^\mu_\nu = R^\mu_{\nu ab} e^a \wedge e^b/2$ と $\Omega = \mathcal{F}_{ab} e^a \wedge e^b/2$ に置き換えて得られる

$$\hat{A}(\mathcal{R}) = \sqrt{\det \frac{i\mathcal{R}/4\pi}{\sinh i\mathcal{R}/4\pi}}, \quad ch(\Omega) = \operatorname{Tr} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \Omega\right)$$

を用いると、スピン 1/2 Dirac 指数は

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} = \int_M \hat{A}(\mathcal{R}) \wedge ch(\Omega)$$

のように微分形式の積分の形に書ける。ここで M は境界の無い $2n$ 次元多様体を表す。 \hat{A} は A-ルーフ種数 (A-roof genus), $ch(\Omega)$ は Chern 指標と呼ばれているものである。 \hat{A} を展開すると

$$\hat{A} = 1 - \frac{1}{24} p_1 + \frac{1}{5760} (7p_1^2 - 4p_2) + \dots$$

のように Pontrjagin 類 p_n の多項式になる。4次元 ($n=2$) のときは体積積分をすると 2 番目の項のみが残って $\mathcal{I}_{1/2} = -P_1/24 = -\tau/8$ が得られる。ここで $P_1 = \int p_1$ は第 1Pontrjagin 数である。

E 参考書

T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hanson, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Phys. Rep. **66** (1980) 213

M. Green, J. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory Vol. 2* (Cambridge University Press, 1987)

M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (IOP Publishing, 1990); 中原幹夫「理論物理学のための幾何学とトポロジー I」(日本評論社 [原著第2版], 2018); 「理論物理学のための幾何学とトポロジー II」(ピアソンエデュケーション, 2001)

K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies* (Oxford Scientific Publications, 2004)

Yang-Mills インスタントン関係の参考書及び文献

S. Coleman, *The Use of Instanton in Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, 1985)

A. Polyakov, *Gauge Fields and Strings* (Harwood Academic Publishers, 1987)

A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz and Y. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of The Yang-Mills Equations*, Phys. Lett. **59B** (1975) 85

G. 't Hooft, *Computation of The Quantum Effects due to A Four-Dimensional Pseudoparticle*, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432

C. Callan, R. Dashen and D. Gross, *Toward A Theory of Strong Interactions*, Phys. Rev. D **17** (1978) 2717

C. Callan, R. Dashen and D. Gross, *A Theory of Hadronic Structure*, Phys. Rev. D **19** (1979) 1826

M. Shifman, A. Vainshtein and V. Zakharov, *Instanton Density in A Theory with Massless Quarks*, Nucl. Phys. **B163** (1980) 46

A. Vanishtein, V. Zakharov, V. Novikov and A. Shifman, *ABC of Instantons*, Sov. Phys. Usp. **25** (1982) 195