

# 量子重力と宇宙論

浜田賢二

高エネルギー加速器研究機構 (KEK)

素粒子原子核研究所

<http://research.kek.jp/people/hamada/>

## 要約

量子重力の目的は Planck スケールを越えた世界を記述することである。そこでは重力の量子的ゆらぎが大きく、距離の概念が失われたいわゆる背景時空独立な世界が実現していると考えられる。そのようなスケールの無い世界は共形不変な場の量子論で記述される。それは特定の時空を伝播する重力子の量子化ではなく、時空そのものの量子化を表す。本書で議論するくりこみ可能な量子重力はそのような共形場理論からのズレを摂動論として定式化した理論である。

展開の結合定数は漸近自由性を示す。それは Planck スケールを越えた高エネルギー領域で共形不変な世界が実現することを表している。一方で、その対称性の破れを表す新しい力学的スケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  の存在も示唆している。そのスケールを Planck 質量スケールよりも低い  $10^{17}\text{GeV}$  のオーダーとすると、これら二つの重力的スケールによって初期宇宙の進化は三つの時代に分けることができる。宇宙は共形不変な時空から始まり、Planck エネルギーで宇宙が指数的に膨張するインフレーションの時代に入る。力学的エネルギースケールまで下がると量子相関が失われて、時空が相転移を起こして、共形不変性が完全に壊れた現在の古典的な Friedmann 時空に移る。

本書の主な内容は、4次元量子重力の共形場理論としての定式化、共形代数による物理状態の構成、次元正則化によるくりこみ計算、量子重力に基づく宇宙モデルの構築、原始パワースペクトルの導出と CMB 異方性スペクトルの計算、WMAP 等の観測結果との照合及び検証、である。

平成 20 年 11 月初版

平成 21 年 09 月改定

# 目次

第1章	はじめに	7
第2章	量子重力の基本構造	11
2.1	くりこみ可能な量子重力の作用	12
2.2	量子化の方法論について	15
2.3	漸近自由性の意味	17
第3章	二次元量子重力	21
3.1	Liouville 作用とその量子化	21
3.2	Virasoro 代数と物理的状態	24
第4章	重力場の量子化	31
4.1	Riegert-Wess-Zumino 作用	31
4.2	一般座標不変性としての共形不変性	34
4.3	$R \times S^3$ 上での正準量子化	36
第5章	共形不変性と量子重力状態	47
5.1	4次元共形代数と共形変換	47
5.2	量子重力状態、スケーリング次元とユニタリ性	61
第6章	くりこみ理論	69
6.1	次元正則化と $D$ 次元量子重力作用	69
6.2	くりこみの処方箋と共形異常	73
6.3	伝播関数と相互作用	76

6.4	くりこみ定数の計算	79
6.5	一般座標不変な有効作用	89
6.6	宇宙項のくりこみ	93
<b>第7章</b>	<b>量子重力的宇宙論</b>	<b>97</b>
7.1	作用のまとめと用語	97
7.2	インフレーションと時空相転移	99
7.3	低エネルギー有効理論	104
<b>第8章</b>	<b>ゆらぎの時間発展</b>	<b>111</b>
8.1	線形摂動論	111
8.2	重力場の線形発展方程式	115
8.3	物質場を含む線形発展方程式	119
<b>第9章</b>	<b>CFT スペクトルから CMB 多重極まで</b>	<b>123</b>
9.1	重力場の2点相関関数と初期スペクトル	123
9.2	線形方程式の解と安定性	125
9.3	CMB 異方性スペクトル	130
<b>付録A</b>		<b>135</b>
A.1	曲率に関する公式	135
A.2	曲がった時空上のフェルミオン	137
<b>付録B</b>		<b>141</b>
B.1	$S^3$ 上のテンソル調和関数	141
B.2	$SU(2) \times SU(2)$ Clebsch-Gordan 係数	144
B.3	Clebsch-Gordan 係数及び Wigner $D$ 関数を含む公式	146
<b>付録C</b>		<b>149</b>
C.1	ゴースト場の共形変換の生成子	149

付録 D	151
D.1 次元正則化のための公式 . . . . .	151
付録 E	155
E.1 基本定数とパラメータ . . . . .	155
付録 F 著者文献	157



# 第1章 はじめに

2001年にNASA ケネディ宇宙センターより打ち上げられた天文衛星、Wilkinson マイクロ波異方性探査機 (Wilkinson Microwave Anisotropies Probe, WMAP) による宇宙マイクロ波背景放射 (cosmic microwave background, CMB) の観測によって宇宙論パラメータが高い精度で決定され、インフレーションの考えが正しいことが示された。一方、宇宙はなぜ膨張しているのか、インフレーションを誘起する斥力の源は何か、まだ多くの素朴で根源的な疑問が残されている。指数的膨張を意味するインフレーションを自然に解釈すれば、宇宙は誕生から現在までにおよそ  $10^{60}$  倍膨張したことになる。これは銀河団より大きなサイズがインフレーション以前では Planck 長さ内に納まっていたことを意味する。このことは WMAP が観測した CMB 異方性スペクトルの中に宇宙創生期の重力の量子的ゆらぎが記録されていることを示唆している。

このように、宇宙膨張、ビッグバン、原始ゆらぎ、それらの起源を重力の量子効果に求めることは自然なことである。量子重力は時空の誕生から現在に至るまでの宇宙の歴史を理解する上で必要な 21 世紀の物理学として期待される。本書の最終目的は共形不変な場の量子論からの摂動論として定式化された新しいくりこみ可能な重力の量子論を使って WMAP の結果を説明することである。最近の研究から、時空の相転移が  $10^{17}$  GeV で起きたと考えると多くの観測事実を簡潔に説明できることが分かってきた。

この章ではくりこみ可能な量子重力について本書で解説する内容を歴史も交えて簡潔にまとめることにする。Einstein 重力理論はその作用であるスカラー曲率が不定値なことや、結合定数である Newton 定数が次

元をもつためにくりこみ不可能であるなど量子論を構成する上で好ましくない性質を多くもっている。ただ、くりこみ理論自体は重力理論の基礎となる一般座標不変性と矛盾しているわけではない。1970年代の研究者は Einstein 重力に高階微分作用を加えて、正定値でくりこみ可能な理論を作ること考えた。しかしながら、すべての重力場モードを摂動的に扱う方法ではどうしても漸近場としてゲージ不変なゴースト粒子が現れることを防ぐことができなかった。

本書で議論するくりこみ可能な量子重力は一部に非摂動的な方法を取り入れることでこれらの問題を解決しようとする試みである。それは、特定の背景時空を伝播する粒子描像そもそもを捨ててしまうことである。

方法論としての大きな進歩は1980年代後半に成された。重力場の経路積分が厳密に実行され、共形場理論 (conformal field theory, CFT) として2次元量子重力理論が構成された。1970年代から1980年代にかけて研究された従来の量子重力理論との大きな違いは、経路積分測度からの寄与を正しく取り入れて、重力場の共形モードを非摂動的に取り扱ったことである。

この方法を4次元に応用して新しいくりこみ可能な量子重力理論が定式化された。距離を支配する共形モードは2次元量子重力のときと同様に非摂動的に量子化することで背景時空独立性の一部を共形不変性として実現した。一方、4次元では無視できない重力場のトレースレステンソルモードのダイナミクスは高階微分の Weyl 作用を加えて摂動的に定式化した。その結合定数が無次元になることから理論はくりこみ可能になる。

Einstein 重力を基礎とした従来の場の量子論は通常 Planck スケールを紫外カットオフとみなしている。そのため、特異点や紫外発散の問題を実質的に避けている。一方、この新しいくりこみ可能な量子重力は結合定数が漸近自由性を示すことから、非可換ゲージ場理論のように紫外カットオフは必要なく、Planck スケールを越えた世界を記述することができる。

漸近自由性は、量子色力学 (QCD) における  $\Lambda_{\text{QCD}}$  のように、新しい力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  が存在することを示唆している。これはくりこみ可能な理論の特徴でストリング理論のような明白に有限な理論に

は存在しないスケールである。また、有効作用が非局所的になることも特徴で、この点も局所的な有効理論を与える明白に有限な理論とは異なる。

エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  より十分に高いエネルギー領域ではトレースレステンソルモードの寄与が小さくなり、量子重力は共形モードのゆらぎが支配的な 4 次元共形場理論として記述される。このことはトレースレステンソルモードを摂動論的に扱うことを正当化するとともに、重力の量子論として次のような物理的意味をもつ：

- 一つは特異点の解消である。漸近自由性は高エネルギーで Riemann 曲率を含む Weyl 曲率テンソルが消えることを意味する。そのため、特異点のような曲率が発散する時空間配置は量子論的に排除される。共形不変性の実現からも、特異点のような特別な点の存在は否定される。また、情報喪失パラドクスのような非摂動的なユニタリ性の問題を議論することが可能になる。
- もう一つは力学的エネルギースケールの存在によって示唆される時空間の相転移である。重力場の量子相関がそのスケールで急激に短距離になりコヒーレンスを失って、量子的な時空間から古典的な現在の時空間に移行すると考えることができる。

これらの優れた性質をもとに量子重力のダイナミクスのみを用いて宇宙進化のモデルを作ることができる。理論に固有な三つの重力的スケールの大小を Planck 質量、漸近自由性に由来する力学的スケール、宇宙項の順に選ぶと、現在までの宇宙の重力的な進化はこれらのスケールによって区切られた四つの時代に分けることができる。Planck スケールを越えた領域は共形モードの量子ゆらぎが優勢な共形不変な時空間の時代である。共形不変性が Planck スケールで破れ始め第二のインフレーション時代に移り、力学的スケールで長距離の相関が失われて第三の古典的な Friedmann 時空間に相転移する。そして現在は宇宙項の寄与が無視できない第四の de Sitter 時空間の時代と考えることができる。

量子重力に基づく初期宇宙論の優れた点は、通常用いられるスカラー (inflaton) 場のような未知な自由度を導入することなく、重力場のダイナ

ミクスだけでインフレーションを誘起させることが出来ることである。また、Friedmann 時空に転移する際に高階微分重力場作用に含まれる余分な自由度が物質に転化することでビックバンを説明することができる。さらに、構造形成のために必要な原始ゆらぎの起源は共形場理論から予言されるスケール不変なスペクトルとして与えられる。このように既知の場である重力場のみを用いて、最小限の自由度でもって観測と良く合う宇宙の発展モデルを構築することができる。

本書の内容は付録 F の著作をまとめたものである。

## 第2章 量子重力の基本構造

量子重力の作用を決めるために、次の三つの基本条件を課す:

- 一般座標不変性/背景時空独立性
- 有限性
- 4次元時空

最初に挙げた一般座標不変性は Einstein 重力理論の基本原理の一つであり、この対称性が量子論でも成り立つと考える。重力の量子論は計量場の経路積分として定義されるので、一般座標不変性は厳密には背景時空独立性として表される。

物理的に意味のある量は有限でなければならない。二番目の条件は量子重力ではくりこみ可能性のことを指すとともに、時空に特異点が存在しないことも意味している。また、いくつかの高次元時空のモデルが提案されているが、4次元時空は知られている量子場のくりこみ可能性を保障する次元であり、観測からも余剰次元の存在を示唆する事実もないことから、時空は4次元とする<sup>1</sup>。

この章の目的は量子重力の作用を定義して、その基本的な構造について大まかに説明することである。この章を読んだ後、第7章の量子重力的宇宙論に進むこともできる。

---

<sup>1</sup>最近の実験によって Einstein 理論に宇宙項を加える必要があることが確かめられた。これは、ニュートリノの質量と同様に、対称性によって否定されない項は存在することを示唆している。量子重力の作用を決めるに当たって、上記の三つの条件から排除されない項はすべて考えることにする。

## 2.1 くりこみ可能な量子重力の作用

量子重力は一般座標不変な無次元の作用  $I$  による重み  $e^{iI}$  を計量場について経路積分することで定義される。本書で議論するくりこみ可能な重力の量子論は

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - bG_4 + \frac{1}{\hbar} \left( \frac{1}{16\pi G} R - \Lambda + \mathcal{L}_M \right) \right\} \quad (2.1.1)$$

で定義される。定数  $G$  と  $\Lambda$  はそれぞれ Newton 定数と宇宙項を表す。 $\hbar$  は換算 Planck 定数で、光速  $c$  は 1 としている。最初の二項は量子重力のダイナミクスを決める共形不変な作用である。以下で述べるように、 $R^2$  項がないことがこの理論の本質である。

最初の項を決める Weyl 曲率テンソル  $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$  は 4 次元では

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda\sigma} - g_{\mu[\lambda} R_{\sigma]\nu} + g_{\nu[\lambda} R_{\sigma]\mu} + \frac{1}{3} g_{\mu[\lambda} g_{\sigma]\nu} R \quad (2.1.2)$$

と定義される。ここで、反対称積は  $a_{[\mu} b_{\nu]} = (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)/2$  と規格化している。作用の中の Weyl テンソルの 2 乗は

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{3} R^2 \quad (2.1.3)$$

と書ける。Weyl テンソルは重力場のトレースレステンソルモードの場の強さを表す量で、その結合定数  $t$  は無次元である。

共形不変な作用を与えるもう一つの組み合わせは Euler 密度で、

$$G_4 = R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2 \quad (2.1.4)$$

と定義される。この作用の前の係数  $b$  は Euler 密度に比例した発散を取り除くために導入された定数である。あとで述べるように Euler 項は運動項を含まないことから、この定数は独立な結合定数ではなく他の結合定数を用いて展開される。

重力場は、ゲージ場などとは異なり、無次元の場である。重力場の 4 階微分作用は 4 次元では完全に無次元な量になる。そのため、 $\hbar$  は Einstein 項など二階微分以下の作用の前にのみ現れ、4 階微分重力作用の前には現

れない。このことは、量子重力のダイナミクスを考える上で本質的で、4階微分重力場作用が純粋に量子論的なダイナミクスを記述することを表している。

物質場の作用密度は、

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \left( \partial^\mu X \partial_\mu X + \frac{1}{6} R X^2 \right) - \frac{1}{4} \text{Tr} \left( F_{\mu\nu}^2 \right) + \dots \quad (2.1.5)$$

で与えられる。スカラー場  $X$  の作用については重力場が存在する場合のくりこみ可能性から微分を含む運動項が共形不変なものを考える。質量項はくりこみ可能性を壊さないが、量子重力が有効な領域では無視してよいのでここでは考えない。

一般座標不変性は反変ベクトル (contravariant vector)  $\xi^\mu$  を用いて

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \xi^\lambda \quad (2.1.6)$$

と定義される。このとき、スカラー場  $X$  及び共変ベクトル (covariant vector) で定義されるゲージ場  $A_\mu$  は<sup>2</sup>

$$\delta_\xi X = \xi^\lambda \nabla_\lambda X, \quad (2.1.7)$$

$$\delta_\xi A_\mu = \xi^\lambda \nabla_\lambda A_\mu + A_\lambda \nabla_\mu \xi^\lambda \quad (2.1.8)$$

と変換する。

結合定数  $t$  が無次元になることから、この量子重力はくりこみ理論に必要な条件を満たしている。ただ、それだけではくりこみは保障されない。重力場のなかの共形モードを正しく扱う必要がある。通常は共形モードを扱うために運動項として共形不変でない  $R^2$  作用を導入するが、この作用には問題がある。歴史的には  $R^2$  作用を下にバウンドされた正しい符号<sup>3</sup>で加えると漸近自由性を示さないため、正しい摂動論が構成できない

<sup>2</sup>これらの変換は  $\delta_\xi X = \xi^\lambda \partial_\lambda X$  及び  $\delta_\xi A_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu + A_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda$  のように共変微分を普通の微分に置き換えたかたちで書き換えることができる。

<sup>3</sup>Euclid 計量で議論すると分かりやすい。重みが  $e^{-I}$  となり、正定値性は  $I > 0$  と表される。Weyl 作用は Euclid 計量では  $I = (1/t^2) \int \sqrt{g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$  となりこの条件を満たしている。

ことが指摘されている。しかし、ここでは  $R^2$  作用が経路積分可能条件を満たさないことからそもそも禁止されることをみる。

量子重力の有効作用を  $\Gamma$  とし、それに Weyl 変換  $\delta_\omega g_{\mu\nu} = 2\omega g_{\mu\nu}$  を施して得られる量を一般的に

$$\delta_\omega \Gamma = \int d^4x \sqrt{-g} \omega \left\{ \eta_1 R^2_{\mu\nu\lambda\sigma} + \eta_2 R^2_{\mu\nu} + \eta_3 R^2 + \eta_4 \nabla^2 R \right\} \quad (2.1.9)$$

と書くことにする。右辺の括弧内は共形異常 (conformal anomaly) と呼ばれ、紫外発散にともなって生じる量である。このことから右辺は紫外発散のくりこみ項 (counterterm)、すなわち裸の作用 (bare action) の形を指定している。有効作用が存在するための条件は

$$[\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}] \Gamma = 8(\eta_1 + \eta_2 + 3\eta_3) \times \int d^4x \sqrt{-g} R \omega_{[1} \nabla^2 \omega_{2]} = 0 \quad (2.1.10)$$

と表すことができる。この条件はいわゆる Wess-Zumino 積分可能条件 (Wess-Zumino consistency condition) の一種で、ここでは共形モードについての経路積分を厳密に実行することが可能であるための条件と考えることができる。これより、条件式  $\eta_1 + \eta_2 + 3\eta_3 = 0$  を満たす Weyl テンソルの自乗と Euler 密度の二つの組み合わせが裸の作用として許される。最後の  $\nabla^2 R$  も積分可能であるが作用としては自明である。また、ここでは右辺に現れる項として4階微分作用項のみを考えているが、Einstein 作用や宇宙項を加えて同様の議論をするとそれらは自明に積分可能になるので作用として加えることができる。

このように積分可能条件から4次元の量子重力の作用は決定される。それは共形モードについて経路積分が非摂動的に実行できるための条件であり、有効作用が存在するためのくりこみ可能な条件と考えることもできる。また、作用に  $R^2$  項が許されないことからこの項に比例した紫外発散は禁止される。それは共形モードがくりこみを受けないことを意味していて、共形モードを非摂動的に取り扱うことと合致している。

## 2.2 量子化の方法論について

作用  $I$  から分かるように Planck エネルギースケールを越えた領域では共形不変な 4 階微分作用が支配的になる。その領域で Weyl 作用の前に現れる結合定数  $t$  による展開を考える。それは  $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$  を満たす共形平坦 (conformal flat) な配置のまわりで摂動展開することを意味する。そこで共形因子をくくりだして重力場を

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (2.2.1)$$

のように分解する。このとき、共形モード  $\phi$  は、共形平坦の条件から何も制限を受けないので、結合定数を導入せずに非摂動的に取り扱う。一方、バー付きの計量  $\bar{g}_{\mu\nu}$  は  $tr(h) = h^\lambda{}_\lambda = 0$  の条件を満たすトレースレステンソルモードを用いて

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g} e^{th})_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\lambda} \left( \delta^\lambda{}_\nu + th^\lambda{}_\nu + \frac{t^2}{2} (h^2)^\lambda{}_\nu + \dots \right) \quad (2.2.2)$$

と展開する。背景場  $\hat{g}_{\mu\nu}$  は計算を遂行するために実用目的で導入された非力学的計量である。 $h^\mu{}_\nu$  の脚の上げ下げはこの背景計量を用いて行う。

この分解のもとで、一般座標変換は共形モードの変換とトレースレステンソルモードの変換に完全に分離して、それぞれ

$$\begin{aligned} \delta_\xi \phi &= \xi^\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda, \\ \delta_\xi \bar{g}_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\lambda} \bar{\nabla}_\nu \xi^\lambda + \bar{g}_{\nu\lambda} \bar{\nabla}_\mu \xi^\lambda - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

で与えられる。ここで、 $\bar{\nabla}_\lambda \xi^\lambda = \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda$  が成り立つことを使っている。さらに二番目の式の両辺をトレースレステンソルモードについて展開すると変換則

$$\begin{aligned} \delta_\xi h_{\mu\nu} &= \frac{1}{t} \left( \hat{\nabla}_\mu \xi_\nu + \hat{\nabla}_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \right) \\ &+ \xi^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} (\hat{\nabla}_\nu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\nu) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} (\hat{\nabla}_\mu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\mu) \\ &+ o(t\xi h^2) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

を得る。このとき座標変換の共変ベクトル (covariant vector) は背景計量を用いて  $\xi_\mu = \hat{g}_{\mu\nu}\xi^\nu$  と定義される。

はじめに、トレースレステンソルモードの性質について述べることにする。結合定数  $t$  のベータ関数  $\beta_t = -\beta_0 t_r^3$  を計算すると

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{240} (N_X + 3N_W + 12N_A) + \frac{197}{60} \right\} \quad (2.2.5)$$

となって  $\beta_t < 0$  になることが分かる。このことは、トレースレステンソルモードが漸近自由性を示すことを意味しており、紫外極限で  $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$  を満たす共形平坦な時空のまわりで摂動展開することを正当化している。また、量子色力学 (QCD) との類似から分かるように、新たな力学的スケールの存在を示唆している。そのスケールを  $\Lambda_{\text{QG}}$  とするとランニング結合定数は

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)} \quad (2.2.6)$$

と書ける。ここで、 $p$  は物理的運動量である<sup>4</sup>。

漸近自由性は時空の特異点が排除されることを意味する。なぜなら、短距離になると Riemann 曲率を含む Weyl 曲率テンソルがゼロになることを意味しているので、Schwarzschild 解のような Riemann 曲率が発散する時空は量子論的に排除される。

この漸近自由性は自由場の存在を意味するものでないことに注意しなければならない。トレースレステンソルモードのゆらぎは小さくなるが、距離を支配する共形モードのゆらぎは大きく非摂動的なままである。それは共形不変な時空が高エネルギー領域で実現することを表している。第3、4、5章で詳しく述べるように、この共形不変性は理論が背景計量  $\hat{g}_{\mu\nu}$  の選び方によらないことを意味する背景時空独立性を実現したもので、量子論的な一般座標不変性と同等である<sup>5</sup>。

このような共形モードのダイナミクスは経路積分測度から誘導される。一般座標不変な  $g_{\mu\nu}$  の測度を非力学的な背景時空  $\hat{g}_{\mu\nu}$  上で定義された実用

<sup>4</sup>物理的の詳しい意味は第六章の有効作用の節で述べる。

<sup>5</sup>トレースレステンソルモードは摂動的に扱っているのでこのモードについては背景時空独立とはいえないが、それが重要でないことは漸近自由性によって保障される

的な測度に書き換える際に、一般座標不変性を保障するヤコビアンとして共形モードの運動項や相互作用項が現れる。このため、経路積分は

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{[dg dAdX]_g}{\text{Vol}(\text{diff.})} \exp\{iI(A, X, g)\} \\ &= \int \frac{[d\phi dh dAdX]_{\bar{g}}}{\text{Vol}(\text{diff.})} \exp\{iS(\phi, \bar{g}) + iI(A, X, g)\} \quad (2.2.7) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。作用  $S$  が測度から誘導された Wess-Zumino 作用と呼ばれる量で、共形異常を積分して得られる量である。結合定数  $t$  のゼロ次から現れてそれが共形モードの運動項になる。この最低次の作用のことを特に Riegert 作用と呼ぶ。Wess-Zumino 作用の具体的な形及びその非摂動的な取り扱いについては第 4 章と第 5 章で述べる。

量子重力に現れる共形異常は結合定数に依存する部分と依存しない部分に分けて考える必要がある。先にも述べたように、結合定数  $t$  によらない最低次の共形異常 (Riegert 作用) はむしろその名に反して共形不変性を保障するために現れる。一方、結合定数に依存した共形異常は通常の共形不変性の破れを表す量で、その係数はベータ関数で与えられる。このように、 $t$  の高次の摂動項は  $t = 0$  で与えられる共形場理論からのズレの度合いを表している。

最後に注意すべき点として、量子重力あるいは重力と結合した量子場理論には必ず共形異常が現れるが、第 6 章で議論するように、これは一般座標不変性を保障するために必要な項であって、ゲージ理論に於ける「量子異常」とは区別して考えなければならない。<sup>6</sup>

## 2.3 漸近自由性の意味

すでに述べたように、漸近自由性が示唆することをまとめると

- 特異点の解消

---

<sup>6</sup>また、Adler-Bardeen 定理のような 1 ループ計算が厳密になるという定理も共形異常には存在しない。

- 共形不変な時空の実現
- 時空の相転移

の三点になる。ここでは、その物理的な意義についてさらに考察する。

最後の項目は力学的エネルギースケールの存在によって示唆される。初期宇宙の時間発展は共形不変性が破れていく過程として表され、スケールのない世界からスケールのある世界への転移としてビッグバンを説明することが出来る。それについては第7章で詳しく述べる。

高階微分作用はユニタリ性にとって好ましくない負計量のモードを含んでいる。一方、そのモードが存在することで共形不変性が保障され、情報喪失パラドクスのような重力のユニタリ性問題の元凶である特異点を排除することができる。第5章で詳しく議論するように、Wheeler-DeWitt 拘束条件の実現である共形代数が量子論的に閉じた代数を成すためにはこのモードが必要である。

負計量のモードが寄与する世界は時空が大きくゆらいだ距離の概念の存在しない世界である。このような世界では粒子を定義するいわゆる漸近場が存在せず、伝統的な  $S$  行列はもはや物理量として適切ではない。これが QCD などの通常の漸近自由性とは異なる点である。量子重力の物理状態は共形代数によって決まる共形場 (conformal field) として与えられ、物理量はそれらの相関関数である。その際、共形変換によって正計量と不計量のモードが混じり合うため、物理状態として負計量のモードが単独で現れないことが示せる。

このことは重力場が無次元の場であることと関係している。量子効果で現れる Wess-Zumino 作用だけでなく、(2.1.1) 式で与えたように Weyl 作用や Euler 項も、4 階微分重力作用はすべて 4 次元では完全に無次元な量になる。古典極限  $\hbar \rightarrow 0$  で優勢になる作用は次元を持つ 2 階微分作用であって、4 階微分重力作用はすべて純粋に量子論的な量である。このことは、負計量のモードは仮想的な量子状態としてのみ存在して、古典極限では粒子として現れないことを示唆している。Minkowski 時空で定義される通常の漸近場を与えるためには共形不変性が破れて Einstein 作用

が優勢になるエネルギー領域まで下がらなければならない。

くりこみ理論として見たとき、このことは量子重力のループ補正が通常の  $\hbar$  展開とは異なっていることを示している。物質場のループは通常のループ展開に従うが、重力場のループは  $\hbar$  によらないためループの数と  $\hbar$  の次数は無関係になる。以下では  $\hbar = 1$  とする。

最後に、1970年代に研究された初期の高階微分量子重力モデルでなされたユニタリ性の議論との関係について述べる。結合定数が大きくなり、共形不変性が破れはじめる力学的エネルギー付近では、共形モードのゆらぎが小さくなって古典的な粒子描像が有効になってくると考えられる。そのとき、量子補正を含むトレースレステンソルモードの伝播関数は漸近自由性から

$$\frac{1}{p^2 M(p^2)}, \quad M(p^2) = M_P^2 + 4\beta_0 p^2 \log\left(\frac{p^2}{\Lambda_{\text{QG}}^2}\right) \quad (2.3.1)$$

のように振舞うことが分かる。ここで、 $M_P = 1/\sqrt{8\pi G}$  は換算 Planck 質量 (reduced Planck mass) である。実数の極  $1/p^2$  は正計量のモードでいわゆる重力子 (graviton) を表している。他方、負計量のモードに相当する  $1/M(p^2)$  は漸近自由性 ( $\beta_0 > 0$ ) の帰結として実数の極を持たないことから現実の世界に現れないことが分かる。このアイデアは Lee と Wick によって議論され、後に Tomboulis によって量子重力に適用された。

このアイデアはいまでも現実の世界との接点を考える際に有効である。ただ、当時は共形モードの運動項として  $R^2$  作用を導入して、共形モードも摂動的に扱っていたため、漸近自由性は QCD のときのように高エネルギー極限で Minkowski 時空が現れることを意味していた。そのため、結合定数が消える極限でゲージ不変な漸近場として負計量のモードが単独に現れることを排除することができなかった。一方、本書で議論する量子重力は一般座標不変性の一部として共形不変性をもち、それが正計量と負計量のモードを混ぜるために負計量が単独でゲージ不変にならないように定式化されている。



## 第3章 二次元量子重力

4次元量子重力の物理状態を記述する前に、演習問題として2次元量子重力について議論する。2次元量子重力には厳密解が存在してその性質が良く調べられている。例えば N. Seiberg, *Note on Quantum Liouville Theory and Quantum Gravity*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990) 319 を参照。

### 3.1 Liouville 作用とその量子化

重力場  $g_{\mu\nu}$  を (2.2.1) 式のように共形モード  $\phi$  とトレースレステンソルモード  $h^\mu_\nu$  に分解する。二次元ではダイナミクスがなく結合定数  $t$  は必要ないのでそれを 1 と置く。

トレースレステンソルモードの自由度が次元と同じ 2 なので、二つのゲージ自由度  $\xi^\mu$  を使って

$$h_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.1)$$

の共形ゲージ (conformal gauge) を取ることができる。このゲージのもとで計量場の経路積分を実行して得られる 2次元量子重力のことを、その作用の形からしばしば Liouville 量子重力と呼び、共形モード場  $\phi$  のことを Liouville 場と呼ぶ。この節ではこの理論について議論する。

共形ゲージでの 2次元量子重力の分配関数は

$$Z = \int [d\phi dbdcdf]_{\hat{g}} \exp \{iS_L(\phi, \hat{g}) + iI_M(f, g) + iI_{\text{gh}}(b, c, g)\} \quad (3.1.2)$$

で与えられる。ここで、 $f$  は共形不変な物質場で、 $I_M$  はその一般座標不変な作用を表す。 $S_L$  は Liouville 作用と呼ばれる共形異常に関係した Wess-

Zumino 作用で、一般座標不変な測度を実用的な背景時空中の測度書き換えた際に出てくるヤコビアンである<sup>1</sup>。

Liouville 作用は共形異常を共形モードについて積分して得られる。なぜなら、共形異常は有効作用を共形変換して定義される量(すなわちストレステンソルのトレース)なので、それを共形モードで積分することは逆変換して元の作用を求めることに相当する<sup>2</sup>。二次元では共形異常はスカラー曲率  $R$  に比例することから

$$\begin{aligned} S_L(\phi, \hat{g}) &= -\frac{b_L}{4\pi} \int d^2x \int_0^\phi d\phi \sqrt{-g} R \\ &= -\frac{b_L}{4\pi} \int d^2x \sqrt{-\hat{g}} (\phi \hat{\Delta}_2 \phi + \hat{R}\phi) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

となる。ここで、 $\Delta_2 = -\nabla^2$  は二次元で共形不変な微分作用素である。二番目の等式は

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-\hat{g}}(2\hat{\Delta}_2\phi + \hat{R}) \quad (3.1.4)$$

を使うとすぐに導くことができる。定義によりこの作用を共形変換すると共形異常  $(-b_L/4\pi)\delta\phi R$  が出てくる。

$I_{\text{gh}}$  はゲージ固定に伴う共形不変な  $bc$  ゴースト作用である。共形ゲージ固定 (3.1.1) での 2次元トレースレステンソルモードの変換規則は

$$\delta_\xi h_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\mu \xi_\nu + \hat{\nabla}_\nu \xi_\mu - \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}^\lambda \xi_\lambda \quad (3.1.5)$$

で与えられる。これより、通常のゲージ固定の処方箋に従ってゲージ変数  $\xi^\mu$  をゴースト  $c^\mu$  に置き換え、反ゴースト場  $b_{\mu\nu}$  を導入すると、ゴーストの作用

$$I_{\text{gh}} = \int d^2x \sqrt{-\hat{g}} b^{\mu\nu} \delta_c h_{\mu\nu} = \int d^2x \sqrt{-\hat{g}} b^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu c_\nu \quad (3.1.6)$$

が得られる。ここで、反ゴーストは自由度が 2 になる対称トレースレス場である。

<sup>1</sup>正確には Liouville 作用は宇宙項である Liouville ポテンシャル項を含む。

<sup>2</sup>一般座標不変な有効作用と Liouville 作用は共形モードに依存しない非局所項だけ異なる。有効作用は Polyakov 作用として知られている。

共形異常の係数は物質場の Virasoro 代数の中心電荷 (central charge) を  $c_M$  として

$$b_L = -\frac{c_M - 25}{6} \quad (3.1.7)$$

と計算される。 $c_M$  は大雑把にいて物質の自由度を表すパラメータで、スカラー場だと  $c_M = 1$  になる。 $c_M < 1$  は Ising 模型 ( $c_M = 1/2$ ) のような各点での自由度が有限に制限された物質場を考えることに相当する。その他の場の  $b_L$  への寄与の内訳は分子の  $-25$  の内  $-26$  が  $bc$  ゴースト場からの寄与で  $1$  が Liouville 場  $\phi$  からの寄与である。以下では物質場が  $c_M \leq 1$  の共形場理論 (CFT) として書ける場合を考える。このとき、 $b_L$  は正の量である。

Liouville 作用の定義式で積分領域を  $(0, \omega)$  と  $(\omega, \phi)$  に分割するとすぐ分かるように、この作用は Wess-Zumino 条件

$$S_L(\phi, \hat{g}) = S_L(\phi - \omega, e^{2\omega} \hat{g}) + S_L(\omega, \hat{g}) \quad (3.1.8)$$

をみることが分かる。この式を使って分配関数が背景時空  $\hat{g}_{\mu\nu}$  の Weyl 変換のもとで不変であることを

$$\begin{aligned} Z(e^{2\omega} \hat{g}) &= \int [d\phi dbdcdf]_{e^{2\omega} \hat{g}} \exp \{ iS_L(\phi, e^{2\omega} \hat{g}) + iI_M + iI_{gh} \} \\ &= \int [d\phi dbdcdf]_{\hat{g}} \exp \{ iS_L(\omega, \hat{g}) \} \exp \{ iS_L(\phi, e^{2\omega} \hat{g}) + iI_M + iI_{gh} \} \\ &= \int [d\phi dbdcdf]_{\hat{g}} \exp \{ iS_L(\omega, \hat{g}) + iS_L(\phi - \omega, e^{2\omega} \hat{g}) + iI_M + iI_{gh} \} \\ &= Z(\hat{g}) \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

のように示すことができる。最初の等式では物質場とゴーストの作用が共形不変であることを使っている。測度の中の  $\omega$  依存をヤコビアンとして Liouville 作用で書き換えると二番目の等式が得られる。三番目の等式は共形モード場を  $\phi \rightarrow \phi - \omega$  と変換することで得られる。その際、背景時空上で定義された測度  $[d\phi]_{\hat{g}}$  はこのシフト変換に対して不変であることに注意しなければならない。最後の等式は Wess-Zumino 関係式 (3.1.8) を使うことで得られる。

共形不変性を示す際に Liouville 場の測度が重要な役割を果たしたことから分かるように、この不変性は重力場を積分して得られる量子重力に固有のものであり、いわゆる背景時空独立性の実現である。

この2次元量子重力を正準量子化する。量子化は背景時空上の作用

$$I_{2\text{DQG}} = S_L + I_M + I_{\text{gh}} \quad (3.1.10)$$

を古典的な作用とみなして行われる。ここでは、各場を座標  $x^\mu = (\eta, \sigma)$ 、 $0 < \sigma < 2\pi$  で表される  $R \times S^1$  のシリンダー背景時空上で展開することにする。このとき、Liouville 場は

$$\phi(\eta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2b_L}} \left\{ \hat{q} + 2\eta\hat{p} + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{n} \left( \alpha_n^+ e^{-in(\eta+\sigma)} + \alpha_n^- e^{-in(\eta-\sigma)} \right) \right\} \quad (3.1.11)$$

と展開される。 $\phi$  が実数の場であることからエルミート共役は  $\alpha_n^{\pm\dagger} = \alpha_{-n}^\pm$  で与えられ、交換関係は

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i, \quad [\alpha_n^\pm, \alpha_m^\pm] = n\delta_{n+m,0}, \quad [\alpha_n^\pm, \alpha_m^\mp] = 0 \quad (3.1.12)$$

となる。

## 3.2 Virasoro 代数と物理的状态

共形ゲージ固定した後の残りのゲージ自由度 (residual gauge degrees of freedom) はトレースレスモードの変換性より、共形 Killing 方程式 (conformal Killing equation)

$$\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \zeta_\lambda = 0 \quad (3.2.1)$$

を満たす共形 Killing ベクトルで与えられる。すなわち、 $\xi = \zeta$  と置くと  $\delta_\zeta h_{\mu\nu} = 0$  となってゲージ条件が保存される。この残りのゲージ自由度  $\zeta^\mu$  を使って共形代数の生成子は

$$L_\zeta = \int_{S^1} d\sigma \zeta^\mu : \hat{T}_{\mu 0} : \quad (3.2.2)$$

と表される。ここで、記号  $:$  は正規順序付け (normal ordering) を表す。ストレステンソルは背景時空による作用の変分を用いて

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\delta I_{2\text{DQG}}}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}} \quad (3.2.3)$$

と定義され、トレースレスの条件  $\hat{T}^\lambda{}_\lambda = 0$  を満たしている。このとき、 $\hat{T}^\mu{}_\nu = \hat{g}_{\mu\lambda} \hat{g}_{\nu\sigma} \hat{T}^{\lambda\sigma}$  である。共形 Killing 方程式とストレステンソルの保存式を使うと生成子の時間微分はストレステンソルのトレースに比例してゼロなることから  $L_\zeta$  は保存する。

Liouville 作用のストレステンソルは

$$\hat{T}^\mu{}_\nu = \frac{b_L}{2\pi} \left\{ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi + (\eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial_\lambda - \partial_\mu \partial_\nu) \phi \right\} \quad (3.2.4)$$

で与えられる。最初の 2 項は通常の 2 次元スカラー場のストレステンソルである。最後の項は  $\hat{R}\phi$  項を変分することで得られる Liouville 理論に固有な項である。そのトレースは Liouville 場の運動方程式に比例してゼロになる。

二次元では共形 Killing ベクトルは無数個存在して、 $n$  を整数とすると  $\zeta^\mu$  は  $(e^{in(\eta+\sigma)}/2, e^{in(\eta+\sigma)}/2)$  と  $(e^{in(\eta-\sigma)}/2, -e^{in(\eta-\sigma)}/2)$  で与えられる。これを代入するといわゆる Virasoro 生成子

$$\begin{aligned} L_n^{\phi^\pm} &= e^{in\eta} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{\pm i\sigma} \frac{1}{2} : (\hat{T}_{00}^\phi \pm \hat{T}_{01}^\phi) : + \frac{b_L}{4} \delta_{n,0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} : \alpha_m^\pm \alpha_{n-m}^\pm : + i \sqrt{\frac{b_L}{2}} n \alpha_n^\pm + \frac{b_L}{4} \delta_{n,0} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

が得られる。ここで、 $\alpha_0^\pm = \hat{p}$  である。生成子は実数条件  $L_n^{\pm\dagger} = L_{-n}^\pm$  を満たす。Virasoro 生成子の最後の項  $(b_L/4)\delta_{n,0}$  は、以下で説明するように、座標の選び方、ここでは  $R \times S^1$ 、によって決まるカシミア (Casimir) 効果で、

$$H^\phi = L_0^{\phi+} + L_0^{\phi-} = \hat{p}^2 + \frac{b_L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \alpha_n^{+\dagger} \alpha_n^+ + \alpha_n^{-\dagger} \alpha_n^- \} \quad (3.2.6)$$

のようにハミルトニアンを  $b_L/2$  だけシフトさせる。このエネルギーシフトは共形代数が量子論的に閉じるために必要な項である。

シリンダー背景時空上では  $L_0^\pm$  は右巻き/左巻きの共形次元 (conformal weight) を数えるディラレーション (dilatation) 演算子に相当し、ハミルトニアン  $H = L_0^+ + L_0^-$  は左右の共形次元の和を数える演算子になる。

物質場とゴースト場の Virasoro 生成子  $L_n^{M\pm}$  と  $L_n^{\text{gh}\pm}$  を加えた Virasoro 生成子  $L_n^\pm$  は Virasoro 代数と呼ばれる共形代数

$$[L_n^\pm, L_m^\pm] = (n-m)L_{n+m}^\pm + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \quad (3.2.7)$$

及び  $[L_n^+, L_m^-] = 0$  を満たす。  $c$  は中心電荷 (central charge) と呼ばれる定数である。非ゼロならば共形不変性が破れている (量子異常がある) ことを表す。二次元量子重力ではすべての場からの寄与を足し合わせると

$$c = 1 + 6b_L + c_M - 26 = 0 \quad (3.2.8)$$

となって量子論的に共形不変になる。ここで、  $c_M$  と  $-26$  はそれぞれ物質場と  $bc$  ゴースト場からの寄与である。  $1 + 6b_L$  は Liouville 場からの寄与で、その内  $1$  は Liouville 場がスカラー的ボゾン場であることからくる。  $6b_L$  は Liouville 作用が共形不変でない  $\hat{R}\phi$  項をもつことに由来している。中心電荷が消える条件は一般座標不変性が量子論的に成り立つことを表している。

ここで先に述べたカシミア効果について説明することにする。一般にシリンダーの円周の長さを  $L$  とすると、中心電荷  $c$  の量子的カシミア効果はエネルギーシフト  $E_0 = -c\pi/6L$  を与える。物質場やゴースト場はそれぞれ  $c$  が  $c_M$  と  $-26$  のシフトを出す。Liouville 場は実スカラー場としての  $c = 1$  に相当するエネルギーシフトしか出さない。したがって量子的カシミア効果は  $E_0 = -(1 + c_M - 26)\pi/6L = \pi b_L/L$  となる。ここで、(3.2.8) 式を使った。  $L = 2\pi$  と置くと先のエネルギーシフト  $b_L/2$  を得る。このシフトは  $I_{2\text{DQG}}$  を古典的作用とみなしたとき、  $\hat{R}\phi$  項に由来した古典的カシミア効果が現れたと見ることができる。

次に二次元量子重力の物理状態について議論する。ここでは簡単のためゴースト場の寄与は積分されたものとして考えないことにして、以下では生成子を  $L_n^\pm = L_n^{\phi^\pm} + L_n^{M\pm}$  として議論する。このとき共形不変な真

空は  $n \geq -1$  の Virasoro 生成子に対して  $L_n^\pm |\Omega\rangle = 0$  を満たす状態として定義され、

$$|\Omega\rangle = e^{-b_L \phi_0} |0\rangle \quad (3.2.9)$$

で与えられる。ここで、 $|0\rangle$  は通常の Fock 真空で、すべての消滅演算子に対して消える状態である。 $\phi_0 = \hat{q}/\sqrt{2b_L}$  は共形モード場のゼロモードで、指数関数因子は Liouville 作用の背景電荷を表す  $\hat{R}\phi$  項に由来している。

背景電荷は Euclid 化した経路積分を考えると分かりやすい。ゼロモードに関係した部分だけを抜き出すと経路積分の重みは  $\exp(-b_L \chi \phi_0)$  となる。ここで、 $\chi$  は Euler 数である。物理状態のトポロジーは  $\chi = 1$  の円盤 (disk) で表されるので (二枚の円盤を張り合わせると内積になる)、何もない状態に  $e^{-b_L \phi_0}$  が現れることが分かる。

物理状態は共形不変な真空に生成演算子を作用させて、

$$|\text{phys}\rangle = \mathcal{O}(\alpha_n^{\pm\dagger}, \dots) |\Omega\rangle \quad (3.2.10)$$

のように構成される。演算子  $\mathcal{O}$  は物理状態条件

$$(H - 2)|\text{phys}\rangle = 0, \quad L_n^\pm |\text{phys}\rangle = 0 \quad (n \geq 1) \quad (3.2.11)$$

を満たすものと定義される。これは量子論的一般座標不変性を保障する Wheeler-DeWitt 拘束条件に他ならない。ここでは生成子の中のゴースト場の寄与は積分されたものと考えているので、ハミルトニアン条件の中に  $-2$  が現れる。この  $2$  は時空の次元で、これは演算子の時空積分  $\int d^2x \mathcal{O}$  が一般座標不変な関数になることを意味している<sup>3</sup>。

物理状態として、簡単のため、CFT として記述される物質場のプライマリー場 (primary field) が量子重力の補正を受ける場合を考える。左右の共形次元が同じ  $h$  を持つ実プライマリー場は物質場の Virasoro 生成子を用いて  $L_0^{M\pm} |h\rangle = h|h\rangle$  と  $L_n^{M\pm} |h\rangle = 0$  ( $n \geq 1$ ) と定義される。物質場の状態をプライマリー場の生成演算子を用いて  $|h\rangle = \Phi_h^\dagger |0\rangle$  と表すと、量子

<sup>3</sup>ゴースト場が非自明に寄与する二次元量子重力に固有な  $W_\infty$  対称性と関係する物理状態も存在するが、特殊な次元を持った状態なのでここでは議論しない。

重力補正を受けた物理状態 (gravitationally dressed state) は

$$e^{\gamma_h \phi_0} \Phi_h^\dagger |\Omega\rangle \quad (3.2.12)$$

で与えられる。ここで、 $\gamma_h$  はハミルトニアン条件によって決まる定数で、それは  $-(\gamma_h - b_L)^2/2b_L + b_L/2 + 2h = 2$  と表される。これより、

$$\gamma_h = b_L \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4 - 4h}{b_L}} \right) \quad (3.2.13)$$

を得る。ここで、二つある解の内、古典極限  $b_L \rightarrow \infty$  で正準値  $2 - 2h$  に近づく方を選んでいる。物質場を含まない恒等演算子 ( $h = 0$ ) の状態は宇宙項に相当する。各状態に対して共形場 (conformal field) が対応して、それを  $e^{\gamma_h \phi} \Phi_h(\eta, \sigma)$  と書くと、状態は極限  $\lim_{\eta \rightarrow i\infty} e^{-2i\eta} e^{\gamma_h \phi} \Phi_h(\eta, \sigma) |\Omega\rangle$  で与えられる。

量子重力の補正因子  $e^{\gamma_h \phi_0}$  は Liouville 場のゼロモード演算子  $\hat{p}$  の固有値  $p$  が虚数で与えられることを意味している。もしこのゼロモードが実数ならば  $\int d\phi_0 e^{ip\phi_0} e^{ip'\phi_0} = \delta(p + p')$  のようにデルタ関数規格化することが出来るが、量子重力の状態はこのように単純に規格化することができない。それは、対応する一般座標不変な演算子の2点相関関数が自由場表示では発散して規格化できないことを表している。相関関数を有限にするためには相互作用として宇宙項を加えて解かなければならない。

このようにまったくスケールのない世界では相関関数を定義することができない。ここで重要なことはスケール (ここでは宇宙定数) の依存性がべき的な振る舞い (power-law behavior) を示すことである。そして、それは宇宙定数の負のべきにもなることである。

相関関数を求めるのは大変であるが、二次元量子重力では解析接続の方法<sup>4</sup>や行列模型を用いた計算などがある。ここでは、スケール変換の下での演算子の振る舞いから、物理的な相関関数の振る舞いを規定する共形場のスケーリング次元 (scaling dimension) を計算することにする。ゼロモード  $\gamma_h$  をもつ共形場  $\mathcal{O}_h$  を考え、スケーリング次元を  $\Delta_h$  とすると、そ

<sup>4</sup>M. Goulian and M. Li, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2051.

の Weyl スケール変換は

$$d^2x\mathcal{O}_h \rightarrow \omega^{2-\Delta_h}d^2x\mathcal{O}_h \quad (3.2.14)$$

と表される。ここで、距離の基準となる時空の計量を表す宇宙項のスケールリング次元  $\Delta_0$  をゼロとすると、Weyl スケール変換は Liouville 場のゼロモードのシフト  $\phi_0 \rightarrow \phi_0 + (2/\gamma_0)\log\omega$  として表される。共形場  $\mathcal{O}_h$  はゼロモード因子  $e^{\gamma_h\phi_0}$  を持つことから、このシフト変換の下で  $d^2x\mathcal{O}_h \rightarrow \omega^{2\gamma_h/\gamma_0}d^2x\mathcal{O}_h$  と変換する。これより、共形次元  $2h$  の実プライマリー物質場が量子重力補正を受けたときのスケールリング次元は

$$\Delta_h = 2 - 2\frac{\gamma_h}{\gamma_0} \quad (3.2.15)$$

と求まる。共形場 ( $h > 0$ ) は 2 次元のスケールリング次元の正定値条件  $\Delta_h > 0$  を満たしている<sup>5</sup>。

---

<sup>5</sup>一般の次元  $D$  では  $\Delta_h > D/2 - 1$  である。



## 第4章 重力場の量子化

Planck 質量を越えたエネルギー領域では、重力場のなかの共形モードの量子的ゆらぎが大きくなって共形不変な時空が現れる。それは距離の概念が失われたいわゆる背景時空独立な世界の実現である。そのような時空は2次元のときと同様に非摂動的量子場理論の代表格である共形場理論として記述される。この章では Planck 質量が無視できる領域で4次元重力場の正準量子化を行う。続く第5章で共形不変性について詳しく議論する。

### 4.1 Riegert-Wess-Zumino 作用

4次元では共形異常が二通りあることから Wess-Zumino 作用にも二つの系列がある。Weyl 作用に関係するものと Euler 密度に関係するものである。前者はベータ関数と関係した作用で、くりこみを実行したときに現れる力学的スケールによる共形不変性の破れと関係している。この Wess-Zumino 作用は  $\phi^n \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$  ( $n \geq 1$ ) の形をしていて、結合定数  $t$  の2次から現れる。この作用については次のくりこみの章で議論する。

Euler 密度に関係する Wess-Zumino 作用は結合定数の最低次で現れ、共形モードのダイナミクスを記述する運動項を含んでいる。次章でより系統的な導出を行うが、ここでは2次元量子重力の類似からその作用を決める。

2次元では Euler 密度はスカラー曲率で与えられ、(3.1.4) 式を満たすことが知られている。対応する4次元の Euler 密度は、通常の Euler 密度に

全微分項を加えた

$$E_4 = G_4 - \frac{2}{3}\nabla^2 R \quad (4.1.1)$$

で与えられる。時空で積分すると通常の4次元 Euler 数に比例する。この拡張された Euler 密度  $E_4$  は2次元の関係式 (3.1.4) と類似した

$$\sqrt{-g}E_4 = \sqrt{-\bar{g}}(4\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4) \quad (4.1.2)$$

を満たす。ここで、 $\sqrt{-g}\Delta_4$  はスカラー場に対して共形不変な4階微分演算子で、

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^\mu R\nabla_\mu \quad (4.1.3)$$

で与えられる。この微分演算子は自己随伴 (self-adjoint) 条件

$$\int d^4x\sqrt{-g}A\Delta_4B = \int d^4x\sqrt{-g}(\Delta_4A)B \quad (4.1.4)$$

を満たす。

最低次での Wess-Zumino 作用は局所 Riegert 作用と呼ばれ、

$$\begin{aligned} S_R(\phi, \bar{g}) &= -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \int_0^\phi d\phi \sqrt{-g}E_4 \\ &= -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} (2\phi\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4\phi) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

で与えられる。共形モード場についての積分は関係式 (4.1.2) を用いると容易に実行することができる。また積分の定義から  $S_L$  と同じ Wess-Zumino 条件

$$S_R(\phi, \hat{g}) = S_R(\phi - \omega, e^{2\omega}\hat{g}) + S_R(\omega, \hat{g}) \quad (4.1.6)$$

を満たすことが分かる。

Riegert 作用の前の係数  $b_1$  は結合定数  $t$  によらない最低次の共形異常の値で、

$$b_1 = \frac{1}{360} \left( N_X + \frac{11}{2}N_W + 62N_A \right) + \frac{769}{180} \quad (4.1.7)$$

と計算されている。ここで、 $N_X$ 、 $N_W$ 、 $N_A$  はそれぞれ共形不変なスカラー場、Weyl フェルミオン、ゲージ場の数を表す。最後の定数は重力場

からの寄与で、内訳は  $87/20$  がトレースレステンソルモード、 $-7/90$  が共形モードからの量子効果を表す。

高次の量子補正では  $\phi^n \bar{\Delta}_4 \phi$  ( $n \geq 2$ ) の相互作用も誘導される。それについては、次のくりこみ理論の章で議論する。

以下では、結合定数  $t$  が消える極限のみを考える。2次元量子重力のときと同様に、実用的な背景時空  $\hat{g}_{\mu\nu}$  上で定義された4次元量子重力の作用

$$I_{4\text{DQG}} = S_{\text{R}}(\phi, \hat{g}) + I(X, A, g)|_{t \rightarrow 0} \quad (4.1.8)$$

の量子化を議論する。このとき作用  $I$  に含まれる Weyl 作用は、 $t^2$  で割って定義されていることから、 $h_{\mu\nu}$  の二次の運動項のみが残る。また、この極限では計量  $\bar{g}_{\mu\nu}$  は背景時空  $\hat{g}_{\mu\nu}$  となるので、トレースレステンソル場とその他の場との相互作用項は消える。また、この章では次元を持った Planck 質量や宇宙項、物質場の質量項などは無視して量子化する。

共形不変な物質場作用について 共形不変性をもつ物質場の作用は共形モード  $\phi$  によらない形に書き換えることができる。共形モード依存性を取り除くことで量子化が容易になる。ここでは、スカラー場とゲージ場について議論する。

重力場と共形不変に結合したスカラー場は場の再定義、 $X \rightarrow e^{-\phi} X$ 、を行うと作用から共形モード依存性を取り除くことができ、

$$I_X = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left( \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X + \frac{1}{6} \bar{R} X^2 \right) \quad (4.1.9)$$

と書くことができる。このとき、一般座標変換は共形モードの変化分を補うために

$$\delta_\xi X = \xi^\lambda \bar{\nabla}_\lambda X + \frac{1}{4} X \bar{\nabla}_\lambda \xi^\lambda = \xi^\lambda \partial_\lambda X + \frac{1}{4} X \hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \quad (4.1.10)$$

と変更される。

ゲージ場の作用は、共変ベクトルで定義されるゲージ場  $A_\mu$  を変更することなしに共形モード依存性を取り除くことができる。ここでは  $U(1)$

ゲージ場を考えることにすると、作用は

$$I_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \quad (4.1.11)$$

と書き換えることができる。ここで、場の強さは  $F_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\mu A_\nu - \bar{\nabla}_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  で与えられる。このとき一般座標変換は

$$\delta_\xi A_\mu = \xi^\lambda \bar{\nabla}_\lambda A_\mu + A_\lambda \bar{\nabla}_\mu \xi^\lambda = \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu + A_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda \quad (4.1.12)$$

となる。また、反変ベクトルゲージ場の変換は  $\delta_\xi \bar{g}^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} \delta_\xi \bar{g}_{\lambda\sigma}$  を用いて  $\delta_\xi A^\mu = \delta_\xi (\bar{g}^{\mu\nu} A_\nu)$  と表される。この章では物質場についてはこれらの作用と変換則を用いて一般座標不変性を議論する。

## 4.2 一般座標不変性としての共形不変性

結合定数が消える極限では理論が持つ一般座標不変性は二つの型に分けることができる。一つは Weyl 作用のゲージ変換である。ゲージ変数として  $\kappa^\mu = \xi^\mu/t$  を導入して  $\kappa^\mu$  を有限に保ちながら  $t \rightarrow 0$  の極限をとると、変換則 (2.2.4) よりトレースレステンソルモードの一般座標変換は、

$$\delta_\kappa h_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\mu \kappa_\nu + \hat{\nabla}_\nu \kappa_\mu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \kappa^\lambda \quad (4.2.1)$$

となる。一方で、共形モード場及び物質場は  $\kappa^\mu$  を用いると  $t$  のオーダーになるため、 $\delta_\kappa \phi = \delta_\kappa X = \delta_\kappa A_\mu = 0$  のように変換しない。

この変換は  $U(1)$  ゲージ場のゲージ変換

$$\delta_\lambda A_\mu = \hat{\nabla}_\mu \lambda \quad (4.2.2)$$

と類似している。以下の議論では、ゲージ自由度  $\kappa^\mu$  と  $\lambda$  はそれぞれ Weyl 作用とゲージ場の作用をゲージ固定するために使う。

結合定数が消える極限では、次のような特別な一般座標変換のもとで理論は不変になる。共形 Killing 方程式

$$\hat{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \hat{\nabla}_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda = 0 \quad (4.2.3)$$

を満たす共形 Killing ベクトル  $\zeta^\mu$  を導入してゲージ変数を  $\xi^\mu = \zeta^\mu$  と置くと、トレースレステンソルモードの変換は最低次の項が消えるため

$$\delta_\zeta h_{\mu\nu} = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} (\hat{\nabla}_\nu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\nu) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} (\hat{\nabla}_\mu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\mu) \quad (4.2.4)$$

となる。Weyl 作用の運動項はこのゲージ変換の下で不変になる。なぜなら、本来この変換項まで不変になるためには 3 次の相互作用項を考慮にいれる必要があるが、いま変換の最低次の項が存在しないため相殺する相互作用項からの寄与がなく、運動項はこの変換だけで不変になる。同様に、物質場の変換則は

$$\delta_\zeta X = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda X + \frac{1}{4} X \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \quad (4.2.5)$$

と

$$\delta_\zeta A_\mu = \zeta^\nu \hat{\nabla}_\nu A_\mu + A_\nu \hat{\nabla}_\mu \zeta^\nu \quad (4.2.6)$$

で与えられる。トレースレステンソルモードの変換の最低次の項が消えているので、このモードとの相互作用がなくても運動項単独で不変になる。ここで、背景時空は変化しないので、背景時空上の場の理論として見たときこの変換は共形変換とみなすことができる。

スカラー場の場合を例として具体的に不変性を見てみる。ここでは簡単な平坦背景時空  $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  を考えることにする。変数  $\zeta^\mu$  が共形 Killing 方程式を満たすことを用いると、スカラー場の作用は

$$\begin{aligned} \delta_\zeta I_X &= - \int d^4x \partial^\mu X \partial_\mu \left( \zeta^\lambda \partial_\lambda X + \frac{1}{4} \partial_\lambda \zeta^\lambda X \right) \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (3\partial_\eta \zeta_0 + \partial_i \zeta^i) \partial_\eta X \partial_\eta X + (\partial_\eta \zeta_i + \partial_i \zeta_0) \partial_\eta X \partial^i X \right. \\ &\quad \left. + \left[ -\partial_i \zeta_j + \frac{1}{4} \delta_{ij} (-\partial_\eta \zeta_0 + \partial_k \zeta^k) \right] \partial^i X \partial^j X + \frac{1}{8} (\partial_\sigma \partial^\sigma \partial_\lambda \zeta^\lambda) X^2 \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

のように不変になることが示せる<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>部分積分の公式  $\int Af \partial A = -\frac{1}{2} \int (\partial f) A^2$  を使うと良い。

共形モード場の変換は

$$\delta_\zeta \phi = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda \phi + \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \quad (4.2.8)$$

で与えられる。右辺のシフト項が  $\phi$  によらないことからこの変換はスカラー場の共形変換とは異なるものである。この変換の下で Riegert 作用は不変ではなく、

$$\delta_\zeta S_R = -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \hat{E}_4 \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda \quad (4.2.9)$$

と変換する。右辺は共形異常と同じ形をしている。その係数は量子化して出てくる共形異常とは逆符号になっていて、それらが相殺して理論は共形変換の下で不変になる。

このように、量子化することで共形不変性/一般座標不変性は厳密になる。量子重力の有効作用は古典作用  $I_{4\text{DQG}}$  に非局所的な量子補正項を加えることで明白に一般座標不変な計量  $g_{\mu\nu}$  を用いた形で書くことができる。これについては第4章の4.5節で詳しく述べることにする。

一般座標変換の一部であるゲージ変換  $\delta_\zeta$  は量子重力を背景時空  $\hat{g}_{\mu\nu}$  上の場の量子論として見たとき共形変換になっている。一方、この共形不変性は背景時空の Weyl スケール変換に対する不変性として見ることもできる。4次元でも2次元のときと同様、(3.1.9)のように Wess-Zumino 関係式 (4.1.6) を使って分配関数の Weyl 不変性を示すことができる。ここでの議論はその無限小変換の場合に相当する。

### 4.3 $R \times S^3$ 上での正準量子化

量子化を実行するために、背景計量場  $\hat{g}_{\mu\nu}$  を選ぶ必要がある。漸近自由性から結合定数  $t$  が消える極限では Weyl テンソルがゼロになる時空が選ばれることから背景時空は共形平坦でなければならない。

共形不変性により共形変換で移り変わることができる理論はすべて同等になる。ここでは共形平坦な背景時空として  $R \times S^3$  時空を採用する。このとき4階微分重力場のモード展開式が平坦な背景時空の場合と比べ

て簡単になり、正準量子化が容易になる<sup>2</sup>。また、 $S^3$  の回転群である等長変換 (isometry) 群  $SO(4)$  が  $SU(2) \times SU(2)$  で表されることから  $SU(2)$  の表現論を活用することができる。

背景時空  $R \times S^3$  の計量は  $S^3$  の半径を 1 として Euler 角  $x^i = (\alpha, \beta, \gamma)$  を用いると

$$\begin{aligned} d\hat{s}_{R \times S^3}^2 &= \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -d\eta^2 + \hat{\gamma}_{ij} dx^i dx^j \\ &= -d\eta^2 + \frac{1}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 + 2 \cos \beta d\alpha d\gamma) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

と表示される。このとき、曲率は  $\hat{R}_{0\mu\nu\lambda} = \hat{R}_{0\mu} = 0$ ,

$$\hat{R}_{ijkl} = (\hat{\gamma}_{ik}\hat{\gamma}_{jl} - \hat{\gamma}_{il}\hat{\gamma}_{jk}), \quad \hat{R}_{ij} = 2\hat{\gamma}_{ij}, \quad \hat{R} = 6 \quad (4.3.3)$$

及び  $\hat{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = \hat{G}_4 = 0$  となる。空間体積要素は

$$d\Omega_3 = d^3x \sqrt{\hat{\gamma}} = \frac{1}{8} \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma \quad (4.3.4)$$

で定義され、体積は

$$V_3 = \int d\Omega_3 = 2\pi^2 \quad (4.3.5)$$

で与えられる。

三次元球面上の調和関数 量子場は  $S^3$  上の調和関数を用いてモード展開される。 $n$  階の対称横波トレースレス (symmetric transverse traceless,  $ST^2$ ) テンソル調和関数は回転群  $SU(2) \times SU(2)$  の表現  $(J + \varepsilon_n, J - \varepsilon_n)$  を用いて分類され、それを  $Y_{J(M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n}$  と記述する。ここで、 $\varepsilon_n = \pm n/2$  は偏光を表す指数である。調和関数はラプラシアン固有関数で、固有値方程式

$$\square_3 Y_{J(M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n} = \{-2J(2J + 2) + n\} Y_{J(M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n} \quad (4.3.6)$$

<sup>2</sup>背景時空がミンコスキー時空  $M_4$  のとき 4 階微分共形モード場は時間に依存した係数が現れて、

$$\phi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2} |\mathbf{k}|^{3/2}} \left[ \{a(\mathbf{k}) + ib(\mathbf{k})\eta\} e^{ik_\mu x^\mu} + \text{h.c.} \right] \quad (4.3.1)$$

のように展開される。交換関係は非対角的な  $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{l})$ 、 $[a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = [b(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})] = |\mathbf{k}| \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{l})$ 、 $[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})] = 0$  で与えられる。

を満たす。ここで、 $\square_3 = \hat{\gamma}^{ij} \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j$  は  $S^3$  上のラプラシアンである。 $J (\geq n/2)$  は整数及び半整数で与えられ、 $M = (m, m')$  は各偏光についての表現の縮退度を表す指数で、

$$\begin{aligned} m &= -J - \varepsilon_n, -J - \varepsilon_n + 1, \dots, J + \varepsilon_n - 1, J + \varepsilon_n, \\ m' &= -J + \varepsilon_n, -J + \varepsilon_n + 1, \dots, J - \varepsilon_n - 1, J - \varepsilon_n \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

の値を取る。これより縮退度は  $n > 0$  の場合は偏光を考慮して  $2(2J + n + 1)(2J - n + 1)$  になる。 $n = 0$  のスカラー調和関数の場合は  $(2J + 1)^2$  で与えられる。

ST<sup>2</sup> テンソル調和関数の複素共役及び規格化は

$$\begin{aligned} Y_{J(M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n*} &= (-1)^n \epsilon_M Y_{J(-M\varepsilon_n)}^{i_1 \dots i_n}, \\ \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{J_1(M_1\varepsilon_n^1)}^{i_1 \dots i_n*} Y_{J_2(M_2\varepsilon_n^2)}^{i_1 \dots i_n} &= \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{\varepsilon_n^1 \varepsilon_n^2} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

で与えられる。ここで、二番目のクロネッカーデルタは  $\delta_{M_1 M_2} = \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2}$  である。符号因子は

$$\epsilon_M = (-1)^{m-m'} \quad (4.3.9)$$

と定義され、 $\epsilon_M^2 = 1$  を満たす。以下では階数  $n$  が4以下の調和関数に対して

$$y = \varepsilon_1 = \pm \frac{1}{2}, \quad x = \varepsilon_2 = \pm 1, \quad z = \varepsilon_3 = \pm \frac{3}{2}, \quad w = \varepsilon_4 = \pm 2 \quad (4.3.10)$$

という偏光指数を導入する。

スカラー場の正準量子化 スカラー場の作用は  $R \times S^3$  上で

$$I_X = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \frac{1}{2} X (-\partial_\eta^2 + \square_3 - 1) X \quad (4.3.11)$$

と書ける。作用の中で次元が不足して見える部分は  $S^3$  の半径を1に取ったことによる。

調和関数を使って  $X \propto e^{-i\omega\eta} Y_{JM}$  と展開すると、運動方程式から分散関係  $\omega^2 - (2J + 1)^2 = 0$  を得るので、スカラー場は

$$X = \sum_{J \geq 0} \sum_M \frac{1}{\sqrt{2(2J + 1)}} \left\{ \varphi_{JM} e^{-i(2J+1)\eta} Y_{JM} + \varphi_{JM}^\dagger e^{i(2J+1)\eta} Y_{JM}^* \right\} \quad (4.3.12)$$

とモード展開される。

量子化は通常の手続きに従って行うことができる。共役運動量は  $P_X = \partial_\eta X$  で与えられ、場の変数  $X$  との同時刻交換関係は

$$[X(\eta, \mathbf{x}), P_X(\eta, \mathbf{y})] = i\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3.13)$$

と設定される。ここで、 $S^3$  上のデルタ関数は完全系より

$$\begin{aligned} \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= 8\delta(\alpha_x - \alpha_y)\delta(\cos\beta_x - \cos\beta_y)\delta(\gamma_x - \gamma_y) \\ &= \sum_{J \geq 0} \sum_M Y_{JM}^*(\mathbf{x}) Y_{JM}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

と表すことができる。このとき、生成消滅演算子の交換関係は

$$[\varphi_{J_1 M_1}, \varphi_{J_2 M_2}^\dagger] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \quad (4.3.15)$$

で与えられる。

ハミルトニアン演算子は作用関数から

$$\begin{aligned} H^X &= \int_{S^3} d\Omega_3 : \left\{ \frac{1}{2} P_X^2 - \frac{1}{2} X (\square_3 - 1) X \right\} : \\ &= \sum_{J \geq 0} \sum_M (2J + 1) \varphi_{JM}^\dagger \varphi_{JM} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

と導かれる。ここで、 $:$  は正規順序付け (normal ordering) を表す。

ゲージ場の正準量子化 ゲージ場を量子化するためにゲージ固定をする必要がある。ここでは、ゲージ自由度  $\lambda$  (4.2.2) を使って横波ゲージ (Coulomb ゲージ)

$$\hat{\nabla}^i A_i = 0 \quad (4.3.17)$$

に固定して量子化を行う。このとき  $R \times S^3$  上の作用は

$$I_A = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ \frac{1}{2} A^i \left( -\partial_\eta^2 + \square_3 - 2 \right) A_i - \frac{1}{2} A_0 \square_3 A_0 \right\} \quad (4.3.18)$$

となる。ここで、ゲージ場の反変ベクトルは  $A^i = \hat{\gamma}^{ij} A_j$  と定義されている。

ゲージ場  $A_0$  の作用は時間微分を含まないので非力学的変数である。残りのゲージ自由度を使ってさらに

$$A_0 = 0 \quad (4.3.19)$$

のゲージを取る。二つの条件を満たすゲージのことを輻射ゲージと呼ぶ。

横波ゲージ場をベクトル調和関数を使って  $A^i \propto e^{-i\omega\eta} Y_{J(m_y)}^i$  と展開すると、スカラー場のときと同じ分散関係  $\omega^2 - (2J+1)^2 = 0$  を得る。これより、ゲージ場は

$$A^i = \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_{M, y} \frac{1}{\sqrt{2(2J+1)}} \left\{ q_{JM} e^{-i(2J+1)\eta} Y_{J(My)}^i + q_{JM}^\dagger e^{i(2J+1)\eta} Y_{J(My)}^{i*} \right\} \quad (4.3.20)$$

のようにモード展開される。共役運動量は  $P_A^i = \partial_\eta A^i$  となるので同時刻交換関係は

$$[A^i(\eta, \mathbf{x}), P_A^j(\eta, \mathbf{y})] = i\delta_3^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3.21)$$

と設定される。ここで、 $S^3$  上のデルタ関数は完全系より

$$\delta_3^{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_{M, y} Y_{J(My)}^{i*}(\mathbf{x}) Y_{J(My)}^j(\mathbf{y}) \quad (4.3.22)$$

と表される。これより、生成消滅演算子が満たす交換関係は

$$[q_{J_1(M_1 y_1)}, q_{J_2(M_2 y_2)}^\dagger] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{y_1 y_2} \quad (4.3.23)$$

と規格化され、ゲージ場のハミルトニアン演算子は

$$\begin{aligned} H^A &= \int_{S^3} d\Omega_3 : \left\{ \frac{1}{2} P_A^i P_i^A - \frac{1}{2} A^i (\square_3 - 2) A_i \right\} : \\ &= \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_{M, y} (2J+1) q_{J(My)}^\dagger q_{J(My)} \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

となる。

重力場の正準量子化 Weyl作用を扱うにはゲージ固定をする必要がある。そのために、ここではトレースレステンソル場をさらにモード分解して、

$$h_{00} = h, \quad h_{0i} = h_i, \quad h_{ij} = h_{ij}^{\text{tr}} + \frac{1}{3}\hat{\gamma}_{ij}h \quad (4.3.25)$$

と書く。ここで、 $h_{ij}^{\text{tr}}$  は空間のトレースレス条件 ( $h^{\text{tri}}_i = 0$ ) を満たす成分である。このときトレースレステンソル場のゲージ変換 (4.2.1) は

$$\begin{aligned} \delta_\kappa h &= \frac{3}{2}\partial_\eta \kappa_0 + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_k \kappa^k, \\ \delta_\kappa h_i &= \partial_\eta \kappa_i + \hat{\nabla}_i \kappa_0, \\ \delta_\kappa h_{ij}^{\text{tr}} &= \hat{\nabla}_i \kappa_j + \hat{\nabla}_j \kappa_i - \frac{2}{3}\hat{\gamma}_{ij}\hat{\nabla}_k \kappa^k \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

と分解される。

一般座標変換の四つの自由度を用いてここでは横波ゲージ条件

$$\hat{\nabla}^i h_i = \hat{\nabla}^i h_{ij}^{\text{tr}} = 0 \quad (4.3.27)$$

を課す。すなわち、横波ベクトル成分を  $h_i^{\text{T}}$  及び横波トレースレス成分を  $h_{ij}^{\text{TT}}$  と記述すると、この横波ゲージ条件は

$$h_i = h_i^{\text{T}}, \quad h_{ij}^{\text{tr}} = h_{ij}^{\text{TT}} \quad (4.3.28)$$

と表すことができる。

Riegert作用と横波ゲージでゲージ固定した Weyl作用は  $R \times S^3$  上で

$$\begin{aligned} I_{4\text{DQG}} &= \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ -\frac{2b_1}{(4\pi)^2} \phi \left( \partial_\eta^4 - 2\Box_3 \partial_\eta^2 + \Box_3^2 + 4\partial_\eta^2 \right) \phi \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} h_{ij}^{\text{TT}} \left( \partial_\eta^4 - 2\Box_3 \partial_\eta^2 + \Box_3^2 + 8\partial_\eta^2 - 4\Box_3 + 4 \right) h_{\text{TT}}^{ij} \\ &\quad + h_i^{\text{T}} (\Box_3 + 2) \left( -\partial_\eta^2 + \Box_3 - 2 \right) h_{\text{T}}^i \\ &\quad \left. - \frac{1}{27} h (16\Box_3 + 27) \Box_3 h \right\} \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

となる。

スカラー的な場  $h$  の作用は時間微分を含まないので力学的な自由度ではない。ここではさらに  $\delta_\kappa(\hat{\nabla}^i h_i) = \delta_\kappa(\hat{\nabla}^i h_{ij}^{\text{tr}}) = 0$  を満たす残りのゲージ自由度を使って

$$h = 0 \quad (4.3.30)$$

のゲージを取る。実際、 $\square_3 \kappa_0 = 0$  を満たすゲージ自由度  $\kappa_0(\eta)$  が残るので、それを使って消すことができる。横波条件 (4.3.27) とこの条件を合わせて輻射ゲージと呼ぶことにする。

ここではさらに  $(\square_3 + 2)h_i^T = 0$  を満たす非力学的な横波ベクトルモードを取り除く。このモードは  $J = 1/2$  ベクトル調和関数で書けて、条件式は

$$h_i^T|_{J=1/2} = 0 \quad (4.3.31)$$

と表すことができる。この条件を加えた輻射ゲージを輻射<sup>+</sup>ゲージと呼ぶことにする。このとき、一般座標変換の残りのゲージ自由度は共形 Killing ベクトルの自由度と同じになる。それについては共形代数を構成する際に詳しく述べることにする。

高階微分場である重力場を Dirac の処方箋に従って正準量子化する。ここでは共形モードについて議論する。新しい変数  $\chi = \partial_\eta \phi$  を導入すると共形モード場の作用は

$$I_\phi = \int d\eta \int_{S^3} d\Omega_3 \left\{ -\frac{b_1}{8\pi^2} [(\partial_\eta \chi)^2 + 2\chi \square_3 \chi - 4\chi^2 + (\square_3 \phi)^2] + v(\partial_\eta \phi - \chi) \right\} \quad (4.3.32)$$

のように2階微分の作用関数に書き換えることができる。最後の項は Lagrange 未定定数 (Lagrange multiplier) である。これより  $\chi$ 、 $\phi$ 、 $v$  の正準共役運動量  $P_\chi$ 、 $P_\phi$ 、 $P_v$  を求め、Poisson 括弧

$$\begin{aligned} \{\chi(\eta, \mathbf{x}), P_\chi(\eta, \mathbf{y})\}_P &= \{\phi(\eta, \mathbf{x}), P_\phi(\eta, \mathbf{y})\}_P \\ &= \{v(\eta, \mathbf{x}), P_v(\eta, \mathbf{y})\}_P = \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

を設定する。

新しい場  $\chi$  は時間について2階微分なので通常の運動量変数  $P_\chi = -(b_1/4\pi^2)\partial_\eta \chi$  を持つが、 $\phi$  と  $v$  はそれぞれ1階及び0階微分なので拘束条件<sup>3</sup>

$$\varphi_1 = P_\phi - v \simeq 0, \quad \varphi_2 = P_v \simeq 0 \quad (4.3.34)$$

<sup>3</sup>Lagrange 未定定数項を  $(v\partial_\eta \phi - \phi\partial_\eta v)/2$  のように対称化して考えると、拘束条件は  $\varphi_1 = P_\phi - v/2$  と  $\varphi_2 = P_v + \phi/2$  になるが結果は同じである。

になる。拘束条件は六つの変数、 $\phi$ 、 $\chi$ 、 $v$  及びその共役運動量  $P_\phi$ 、 $P_\chi$ 、 $P_v$ 、が張る位相空間のなかの部分空間を表す。弱い等式はそれらが部分位相空間上で等式として成り立つことを意味している。

拘束条件の間の Poisson 括弧は

$$C_{ab} = \{\varphi_a, \varphi_b\}_P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.35)$$

となる。ここでは簡単のため3次元デルタ関数を1と表している。 $\det C_{ab} \neq 0$  を満たすことから、これらは第2種拘束条件と呼ばれるものである。第2種拘束条件を扱うために Dirac の処方箋に従って Dirac 括弧

$$\{F, G\}_D = \{F, G\}_P - \{F, \varphi_a\}_P C_{ab}^{-1} \{\varphi_b, G\}_P \quad (4.3.36)$$

を導入する。Dirac 括弧は Poisson 括弧が満たす基本的な性質を満たしている。任意関数  $F$  にたいして拘束条件が  $\{F, \varphi_a\}_D = 0$  を満たすことから、Dirac 括弧は部分位相空間上の Poisson 括弧と見ることができる。 $F$  としてハミルトニアンを代入するとこれは拘束条件が時間発展しないことを表し、最初に  $\varphi_a = 0$  と置けば0が保たれることを意味する。したがって、Dirac 括弧を使えば拘束条件は厳密な等式としてゼロと置くことができる。

部分位相空間の四つの変数の間の Dirac 括弧は

$$\{\chi(\eta, \mathbf{x}), P_\chi(\eta, \mathbf{y})\}_D = \{\phi(\eta, \mathbf{x}), P_\phi(\eta, \mathbf{y})\}_D = \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3.37)$$

で与えられ、ハミルトニアンは

$$H^\phi = \int d\Omega_3 \left\{ -\frac{2\pi^2}{b_1} P_\chi^2 + P_\phi \chi + \frac{b_1}{8\pi^2} [2\chi \square_3 \chi - 4\chi^2 + (\square_3 \phi)^2] \right\} \quad (4.3.38)$$

と書ける。これより運動方程式は

$$\begin{aligned} \partial_\eta \phi &= \{\phi, H^\phi\}_D = \chi, \\ \partial_\eta \chi &= \{\chi, H^\phi\}_D = -\frac{4\pi^2}{b_1} P_\chi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\eta P_\chi &= \{P_\chi, H^\phi\}_D = -P_\phi - \frac{b_1}{2\pi^2} \square_3 \chi + \frac{b_1}{\pi^2} \chi, \\ \partial_\eta P_\phi &= \{P_\phi, H^\phi\}_D = -\frac{b_1}{4\pi^2} \square_3^2 \phi\end{aligned}\quad (4.3.39)$$

となる。正準量子化は Dirac 括弧を交換子に置き換えて

$$[\chi(\eta, \mathbf{x}), P_\chi(\eta, \mathbf{y})] = [\phi(\eta, \mathbf{x}), P_\phi(\eta, \mathbf{y})] = i\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3.40)$$

と設定することで完了する。

Riegert 作用 (4.3.29) から、あるいは (4.3.39) 式から共形モード場の運動方程式を導いて  $\phi \propto e^{-i\omega\eta} Y_{JM}$  を代入すると、

$$\{\omega^2 - (2J)^2\} \{\omega^2 - (2J+2)^2\} \phi = 0 \quad (4.3.41)$$

を得る。この分散関係から共形モード場を

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\pi}{2\sqrt{b_1}} \left\{ 2(\hat{q} + \hat{p}\eta) Y_{00} \right. \\ &\quad + \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_M \frac{1}{\sqrt{J(2J+1)}} \left( a_{JM} e^{-i2J\eta} Y_{JM} + a_{JM}^\dagger e^{i2J\eta} Y_{JM}^* \right) \\ &\quad \left. + \sum_{J \geq 0} \sum_M \frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+1)}} \left( b_{JM} e^{-i(2J+2)\eta} Y_{JM} + b_{JM}^\dagger e^{i(2J+2)\eta} Y_{JM}^* \right) \right\}\end{aligned}\quad (4.3.42)$$

とモード展開する。ここで、 $Y_{00} = 1/\sqrt{V_3} = 1/\sqrt{2}\pi$  である。場の変数  $\chi$ 、 $P_\phi$ 、 $P_\chi$  を (4.3.39) 式から計算して、交換関係 (4.3.40) が成り立つように展開係数の間の交換関係を求めると

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i, \quad [a_{J_1 M_1}, a_{J_2 M_2}^\dagger] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2}, \quad [b_{J_1 M_1}, b_{J_2 M_2}^\dagger] = -\delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \quad (4.3.43)$$

を得る。これより、 $a_{JM}$  は正計量、 $b_{JM}$  は負計量をもつことが分かる。

ハミルトニアンは (4.3.38) 式から求めることができる。正規順序付けをすると、定数項  $b_1$  を除いて、

$$H^\phi = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + b_1 + \sum_{J \geq 0} \sum_M \{ 2J a_{JM}^\dagger a_{JM} - (2J+2) b_{JM}^\dagger b_{JM} \} \quad (4.3.44)$$

を得る。エネルギーシフト項  $b_1$  は 2 次元量子重力のとき同じように座標系に依存したカシミア項で、ここでは簡単のため次の節で求める  $R \times S^3$  上の共形代数が閉じるように決めている<sup>4</sup>。

横波トレースレス場  $h_{ij}^{\text{TT}}$  も高階微分場なので共形モード場と同様に Dirac の処方箋に従って量子化する。横波ベクトル場  $h_i^{\text{T}}$  は 2 階微分なので通常の量子化を行う。テンソル及びベクトル調和関数を用いて場をそれぞれ  $h_{\text{TT}}^{ij} \propto e^{-i\omega\eta} Y_{J(Mx)}^{ij}$  と  $h_{\text{T}}^i \propto e^{-i\omega\eta} Y_{J(My)}^i$  で展開すると、ゲージ固定した作用 (4.3.29) から運動方程式は

$$\begin{aligned} \{\omega^2 - (2J)^2\} \{\omega^2 - (2J+2)^2\} h_{\text{TT}}^{ij} &= 0, \\ (2J-1)(2J+3) \{\omega^2 - (2J+1)^2\} h_{\text{T}}^i &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

となることが分かる。これらの分散関係より場をそれぞれ<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} h_{\text{TT}}^{ij} &= \frac{1}{4} \sum_{J \geq 1} \sum_{M,x} \frac{1}{\sqrt{J(2J+1)}} \left\{ c_{J(Mx)} e^{-i2J\eta} Y_{J(Mx)}^{ij} + c_{J(Mx)}^\dagger e^{i2J\eta} Y_{J(Mx)}^{ij*} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{J \geq 1} \sum_{M,x} \frac{1}{\sqrt{(J+1)(2J+1)}} \left\{ d_{J(Mx)} e^{-i(2J+2)\eta} Y_{J(Mx)}^{ij} \right. \\ &\quad \left. + d_{J(Mx)}^\dagger e^{i(2J+2)\eta} Y_{J(Mx)}^{ij*} \right\}, \\ h_{\text{T}}^i &= \frac{1}{2} \sum_{J \geq 1} \sum_{M,y} \frac{i}{\sqrt{(2J-1)(2J+1)(2J+3)}} \left\{ e_{J(My)} e^{-i(2J+1)\eta} Y_{J(My)}^i \right. \\ &\quad \left. - e_{J(My)}^\dagger e^{i(2J+1)\eta} Y_{J(My)}^{i*} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

とモード展開する。先に述べたように、ベクトル場の  $J = 1/2$  モードは  $(\square_3 + 2)h_{\text{T}}^i|_{J=1/2} = 0$  をみたすモードで、ゲージ条件として落している。この展開のもとで交換関係は

$$\begin{aligned} [c_{J_1(M_1x_1)}, c_{J_2(M_2x_2)}^\dagger] &= - [d_{J_1(M_1x_1)}, d_{J_2(M_2x_2)}^\dagger] = \delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{x_1 x_2}, \\ [e_{J_1(M_1y_1)}, e_{J_2(M_2y_2)}^\dagger] &= -\delta_{J_1 J_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{y_1 y_2} \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

<sup>4</sup>この項は一般座標不変な有効作用 (6.5.9) の共形モード場  $\phi$  を含まない量子補正項から生じる。

<sup>5</sup> $h_{\text{T}}^i$  の展開に虚数単位を用いているのは、次節で求める共形変換の生成子  $Q_M^h$  の規格化に合わせるためである。

と規格化され、 $c_{J(Mx)}$  は正計量、 $d_{J(Mx)}$  及び  $e_{J(My)}$  は負計量になる。ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
 H^h = & \sum_{J \geq 1} \sum_{M,x} \{2J c_{J(Mx)}^\dagger c_{J(Mx)} - (2J + 2) d_{J(Mx)}^\dagger d_{J(Mx)}\} \\
 & - \sum_{J \geq 1} \sum_{M,y} (2J + 1) e_{J(My)}^\dagger e_{J(My)} \quad (4.3.48)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

## 第5章 共形不変性と量子重力 状態

共形不変性は、前章 4.2 節で示したように、一般座標不変性の一部として現れるゲージ対称性である。このことから、共形代数はいわゆる Wheeler-DeWitt 拘束条件の実現である。この章では具体的に  $R \times S^3$  上で共形代数を構成して、4次元量子重力の物理的状態を共形場 (conformal fields) として与える。物理量はそれらの相関関数であり、スケーリング次元である。

一方、伝統的な  $S$  行列は物理量ではない。量子重力の漸近自由性は Minkowski 時空の実現を表しているわけではないので、いわゆる漸近場の存在を意味しない<sup>1</sup>。そのような時空では重力子 (graviton) のような特定の背景時空のまわりの小さなゆらぎとして表される粒子的描像はもはや成り立たなくなる。

### 5.1 4次元共形代数と共形変換

4次元量子重力のストレストンソルは背景時空による変分を用いて

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}} \frac{\delta I_{ADQG}}{\delta \hat{g}^{\mu\nu}} \quad (5.1.1)$$

と定義され、トレースレスの条件  $\hat{T}^{\lambda}_{\lambda} = 0$  を満たしている。このとき、足の上げ下げは  $\hat{T}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\lambda} \hat{g}_{\nu\sigma} \hat{T}^{\lambda\sigma}$  のように背景計量場を用いて行われる。共

<sup>1</sup> $S$  行列を定義しようと思えば高エネルギーの粒子が衝突してブラックホールが出来るような過程を考えるか、あるいはブラックホールに入射して出て行く過程を考えるしかない。この場合はブラックホールから離れた場所は Einstein 理論で記述され、漸近場として重力子を定義することができる。

形変換の生成子は共形 Killing ベクトル  $\zeta^\mu$  とストレステンソルを用いて

$$Q_\zeta = \int_{S^3} d\Omega_3 \zeta^\mu : \hat{T}_{\mu 0} : \quad (5.1.2)$$

で与えられる。共形変換  $\delta_\zeta$  はこの生成子と場の演算子の交換関係として表される。

共形 Killing 方程式を  $R \times S^3$  上で成分ごとに書くと

$$3\partial_\eta \zeta_0 + \psi = 0, \quad (5.1.3)$$

$$\partial_\eta \zeta_i + \hat{\nabla}_i \zeta_0 = 0, \quad (5.1.4)$$

$$\hat{\nabla}_i \zeta_j + \hat{\nabla}_j \zeta_i - \frac{2}{3} \hat{\gamma}_{ij} \psi = 0 \quad (5.1.5)$$

となる。ここで、 $\psi = \hat{\nabla}_i \zeta^i$  である。これらの式とストレステンソルの保存則  $\hat{\nabla}^\mu \hat{T}_{\mu 0} = -\partial_\eta \hat{T}_{00} + \hat{\nabla}^i \hat{T}_{i0} = 0$  を使うと、共形変換の生成子は

$$\frac{dQ_\zeta}{d\eta} = -\frac{1}{3} \int d\Omega_3 \psi \hat{T}^\lambda_\lambda = 0 \quad (5.1.6)$$

のようにストレステンソルのトレースに比例して保存することが分かる。

4次元では共形 Killing ベクトルの自由度は有限になる。共形 Killing 方程式を  $\psi$  について解くと

$$(\square_3 + 3)\psi = 0, \quad (\partial_\eta^2 + 1)\psi = 0 \quad (5.1.7)$$

を得る。左の式は (5.1.5) に  $\hat{\nabla}^j \hat{\nabla}^i$  を作用させると得られる。その結果を残りの共形 Killing 方程式に代入すると右の式を得る。これより、この二つの方程式を同時に満たす解は

$$\psi = 0 \quad \text{または} \quad \psi \propto e^{\pm i\eta} Y_{\frac{1}{2}M} \quad (5.1.8)$$

と表される。

はじめに、 $\psi = 0$  の解を考える。この解は  $\partial_\eta \zeta_0 = \square_3 \zeta_0 = 0$  及び  $S^3$  の Killing 方程式  $\hat{\nabla}_i \zeta_j + \hat{\nabla}_j \zeta_i = 0$  を満たす解で、その一つは  $\zeta_i = 0$  で表される時間方向の並進ベクトル

$$\zeta_T^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (5.1.9)$$

である。もう一つは回転を表す  $S^3$  の Killing ベクトルで、 $\zeta_0 = 0$  と  $\partial_\eta \zeta_i = 0$  を同時に満たす解である。 $S^3$  の Killing ベクトルはスカラー調和関数を使って

$$(\zeta_R^i)_{MN} = i \frac{\sqrt{V_3}}{4} \left\{ Y_{\frac{1}{2}M}^* \hat{\nabla}^i Y_{\frac{1}{2}N} - Y_{\frac{1}{2}N} \hat{\nabla}^i Y_{\frac{1}{2}M}^* \right\} \quad (5.1.10)$$

と表すことができる。ここで、指数  $M$  と  $N$  はいま  $SU(2) \times SU(2)$  の 4 表現を表している。このベクトルは  $J = 1/2$  のベクトル調和関数で展開することができる [(5.1.24) 式を参照]。

これらを共形変換の生成子の定義式に代入するとそれぞれハミルトニアン演算子

$$H = \int_{S^3} d\Omega_3 : \hat{T}_{00} : \quad (5.1.11)$$

と 6 自由度の  $S^3$  の回転生成子

$$R_{MN} = \int_{S^3} d\Omega_3 (\zeta_R^i)_{MN} : \hat{T}_{i0} : \quad (5.1.12)$$

を得る。ここで、 $R_{MN}$  は関係式

$$R_{MN} = -\epsilon_M \epsilon_N R_{-N-M}, \quad R_{MN}^\dagger = R_{NM} \quad (5.1.13)$$

を満たす。

共形 Killing 方程式の  $\psi \neq 0$  を満たす解は

$$(\zeta_S^0)_M = \frac{1}{2} \sqrt{V_3} e^{i\eta} Y_{\frac{1}{2}M}^*, \quad (\zeta_S^i)_M = -\frac{i}{2} \sqrt{V_3} e^{i\eta} \hat{\nabla}^i Y_{\frac{1}{2}M}^* \quad (5.1.14)$$

及びその複素共役で与えられる。これを定義式 (5.1.2) に代入し、ストレステンソルの保存則を使って変形すると生成子

$$Q_M = \sqrt{V_3} P^{(+)} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{\frac{1}{2}M}^* \hat{T}_{00} \quad (5.1.15)$$

を得る。ここで、 $P^{(+)} = e^{i\eta}(1 + i\partial_\eta)/2$  である。 $S^3$  の空間積分を実行すると  $e^{\pm i\eta}$  の関数だけが残ることが示せるので、 $P^{(+)}$  はそのうちの  $e^{-i\eta}$  部分のみを選択して生成子が時間に依存しないことを保障する因子である。 $Q_M$  及びそのエルミート共役  $Q_M^\dagger$  の  $4 + 4 = 8$  個が特殊共形変換 (special

conformal transformation) の、正確には並進と特殊共形変換を組み合わせた、生成子である。

ここで、輻射 + ゲージ固定条件について再考する。プラス記号のない輻射ゲージ条件 (4.3.27) と (4.3.30) を保つ残りのゲージ自由度は方程式  $\delta_\kappa h = (3\partial_\eta \kappa_0 + \tilde{\psi})/2 = 0$ 、 $\delta_\kappa(\hat{\nabla}_i h^i) = \partial_\eta \tilde{\psi} + \square_3 \kappa_0 = 0$ 、 $\delta_\kappa(\hat{\nabla}^i h_{ij}^{\text{tr}}) = (\square_3 + 2)\kappa_j + \hat{\nabla}_j \tilde{\psi}/3 = 0$  で表される。ここで、 $\tilde{\psi} = \hat{\nabla}_\lambda \kappa^\lambda$  である。これらの式は残りのゲージ自由度が共形 Killing ベクトルで張られる 15 個のゲージ自由度よりも広いことを表している。すなわち、二番目の方程式は共形 Killing 方程式の (5.1.4) 条件よりも弱く、 $S^3$  の Killing 方程式の解として  $\partial_\eta \kappa^i \neq 0$  を満たすものが存在して、任意の時間の関数を  $f(\eta)$  とすると  $\kappa^\mu = (0, f(\eta)Y_{1/2(M_y)}^i)$  の解が許されることが分かる。このゲージ自由度を使って  $h_i^T$  の  $J = 1/2$  の自由度を取り除くことができ、ゲージ固定条件 (4.3.31) を課することができる。輻射 + ゲージ固定後の残りの一般座標変換の自由度は共形 Killing ベクトルと同じになり、それが共形変換の自由度になる。

15 個の 4 次元共形変換の生成子は  $SO(4, 2)$  の閉じた共形代数

$$\begin{aligned}
[Q_M, Q_N^\dagger] &= 2\delta_{MN}H + 2R_{MN}, \\
[H, Q_M] &= -Q_M, \\
[H, R_{MN}] &= [Q_M, Q_N] = 0, \\
[Q_M, R_{M_1 M_2}] &= \delta_{MM_2}Q_{M_1} - \epsilon_{M_1} \epsilon_{M_2} \delta_{M-M_1} Q_{-M_2}, \\
[R_{M_1 M_2}, R_{M_3 M_4}] &= \delta_{M_1 M_4} R_{M_3 M_2} - \epsilon_{M_1} \epsilon_{M_2} \delta_{-M_2 M_4} R_{M_3 - M_1} \\
&\quad - \delta_{M_2 M_3} R_{M_1 M_4} + \epsilon_{M_1} \epsilon_{M_2} \delta_{-M_1 M_3} R_{-M_2 M_4}
\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

を構成する。

ハミルトニアン演算子は、シリンダー的背景時空  $R \times S^3$  上では、状態の共形次元 (conformal weight) を数えるディラレーション (dilatation) 演算子である。このことを見るために、 $dy^2 + d\Omega_3^2$  の計量を持つ Euclid 化された  $R \times S^3$  時空から  $dr^2 + r^2 d\Omega_3^2$  の計量を持つ  $R^4$  時空への共形写像

$y \rightarrow r = e^y$  を考える。ディラレーション  $r \rightarrow e^a r$  はシリンダー的時空では時間並進  $y \rightarrow y + a$  に相当する。このように  $R^4$  上で量子場の理論を定義する方法は動径量子化 (radial quantization) として知られている。Lorentz 計量を持つ  $R \times S^3$  上の場の量子論は解析接続  $y = i\eta$  をすることで得られる。これより、 $e^{iE\eta}$  の時間依存性を持つ場の演算子の各モードが共形次元  $E$  を持つことが分かる。

回転生成子  $R_{MN}$  はハミルトニアンと交換するので共形次元がゼロの演算子である。この演算子は  $J$  でラベルされた各モードについて対角的な構造をしている。これに対して、特殊共形変換の生成子  $Q_M$  は共形次元  $-1$  (そのエルミート共役は  $1$ ) を持つ。そのため、この演算子は共形次元が  $1$  だけ異なる生成演算子と消滅演算子の適当な組み合わせで表される。

回転生成子が成す閉じた代数は良く知られた代数で表すことができる。 $SU(2) \times SU(2)$  の 4 表現  $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$  を  $\{1, 2, 3, 4\}$  と表示して、 $A_+ = R_{31}$ 、 $A_- = R_{31}^\dagger$ 、 $A_3 = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22})$ 、 $B_+ = R_{21}$ 、 $B_- = R_{21}^\dagger$ 、 $B_3 = \frac{1}{2}(R_{11} - R_{22})$  と書くと、 $R_{MN}$  だけの代数は通常の  $SU(2) \times SU(2)$  代数の形

$$\begin{aligned} [A_+, A_-] &= 2A_3, & [A_3, A_\pm] &= \pm A_\pm, \\ [B_+, B_-] &= 2B_3, & [B_3, B_\pm] &= \pm B_\pm \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

に書き換えることができる。ここで、 $A_{\pm,3}$  と  $B_{\pm,3}$  は交換する。

4次元量子重力はいま、スカラー場、ゲージ場、共形モード場、トレースレステンソル場の四つのセクターに分かれている。共形代数の生成子はすべてのセクターからの寄与の和

$$Q_\zeta = Q_\zeta^X + Q_\zeta^A + Q_\zeta^\phi + Q_\zeta^h \quad (5.1.18)$$

で与えられる。以下では具体的に各々の場に対して共形変換の生成子を求める。

スカラー場 共形不変なスカラー場の背景時空上のストレステンソルは

$$\hat{T}_{\mu\nu}^X = \frac{2}{3}\hat{\nabla}_\mu X \hat{\nabla}_\nu X - \frac{1}{3}X \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu X - \frac{1}{6}\hat{g}_{\mu\nu} \left\{ \hat{\nabla}_\lambda X \hat{\nabla}^\lambda X + \frac{1}{6}\hat{R}X^2 \right\} + \frac{1}{6}\hat{R}_{\mu\nu}X^2 \quad (5.1.19)$$

と計算される。 $R \times S^3$ の曲率は(4.3.3)で与えられている。トレースを取ると

$$\hat{T}^{X\lambda}_\lambda = \frac{1}{3}X \left( -\hat{\nabla}^2 + \frac{1}{6}\hat{R} \right) X = 0 \quad (5.1.20)$$

のように運動方程式に比例して消えるので、共形変換の生成子は保存することがわかる。

ストレステンソルを代入して $S^3$ 上の積分を実行すると生成子を求めることができる。ハミルトニアン演算子はすでに(4.3.16)式で与えられたものになる。特殊共形変換の生成子は(5.1.15)式より

$$\begin{aligned} Q_M^X &= P^{(+)} \sum_{J_1, M_1} \sum_{J_2, M_2} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{V_3}{(2J_1+1)(2J_2+1)}} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{\frac{1}{2}M}^* Y_{J_1 M_1} Y_{J_2 M_2} \\ &\times \left\{ \left[ -(2J_1+1)(2J_2+1) + (2J_2+1)^2 - \frac{1}{2} \right] \right. \\ &\quad \times \left( \varphi_{J_1 M_1} \varphi_{J_2 M_2} e^{-i(2J_1+2J_2+2)\eta} \right. \\ &\quad \quad \left. + \epsilon_{M_1} \varphi_{J_1 - M_1}^\dagger \epsilon_{M_2} \varphi_{J_2 - M_2}^\dagger e^{i(2J_1+2J_2+2)\eta} \right) \\ &\quad + \left[ (2J_1+1)(2J_2+1) + (2J_2+1)^2 - \frac{1}{2} \right] \\ &\quad \times \left( \varphi_{J_1 M_1} \epsilon_{M_2} \varphi_{J_2 - M_2}^\dagger e^{-i(2J_1-2J_2)\eta} \right. \\ &\quad \quad \left. + \epsilon_{M_1} \varphi_{J_1 - M_1}^\dagger \varphi_{J_2 M_2} e^{i(2J_1-2J_2)\eta} \right) \left. \right\} \quad (5.1.21) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、三つのスカラー調和関数の積を $S^3$ 上で積分して得られる $SU(2) \times SU(2)$ Clebsch-Gordan 係数

$$\begin{aligned} C_{J_1 M_1, J_2 M_2}^{JM} &= \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{JM}^* Y_{J_1 M_1} Y_{J_2 M_2} \\ &= \sqrt{\frac{(2J_1+1)(2J_2+1)}{2J+1}} C_{J_1 m_1, J_2 m_2}^{Jm} C_{J_1 m'_1, J_2 m'_2}^{Jm'} \quad (5.1.22) \end{aligned}$$

を導入する。 $C_{J_1 m_1, J_2 m_2}^{Jm}$ は通常のClebsch-Gordan係数である。これより、 $J+J_1+J_2$ は整数で三角不等式 $|J_1-J_2| \leq J \leq J_1+J_2$ 及び $M = M_1+M_2$

を満たす。生成子  $Q_M$  には  $J = 1/2$  をもつ  $\mathbb{C}$  係数が現れて、その性質を使うと最終的に

$$Q_M^X = \sum_{J \geq 0} \sum_{M_1, M_2} \mathbf{C}_{JM_1, J+\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \sqrt{(2J+1)(2J+2)} \epsilon_{M_1} \varphi_{J-M_1}^\dagger \varphi_{J+\frac{1}{2}M_2} \quad (5.1.23)$$

を得る。

回転生成子を定義に従って書き下すために  $S^3$  の Killing ベクトルをベクトル調和関数を使って

$$\left(\xi_{\mathbb{R}}^i\right)_{MN} = i \frac{1}{2} \sqrt{V_3} \sum_{V,y} \mathbf{G}_{\frac{1}{2}(Vy); \frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}M} Y_{\frac{1}{2}(Vy)}^{i*} \quad (5.1.24)$$

と展開する。ここで、新たな  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数

$$\mathbf{G}_{J_1(M_1y_1); J_2M_2}^{JM} = \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{JM}^* Y_{J_1(M_1y_1)}^i \hat{\nabla}_i Y_{J_2M_2} \quad (5.1.25)$$

を導入した。積分を実行して得られる一般式は他の係数とともに付録 B.2 にまとめて記した。係数  $\mathbf{G}$  は  $J = 1/2$  のときは  $J_1 = J_2$  の場合にのみ値をもち、 $J_1 = 1/2$  のときは  $J = J_2$  のときのみ値をもち、これより、回転生成子は

$$R_{MN}^X = -\frac{1}{2} \sum_{J \geq 0} \sum_{S_1, S_2} \sum_{V,y} (-\epsilon_V) \mathbf{G}_{\frac{1}{2}(-Vy); \frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}M} \mathbf{G}_{\frac{1}{2}(Vy); JS_2}^{JS_1} \varphi_{JS_1}^\dagger \varphi_{JS_2} \quad (5.1.26)$$

と書くことができる。この式に具体的な値

$$\mathbf{G}_{J(Vy); JN}^{\frac{1}{2}M} = -\sqrt{2J(2J+2)} C_{J+YV, JN}^{\frac{1}{2}m} C_{J-YV', JN'}^{\frac{1}{2}m'}, \quad (5.1.27)$$

$$\mathbf{G}_{\frac{1}{2}(Vy); JN}^{JM} = -\sqrt{2J(2J+2)} C_{\frac{1}{2}+YV, JN}^{Jm} C_{\frac{1}{2}-YV', JN'}^{Jm'} \quad (5.1.28)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} R_{11}^X &= \sum_{J>0} \sum_M (m+m') \varphi_{JM}^\dagger \varphi_{JM}, \\ R_{22}^X &= \sum_{J>0} \sum_M (m-m') \varphi_{JM}^\dagger \varphi_{JM}, \\ R_{21}^X &= \sum_{J>0} \sum_M \sqrt{(J+1-m')(J+m')} \varphi_{JM}^\dagger \varphi_{J\bar{M}}, \\ R_{31}^X &= \sum_{J>0} \sum_M \sqrt{(J+1-m)(J+m)} \varphi_{JM}^\dagger \varphi_{J\bar{M}} \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

を得る。ここで、上付及び下付の線をもった指数は  $\overline{M} = (m, m' - 1)$  と  $\underline{M} = (m - 1, m')$  で定義される。

スカラー場の共形変換 (4.2.5) は生成子と場の演算子の交換関係として

$$\delta_\zeta X = i[Q_\zeta^X, X] \quad (5.1.30)$$

と表すことができる。  $\zeta_T^\mu$  と  $\zeta_S^\mu$  の場合について具体的に見てみると、共形 Killing ベクトルが  $\zeta_T^\mu$  のときは生成子がハミルトニアンなので、変換  $\delta_{\zeta_T} X = \partial_\eta X$  が  $i[H^X, X]$  と書けることがすぐに分かる。特殊共形変換の場合は変換規則 (4.2.5) に  $\zeta_S^\mu = (\zeta_S^0, \zeta_S^i)$  を代入して、調和関数の積の展開式

$$\begin{aligned} Y_{\frac{1}{2}M}^* Y_{JN} &= \frac{1}{\sqrt{V_3}} \left\{ \sum_S C_{JN, J+\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}M} Y_{J+\frac{1}{2}S}^* + \sum_S C_{JN, J-\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}M} Y_{J-\frac{1}{2}S}^* \right\}, \\ \hat{\nabla}^i Y_{\frac{1}{2}M}^* \hat{\nabla}_i Y_{JN} &= \frac{1}{\sqrt{V_3}} \left\{ -2J \sum_S C_{JN, J+\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}M} Y_{J+\frac{1}{2}S}^* \right. \\ &\quad \left. + (2J + 2) \sum_S C_{JN, J-\frac{1}{2}S}^{\frac{1}{2}M} Y_{J-\frac{1}{2}S}^* \right\} \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

を使って書き換えると交換関係  $i[Q_M^X, X]$  と一致することが示せる。

ゲージ場 ゲージ場のストレステンソルは

$$\hat{T}_{\mu\nu}^A = F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} \hat{g}_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \quad (5.1.32)$$

で与えられる。ここで、  $F_\nu^\mu = \hat{g}^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu}$  である。このテンソルは自明にトレースレスになる。

輻射ゲージ  $A_0 = \hat{\nabla}^i A_i = 0$  のもとで、定義式にストレステンソルを代入して共形変換の生成子を求める。ハミルトン演算子はすでに (4.3.24) で求めたものになる。特殊共形変換の生成子は

$$\begin{aligned} Q_M^A &= \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \sum_{M_1, y_1, M_2, y_2} D_{J(M_1 y_1), J+\frac{1}{2}(M_2 y_2)}^{\frac{1}{2}M} \sqrt{(2J+1)(2J+2)} \\ &\quad \times (-\epsilon_{M_1}) q_{J(-M_1 y_1)}^\dagger q_{J+\frac{1}{2}(M_2 y_2)} \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

となる。新たに導入された  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数  $D$  は

$$\begin{aligned} D_{J(M_1 y_1), J+\frac{1}{2}(M_2 y_2)}^{\frac{1}{2}M} &= \sqrt{\sqrt{3}} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{\frac{1}{2}M}^* Y_{J(M_1 y_1)}^i Y_{iJ+\frac{1}{2}(M_2 y_2)} \\ &= \sqrt{J(2J+3)} C_{J+y_1 m_1, J+\frac{1}{2}+y_2 m_2}^{\frac{1}{2}m} C_{J-y_1 m'_1, J+\frac{1}{2}-y_2 m'_2}^{\frac{1}{2}m'} \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

と定義される。係数  $D$  の一般的な式は付録 B.2 に与えてある。 $S^3$  回転の生成子については、以下の議論でその具体的な表式が必要ないので省略する。

次に、共形変換とゲージ固定条件の関係について議論する。輻射ゲージ  $A_0 = \hat{\nabla}^i A_i = 0$  では横波成分の共形変換 (4.2.6) は

$$\delta_\zeta A_i = \zeta^0 \partial_\eta A_i + \zeta^j \hat{\nabla}_j A_i + \frac{1}{3} \psi A_i + \frac{1}{2} (\hat{\nabla}_i \zeta^j - \hat{\nabla}^j \zeta_i) A_j \quad (5.1.35)$$

となる。この変換の下でゲージ固定された作用は不変になる。しかし、この変換は横波の条件を保存しない。また、ゲージ場の時間成分の変換が

$$\delta_\zeta A_0 = \hat{\nabla}^i (\zeta^0 A_i) \quad (5.1.36)$$

となってやはり輻射ゲージを保存しないことが分かる。

横波成分の共形変換 (5.1.35) と時間成分の共形変換 (5.1.36) の中で輻射ゲージを保存しないのは特殊共形変換の場合で、共形 Killing ベクトルが  $\zeta_T^\mu$  と  $\zeta_R^\mu$  の場合は保存される。以下では  $\zeta^\mu = \zeta_S^\mu$  を代入して先ず横波成分の変換則を見てみることにする。調和関数の積の展開式

$$\begin{aligned} & Y_{\frac{1}{2}M}^* Y_{J(Ny)}^i \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}} \left\{ \sum_{V, y'} D_{J(Ny), J+\frac{1}{2}(Vy')}^{\frac{1}{2}M} Y_{J+\frac{1}{2}(Vy')}^{i*} + \sum_{V, y'} D_{J(Ny), J-\frac{1}{2}(Vy')}^{\frac{1}{2}M} Y_{J-\frac{1}{2}(Vy')}^{i*} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2J(2J+2)} \sum_S G_{J(Ny); JS}^{\frac{1}{2}M} \hat{\nabla}^i Y_{JS}^* \right\}, \\ & \hat{\nabla}^j Y_{\frac{1}{2}M}^* \hat{\nabla}_j Y_{J(Ny)}^i \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}} \left\{ -2J \sum_{V, y'} D_{J(Ny), J+\frac{1}{2}(Vy')}^{\frac{1}{2}M} Y_{J+\frac{1}{2}(Vy')}^{i*} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2J+2) \sum_{V,y'} \mathbf{D}_{J(Ny), J-\frac{1}{2}(Vy')}^{\frac{1}{2}M} Y_{J-\frac{1}{2}(Vy')}^{i*} \\
& + \frac{2}{2J(2J+2)} \sum_S \mathbf{G}_{J(Ny); JS}^{\frac{1}{2}M} \hat{\nabla}^i Y_{JS}^* \} \quad (5.1.37)
\end{aligned}$$

を使って (5.1.35) 式の右辺を展開すると

$$\delta_{\zeta_S} A_i = i[Q_M^A, A_i] + \hat{\nabla}_i \lambda_S \quad (5.1.38)$$

のように特殊共形変換の生成子と場の演算子との交換関係にさらに余分な項が現れることが分かる。ここで、スカラー関数  $\lambda_S$  は

$$\begin{aligned}
(\lambda_S)_M = \frac{i}{2} \sum_{J \geq \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2(2J+1)}} \sum_{N,y} \sum_S \left\{ -\frac{1}{2J} q_{J(Ny)} e^{-i2J\eta} \mathbf{G}_{J(Ny); JS}^{\frac{1}{2}M} \right. \\
\left. + \frac{1}{2J+2} q_{J(Ny)}^\dagger e^{i(2J+2)\eta} (-\epsilon_N) \mathbf{G}_{J(-Ny); JS}^{\frac{1}{2}M} \right\} Y_{JS}^* \quad (5.1.39)
\end{aligned}$$

で与えられる。

余分な項はゲージ変換の形をしているので、特殊共形変換に伴うゲージ変換として

$$\delta_{\lambda_S} A_\mu = \hat{\nabla}_\mu \lambda_S \quad (5.1.40)$$

を定義すると (5.1.38) 式は

$$\delta_{\zeta_S} A_i - \delta_{\lambda_S} A_i = i[Q_M^A, A_i] \quad (5.1.41)$$

と書くことができる。さらに、時間成分の変換を計算すると

$$\delta_{\zeta_S} A_0 - \delta_{\lambda_S} A_0 = \hat{\nabla}^i (\zeta_S^0 A_i) - \partial_\eta \lambda_S = 0 \quad (5.1.42)$$

となることが分かる。

このように、閉じた共形代数を構成する生成子  $Q_\zeta^A$  が生成する変換は通常の共形変換  $\delta_\zeta$  とそれに伴うモードに依存したゲージ変換  $\delta_{\lambda_\zeta}$  を組み合わせた変換として

$$\delta_\zeta^T = \delta_\zeta - \delta_{\lambda_\zeta} \quad (5.1.43)$$

と表すことができ、特殊共形変換  $Q_M^A$  及びそのエルミート共役に対して  $\lambda_S$  及びそのエルミート共役を当て、その他の変換に対してはゲージ変数をゼロとすればよい。交換関係を用いて書くと輻射ゲージ条件を保存するこの共形変換は

$$\begin{aligned}\delta_\zeta^T A_i &= i[Q_\zeta^A A_i], \\ \delta_\zeta^T A_0 &= 0\end{aligned}\quad (5.1.44)$$

とまとめることができる。

共形モード場 Riegert 作用を背景時空について変分すると、共形モード場のストレストンソル

$$\begin{aligned}\hat{T}_{\mu\nu}^\phi &= -\frac{b_1}{8\pi^2} \left\{ -4\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\phi + 2\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\nu\phi + 2\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\mu\phi \right. \\ &\quad + \frac{8}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\lambda\phi\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}^\lambda\phi - \frac{4}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}_\lambda\phi\hat{\nabla}^\lambda\phi + 4\hat{R}_{\mu\lambda\nu\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}^\sigma\phi \\ &\quad + 4\hat{R}_{\mu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}_\nu\phi + 4\hat{R}_{\nu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}_\mu\phi - \frac{4}{3}\hat{R}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda\phi\hat{\nabla}^\lambda\phi - \frac{4}{3}\hat{R}\hat{\nabla}_\mu\phi\hat{\nabla}_\nu\phi \\ &\quad - \frac{2}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\hat{\nabla}^2\phi - 4\hat{R}_{\mu\lambda\nu\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^\sigma\phi + \frac{14}{3}\hat{R}_{\mu\nu}\hat{\nabla}^2\phi + 2\hat{R}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\phi \\ &\quad - 4\hat{R}_{\mu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}_\nu\phi - 4\hat{R}_{\nu\lambda}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}_\mu\phi - \frac{1}{3}\hat{\nabla}_\mu\hat{R}\hat{\nabla}_\nu\phi - \frac{1}{3}\hat{\nabla}_\nu\hat{R}\hat{\nabla}_\mu\phi \\ &\quad + \hat{g}_{\mu\nu} \left[ \hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}^2\phi - \frac{2}{3}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^2\phi\hat{\nabla}_\lambda\phi - \frac{2}{3}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^\sigma\phi\hat{\nabla}_\lambda\hat{\nabla}_\sigma\phi - \frac{8}{3}\hat{R}_{\lambda\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}^\sigma\phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}\hat{R}\hat{\nabla}^\lambda\phi\hat{\nabla}_\lambda\phi + \frac{2}{3}\hat{\nabla}^4\phi + 4\hat{R}_{\lambda\sigma}\hat{\nabla}^\lambda\hat{\nabla}^\sigma\phi - 2\hat{R}\hat{\nabla}^2\phi + \frac{1}{3}\hat{\nabla}^\lambda\hat{R}\hat{\nabla}_\lambda\phi \right] \left. \right\} \\ &\quad (5.1.45)\end{aligned}$$

を得る。そのトレースは

$$\hat{T}^{\phi\lambda}_\lambda = -\frac{b_1}{4\pi^2}\hat{\Delta}_4\phi = 0 \quad (5.1.46)$$

のように  $R \times S^3$  上の共形モード場の運動方程式に比例して消える。

ハミルトニアンはすでに (4.3.44) 式で与えられているので、特殊共形変換の生成子を定義式に従って求めると

$$Q_M^\phi = (\sqrt{2b_1} - i\hat{p}) a_{\frac{1}{2}M}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{J \geq 0} \sum_{M_1, M_2} \mathbf{C}_{JM_1, J+\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \left\{ \alpha(J) \epsilon_{M_1} a_{J-M_1}^\dagger a_{J+\frac{1}{2}M_2} \right. \\
& \quad \left. + \beta(J) \epsilon_{M_1} b_{J-M_1}^\dagger b_{J+\frac{1}{2}M_2} + \gamma(J) \epsilon_{M_2} a_{J+\frac{1}{2}-M_2}^\dagger b_{JM_1} \right\}
\end{aligned} \tag{5.1.47}$$

となる。ここで、係数  $\mathbf{C}$  はスカラー場のときに導入した (5.1.22) 式と同じである。その他の係数は

$$\alpha(J) = \sqrt{2J(2J+2)}, \quad \beta(J) = -\sqrt{(2J+1)(2J+3)}, \quad \gamma(J) = 1 \tag{5.1.48}$$

で与えられる。回転生成子の具体的な式は以下の議論で使わないので省略する。

ここで、計算を省くのに役立つ  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数の間に成り立つ交差関係式 (crossing relation) を与えて置く。四つのスカラー調和関数の積の  $S^3$  空間積分

$$\int_{S^3} d\Omega_3 Y_{J_1 M_1}^* Y_{J_2 M_2} Y_{J_3 M_3}^* Y_{J_4 M_4} \tag{5.1.49}$$

を考える。二つのスカラー調和関数の積は別のスカラー調和関数を用いて

$$Y_{J_1 M_1} Y_{J_2 M_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{J \geq 0} \sum_M \mathbf{C}_{J_1 M_1, J_2 M_2}^{JM} Y_{JM} \tag{5.1.50}$$

と展開できる。この式を使って積分 (5.1.49) を二通りに評価すると、

$$\sum_{J \geq 0} \sum_M \epsilon_M \mathbf{C}_{J_2 M_2, J-M}^{J_1 M_1} \mathbf{C}_{JM, J_4 M_4}^{J_3 M_3} = \sum_{J \geq 0} \sum_M \epsilon_M \mathbf{C}_{J_4 M_4, J-M}^{J_1 M_1} \mathbf{C}_{JM, J_2 M_2}^{J_3 M_3} \tag{5.1.51}$$

の交差関係式を得る。 $J_1 = J_3 = 1/2$  の式を用いると、 $Q_M$  と  $Q_N^\dagger$  の交換関係の非対角成分が消えることを簡単に示すことができる。また、次の節で物理状態を求める際にも有用である。

共形モード場の共形変換 (4.2.8) は、生成子と場の演算子との交換関係を用いて

$$\delta_\zeta \phi = i[Q_\zeta, \phi] \tag{5.1.52}$$

と表すことができる。特殊共形変換の場合はスカラー場のときに使用した調和関数の積の展開式 (5.1.31) を使うと容易に示すことができる。

トレースレステンソル場 最後に輻射<sup>+</sup>ゲージでのトレースレステンソル場の共形変換の生成子とその変換性について議論する。

ハミルトニアン  $H^h$  は作用から導かれ、すでに (4.3.48) 式で与えている。特殊共形変換の生成子は結果のみを書くと

$$\begin{aligned}
Q_M^h = & \sum_{J \geq 1} \sum_{M_1, x_1, M_2, x_2} \mathbf{E}_{J(M_1 x_1), J + \frac{1}{2}(M_2 x_2)}^{\frac{1}{2}M} \left\{ \alpha(J) \epsilon_{M_1} c_{J(-M_1 x_1)}^\dagger c_{J + \frac{1}{2}(M_2 x_2)} \right. \\
& \left. + \beta(J) \epsilon_{M_1} d_{J(-M_1 x_1)}^\dagger d_{J + \frac{1}{2}(M_2 x_2)} + \gamma(J) \epsilon_{M_2} c_{J + \frac{1}{2}(-M_2 x_2)}^\dagger d_{J(M_1 x_1)} \right\} \\
& + \sum_{J \geq 1} \sum_{M_1, x_1, M_2, y_2} \mathbf{H}_{J(M_1 x_1); J(M_2 y_2)}^{\frac{1}{2}M} \left\{ A(J) \epsilon_{M_1} c_{J(-M_1 x_1)}^\dagger e_{J(M_2 y_2)} \right. \\
& \left. - B(J) (-\epsilon_{M_2}) e_{J(-M_2 y_2)}^\dagger d_{J(M_1 x_1)} \right\} \\
& - \sum_{J \geq 1} \sum_{M_1, y_1, M_2, y_2} \mathbf{D}_{J(M_1 y_1), J + \frac{1}{2}(M_2 y_2)}^{\frac{1}{2}M} C(J) (-\epsilon_{M_1}) e_{J(-M_1 y_1)}^\dagger e_{J + \frac{1}{2}(M_2 y_2)}
\end{aligned} \tag{5.1.53}$$

となる。係数  $\alpha(J)$ 、 $\beta(J)$ 、 $\gamma(J)$  は共形モード場のと看と同じ (5.1.48) 式になる。さらに

$$\begin{aligned}
A(J) &= \sqrt{\frac{4J}{(2J-1)(2J+3)}}, \\
B(J) &= \sqrt{\frac{2(2J+2)}{(2J-1)(2J+3)}}, \\
C(J) &= \sqrt{\frac{(2J-1)(2J+1)(2J+2)(2J+4)}{2J(2J+3)}} \tag{5.1.54}
\end{aligned}$$

の係数が現れる。また、新たな  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{J(M_1 x_1), J + \frac{1}{2}(M_2 x_2)}^{\frac{1}{2}M} &= \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{\frac{1}{2}M}^* Y_{J(M_1 x_1)}^{ij} Y_{ij, J + \frac{1}{2}(M_2 x_2)} \\
&= \sqrt{(2J-1)(J+2)} C_{J+x_1 m_1, J + \frac{1}{2} + x_2 m_2}^{\frac{1}{2}m} C_{J-x_1 m'_1, J + \frac{1}{2} - x_2 m'_2}^{\frac{1}{2}m'} \\
\mathbf{H}_{J(M_1 x_1); J(M_2 y_2)}^{\frac{1}{2}M} &= \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{\frac{1}{2}M}^* Y_{J(M_1 x_1)}^{ij} \hat{\nabla}_i Y_{j, J(M_2 y_2)} \\
&= -\sqrt{(2J-1)(2J+3)} C_{J+x_1 m_1, J + y_2 m_2}^{\frac{1}{2}m} C_{J-x_1 m'_1, J - y_2 m'_2}^{\frac{1}{2}m'}
\end{aligned} \tag{5.1.55}$$

が必要になる。これらの係数の一般的な式は (B.2.2) と (B.2.4) で与えられる。

この生成子は、定義に従って Weyl 作用のストレストンソルから直接求めるのではなく、六つの係数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$  の値をあらかじめ指定せずに、共形代数が閉じるようにそれらの値を決定して求めた。その際、ベクトル及びテンソル調和関数の積の展開にたいして成り立つ交差関係式を使うと計算が簡単になる。また、係数の符号やすでに示したモード展開式 (4.3.46) 等の決まりごとは以下で述べる共形変換の式と合うように決めている。

正計量のモード  $c_{J(Mx)}$  と負計量のモード  $d_{J(Mx)}$ 、 $e_{J(My)}$  の間の交差項が存在することは、共形代数が閉じるためには負計量のテンソル及びベクトルモードが必要であることを表している。それは、Einstein 理論のような正計量のテンソルモードだけからなる理論では共形代数は閉じないことを示している。このように、量子論的な一般座標不変性を現す共形不変性が実現するためには負計量のモードを含む高階微分重力場が必要である。

トレースレステンソル場の共形変換 (4.2.4) とその生成子との関係はゲージ場のときと同様のことが成り立つ。輻射 + ゲージでの共形変換は

$$\begin{aligned}
\delta_\zeta h_{ij}^{\text{TT}} &= \zeta^0 \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} + \zeta^k \hat{\nabla}_k h_{ij}^{\text{TT}} + \frac{1}{2} (\hat{\nabla}_i \zeta^k - \hat{\nabla}^k \zeta_i) h_{kj}^{\text{TT}} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\hat{\nabla}_j \zeta^k - \hat{\nabla}^k \zeta_j) h_{ki}^{\text{TT}} + h_i^{\text{T}} \hat{\nabla}_j \zeta^0 + h_j^{\text{T}} \hat{\nabla}_i \zeta^0 - \frac{2}{3} \gamma_{ij} \hat{\nabla}_k (\zeta^0 h_{\text{T}}^k), \\
\delta_\zeta h_i^{\text{T}} &= \zeta^0 \partial_\eta h_i^{\text{T}} + \zeta^k \hat{\nabla}_k h_i^{\text{T}} + \frac{1}{2} (\hat{\nabla}_i \zeta^k - \hat{\nabla}^k \zeta_i) h_k^{\text{T}} + \hat{\nabla}^k (\zeta^0 h_{ik}^{\text{TT}}), \\
\delta_\zeta h &= 2 \hat{\nabla}^k (\zeta^0 h_k^{\text{T}})
\end{aligned} \tag{5.1.56}$$

と書ける。これだけでは輻射 + ゲージは保存されないが、共形 Killing ベクトル  $\zeta^\mu$  に伴って、モードに依存したパラメータ  $\kappa_\zeta$  をもつ適当なゲージ変換 (4.2.1) を定義し、それらを組み合わせた変換

$$\delta_\zeta^{\text{T}} = \delta_\zeta - \delta_{\kappa_\zeta} \tag{5.1.57}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}\delta_\zeta^\text{T} h_{ij}^{\text{TT}} &= i[Q_\zeta, h_{ij}^{\text{TT}}], \\ \delta_\zeta^\text{T} h_i^\text{T} &= i[Q_\zeta, h_i^\text{T}], \\ \delta_\zeta^\text{T} h &= 0\end{aligned}\tag{5.1.58}$$

のように輻射 + ゲージを保つ共形変換を定義することができる。 $\kappa_\zeta^\mu$  は特殊共形変換の場合にのみ値をもって、その式は少し複雑なのでここでは省略するが、ゲージ場のとくと同様にして求めることができる。

## 5.2 量子重力状態、スケーリング次元とユニタリ性

共形不変性は量子論的一般座標不変性、すなわち背景時空独立性の結果として現れる。ここでは、共形代数の表現として4次元量子重力の物理状態を構成する。

**物理状態の定義** 共形不変な真空は共形変換のすべての生成子  $H$ 、 $R_{MN}$ 、 $Q_M$ 、 $Q_M^\dagger$  の作用にたいして消える状態として定義され、

$$|\Omega\rangle = e^{-2b_1\phi_0}|0\rangle\tag{5.2.1}$$

で与えられる。ここで、 $\phi_0 = \hat{q}/\sqrt{2b_1}$  は共形モード場のゼロモード、 $|0\rangle$  はすべての消滅演算子に対して消える通常の Fock 真空である。

共形不変な真空に生成演算子を作用させて物理状態

$$|\text{phys}\rangle = \mathcal{O}(a_{JM}^\dagger, b_{JM}^\dagger, \dots)|\Omega\rangle\tag{5.2.2}$$

を構成する。演算子  $\mathcal{O}$  の形は一般座標不変な物理状態を定義する共形不変性の条件

$$\begin{aligned}Q_M|\text{phys}\rangle &= 0, \\ (H - 4)|\text{phys}\rangle &= R_{MN}|\text{phys}\rangle = 0\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

から決める。各物理状態に対して共形場演算子  $\mathcal{O}(\eta, \mathbf{x})$  が存在して、状態は  $|\text{phys}\rangle = \lim_{\eta \rightarrow i\infty} e^{-i4\eta} \mathcal{O}(\eta, \mathbf{x}) |\Omega\rangle$  で与えられる。ハミルトニアン条件に現れる共形次元のシフト  $-4$  は共形場の4体積積分  $\int d^4x \mathcal{O}$  が一般座標不変になるように全体の共形次元が消えることを保障している。ここでは輻射<sup>+</sup>ゲージのゴースト場(付録C参照)は積分されているものとする。ゴースト場の寄与を加えると、共形次元を  $-4$  だけシフトさせる効果 (C.1.5) がゴーストハミルトニアンに現れて、通常の  $H = 0$  の Wheeler-DeWitt 拘束条件のかたちになる。

**構成要素** 物理状態の条件より  $\mathcal{O}$  は特殊共形変換の生成子  $Q_M$  と交換する演算子でなければならない。そこで、まずはじめに  $Q_M$  と交換する生成演算子の組み合わせを捜すことにする。各場についてそのような演算子を求めてから、それらを回転不変になるように組み合わせ、最後にハミルトニアン条件を満たすように物理状態を求める。

はじめに簡単なスカラー場の場合について議論する。スカラー場の生成演算子と  $Q_M^X$  との交換関係は

$$[Q_M^X, \varphi_{JM_1}^\dagger] = \sqrt{2J(2J+1)} \sum_{M_2} \epsilon_{M_2} \mathbf{C}_{JM_1, J-\frac{1}{2}-M_2}^{\frac{1}{2}M} \varphi_{J-\frac{1}{2}M_2}^\dagger \quad (5.2.4)$$

で与えられる。このように、 $Q_M^X$  と交換する生成演算子は共形次元1を持つ  $\varphi_{00}^\dagger$  だけである。ここでは、スカラー場に  $Z_2$  対称性  $X \leftrightarrow -X$  を課すことにして、 $\varphi_{00}^\dagger$  の偶数積だけを許すことにする。

次に生成演算子の積で定義された演算子を考える。共形次元  $2L+2$  を持つ表現  $J$  に属する生成複合演算子の一般形は

$$\Phi_{JN}^{[L]\dagger} = \sum_{K=0}^L \sum_{M_1, M_2} f(L, K) \mathbf{C}_{L-KM_1, KM_2}^{JN} \varphi_{L-KM_1}^\dagger \varphi_{KM_2}^\dagger \quad (5.2.5)$$

で与えられる。特殊共形変換の生成子  $Q_M$  との交換関係を計算すると

$$\begin{aligned} [Q_M, \Phi_{JN}^{[L]\dagger}] &= \sum_{K=0}^L \sum_{M_1, M_2} \varphi_{L-K-\frac{1}{2}M_1}^\dagger \varphi_{KM_2}^\dagger \\ &\times \sum_S \left\{ \sqrt{(2L-2K)(2L-2K+1)} f(L, K) \epsilon_S \mathbf{C}_{L-K-\frac{1}{2}M_1, L-K-S}^{\frac{1}{2}M} \mathbf{C}_{L-KS, KM_2}^{JN} \right. \end{aligned}$$

$$+\sqrt{(2K+1)(2K+2)}f\left(L, K+\frac{1}{2}\right)\left.\epsilon_S \mathbf{C}_{KM_2, K+\frac{1}{2}-S}^{\frac{1}{2}M} \mathbf{C}_{K+\frac{1}{2}S, L-K-\frac{1}{2}M_1}^{JN}\right\} \quad (5.2.6)$$

となる。交差関係式 (5.1.51) を用いると、 $f(L, K)$  が漸化式

$$f\left(L, K+\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{(2L-2K)(2L-2K+1)}{(2K+1)(2K+2)}}f(L, K) \quad (5.2.7)$$

を満たし、かつ  $J=L$  で  $L$  が正の整数のときのみ右辺が消えることが分かる。この漸化式を解くと、 $L$  に依存した規格化定数を除いて、係数  $f$  は

$$f(L, K) = \frac{(-1)^{2K}}{\sqrt{(2L-2K+1)(2K+1)}} \binom{2L}{2K} \quad (5.2.8)$$

と決まる。このようにして  $Q_M^X$  と可換な生成複合演算子が求められ、それを  $\Phi_{LN}^\dagger = \Phi_{LN}^{[L]\dagger}$  と書くことにする。 $L=0$  の演算子はすでに求めた  $\Phi_{00}^\dagger = (\varphi_{00}^\dagger)^2$  となる。

演算子  $\Phi_{LN}^\dagger$  を  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数を用いて組み合わせると、 $Q_M^X$  と可換な生成演算子の基底をつくることができる。Clebsch-Gordan 係数がもつ交差関係等により、 $Q_M^X$  と可換ないかなる生成演算子もそのような基本形で表すことができると考えられる。このように、演算子  $\Phi_{LN}^\dagger$  がスカラー場セクターの物理状態の基本的な構成要素であると期待される。

同様に、共形モード場の場合について考える。共形モード場のゼロモードと生成子  $Q_M^\phi$  の交換関係は

$$\begin{aligned} [Q_M^\phi, \hat{q}] &= -a_{\frac{1}{2}M}, \\ [Q_M^\phi, \hat{p}] &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

で与えられる。 $a_{1/2M}^\dagger$  と  $a_{JM}^\dagger$  ( $J \geq 1$ ) モードとの交換関係は

$$\begin{aligned} [Q_M^\phi, a_{\frac{1}{2}M_1}^\dagger] &= \left(\sqrt{2b_1} - i\hat{p}\right) \delta_{M, M_1} \\ [Q_M^\phi, a_{JM_1}^\dagger] &= \alpha \left(J - \frac{1}{2}\right) \sum_{M_2} \mathbf{C}_{JM_1, J-\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \epsilon_{M_2} a_{J-\frac{1}{2}-M_2}^\dagger \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

となる。 $b_{JM}^\dagger$  ( $J \geq 0$ ) モードとの交換関係は

$$\begin{aligned} [Q_M^\phi, b_{JM_1}^\dagger] &= -\gamma(J) \sum_{M_2} C_{JM_1, J+\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \epsilon_{M_2} a_{J+\frac{1}{2}-M_2}^\dagger \\ &\quad -\beta \left( J - \frac{1}{2} \right) \sum_{M_2} C_{JM_1, J-\frac{1}{2}M_2}^{\frac{1}{2}M} \epsilon_{M_2} b_{J-\frac{1}{2}-M_2}^\dagger \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

である。

スカラー場のとおり同じように生成子  $Q_M^\phi$  と交換する共形次元が  $2L$  の生成複合演算子を求めると、整数  $L \geq 1$  にたいして

$$\begin{aligned} S_{LN}^\dagger &= \chi(\hat{p}) a_{LN}^\dagger + \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-\frac{1}{2}} \sum_{M_1, M_2} x(L, K) C_{L-KM_1, KM_2}^{LN} a_{L-KM_1}^\dagger a_{KM_2}^\dagger, \\ S_{L-1N}^\dagger &= \psi(\hat{p}) b_{L-1N}^\dagger + \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-\frac{1}{2}} \sum_{M_1, M_2} x(L, K) C_{L-KM_1, KM_2}^{L-1N} a_{L-KM_1}^\dagger a_{KM_2}^\dagger \\ &\quad + \sum_{K=\frac{1}{2}}^{L-1} \sum_{M_1, M_2} y(L, K) C_{L-K-1M_1, KM_2}^{L-1N} b_{L-K-1M_1}^\dagger a_{KM_2}^\dagger \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

の二種類を得る。ここで、係数は

$$\begin{aligned} x(L, K) &= \frac{(-1)^{2K}}{\sqrt{(2L-2K+1)(2K+1)}} \sqrt{\binom{2L}{2K} \binom{2L-2}{2K-1}}, \\ y(L, K) &= -2\sqrt{(2L-2K-1)(2L-2K+1)} x(L, K) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

で与えられる。ゼロモード  $\hat{p}$  に依存した演算子は

$$\begin{aligned} \chi(\hat{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2(2L-1)(2L+1)}} \left( \sqrt{2b_1} - i\hat{p} \right), \\ \psi(\hat{p}) &= -\sqrt{2} \left( \sqrt{2b_1} - i\hat{p} \right) \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

となる。これら二種類の演算子が共形モード場セクターの物理的状態の基本的な構成要素を与えると期待される。それらを表 5.1 にまとめた。

rank of tensor index	0
creation op.	$S_{LN}^\dagger$ $\mathcal{S}_{L-1N}^\dagger$
weight ( $L \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ )	$2L$

表 5.1: 共形モード場についての物理状態の構成要素。

生成子  $Q_M^h$  と交換するトレースレステンソル場の生成演算子は横波トレースレス場  $h_{ij}^{\text{TT}}$  の最低次の正計量モード  $c_{1(Mx)}^\dagger$  だけであることが分かる。スカラー場、共形モード場の時と同様に、 $Q_M^h$  と可換な生成複合演算子は、具体的な  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数の値は知らなくても、三角不等式と交差関係式を用いて分類をすることができる。この場合階数が 4 までのテンソルの足を持った複合演算子が現れる。表 5.2 にトレースレステンソル場の物理的状態の構成要素をまとめた。具体的な式は複雑なのでここでは割愛する。

rank of tensor index	0	1	2	3	4
creation op.	$A_{LN}^\dagger$ $\mathcal{A}_{L-1N}^\dagger$	$B_{L-\frac{1}{2}(Ny)}^\dagger$	$c_{1(Nx)}^\dagger$	$D_{L-\frac{1}{2}(Nz)}^\dagger$	$E_{L(Nw)}^\dagger$ $\mathcal{E}_{L-1(Nw)}^\dagger$
weight ( $L \in \mathbf{Z}_{\geq 3}$ )	$2L$	$2L$	2	$2L$	$2L$

表 5.2: トレースレステンソル場についての物理状態の構成要素。

物理状態とスケーリング次元 物理状態は、上で求めた構成要素を共形不変な真空に作用させて、 $S^3$  回転不変になるように  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数を用いてテンソルの足をすべて縮約し、ハミルトニアン条件を満たすように共形モード場のゼロモードを決めると、構成できる。

ハミルトニアン条件を満たす状態を構成するために  $Q_M$  不変な  $\hat{p}$  の固有状態

$$|p, \Omega\rangle = e^{ip\hat{q}}|\Omega\rangle = e^{ip\sqrt{2b_1}\phi_0}|\Omega\rangle \quad (5.2.15)$$

を導入する。ここで、 $\hat{p}$ の固有値は $p + i\sqrt{2b_1}$ になる。この状態に $Q_M$ と可換な構成要素を回転不変に組んで作用させたものを $\mathcal{R}_n(S^\dagger, \dots)|p, \Omega\rangle$ と書く。ここで、 $n$ は演算子 $\mathcal{R}_n$ の共形次元を表している。状態の構成の仕方から分かるように、 $n$ は正の偶数で与えられる。2次元量子重力の時のような有理数や負になるような演算子は出てこない。この状態のハミルトニアン条件は $(p + i\sqrt{2b_1})^2/2 + b_1 + n = 4$ になる。Riegert作用の前の係数は $b_1 > 4$ を満たすことから、 $p$ の値は純虚数になる。二つある解の中で、大きな $b_1$ の極限で正準値 $4 - n$ に近づく方を選んで $p = -i\gamma_n/\sqrt{2b_1}$ と書くと、その解は

$$\begin{aligned}\gamma_n &= 2b_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4-n}{b_1}} \right) \\ &= 4 - n + \frac{(4-n)^2}{4b_1} + o(1/b_1^2)\end{aligned}\quad (5.2.16)$$

で与えられ、物理的状态は

$$\mathcal{R}_n(S^\dagger, \dots)e^{\gamma_n\phi_0}|\Omega\rangle \quad (5.2.17)$$

となる。

例として共形次元 $n$ が4以下の物理状態について見てみる。恒等演算子 (identity operator) $\mathcal{R}_0 = I$ が量子重力の衣を着た状態は

$$e^{\gamma_0\phi_0}|\Omega\rangle \quad (5.2.18)$$

で与えられる。これは物理的な計量を与える宇宙項に相当する。 $n = 2$ の状態は

$$S_{00}^\dagger e^{\gamma_2\phi_0}|\Omega\rangle, \quad \Phi_{00}^\dagger e^{\gamma_2\phi_0}|\Omega\rangle \quad (5.2.19)$$

で与えられる。左はスカラー曲率 $\sqrt{-g}R$ 、右は $\sqrt{-g}X^2$ にそれぞれ相当する。 $n = 4$ の状態は、 $\gamma_4 = 0$ であることを考慮して、

$$\begin{aligned}\sum_{N,x} \epsilon_N c_{1(-Nx)}^\dagger c_{1(Nx)}^\dagger |\Omega\rangle, \quad S_{00}^\dagger S_{00}^\dagger |\Omega\rangle, \quad \sum_N \epsilon_N S_{1-N}^\dagger S_{1N}^\dagger |\Omega\rangle, \\ \Phi_{00}^\dagger S_{00}^\dagger |\Omega\rangle, \quad (\Phi_{00}^\dagger)^2 |\Omega\rangle\end{aligned}\quad (5.2.20)$$

で与えられる。

共形不変性は一般座標不変性と同等である。ゼロモード  $p$  が純虚数であることは共形場がスカラー曲率のような一般座標不変な実数の複合場であることを表している。相関関数を求めるためには、2次元量子重力のときと同様、Einstein作用のようなゼロモード電荷  $\gamma_n$  をもったポテンシャル項を作用に加えて議論する必要がある。2次元では相関関数を計算する方法が開発されているが、4次元量子重力ではまだその方法は確立していない。

相関関数の計算は難しいけれども、その振る舞いを規定する量子重力の共形場  $\mathcal{O}_n = \mathcal{R}_n e^{\gamma_n \phi}$  のスケーリング次元は次のように計算することができる。2次元のときと同様に、そのスケーリング次元を  $\Delta_n$  として定数 Weyl スケール変換  $d^4x \mathcal{O}_n \rightarrow \omega^{4-\Delta_n} d^4x \mathcal{O}_n$  を考える。距離の基準となる  $n=0$  の宇宙項のスケーリング次元をゼロとすると、Weyl スケール変換は共形モード場のゼロモードのシフト  $\phi_0 \rightarrow \phi_0 + (4/\gamma_0) \ln \omega$  として表される。ゼロモード因子  $e^{\gamma_n \phi_0}$  をもつ共形場  $\mathcal{O}_n$  ( $n > 0$ ) はこの変換の下で  $d^4x \mathcal{O}_n \rightarrow \omega^{4\gamma_n/\gamma_0} d^4x \mathcal{O}_n$  と変換することからそのスケーリング次元は

$$\Delta_n = 4 - 4 \frac{\gamma_n}{\gamma_0} \quad (5.2.21)$$

で与えられることが分かる。これは、4次元での共形場の物理的条件  $\Delta_n > 1$  を満たしている。

これら一般座標不変な物理状態は正計量のモードと負計量のモードが交じり合った状態として記述され、負計量のモードが単独で現れることはない。この点が1970年代に研究された高階微分量子重力との大きな違いの一つである。当時はゲージ対称性として一般座標変換(4.2.1)だけを考慮していたため、結合定数が消える極限では正計量と負計量のモードが交わることがなく、ゲージ不変な漸近場として負計量のモードが単独で現れてユニタリ性を壊していた。一方、ここでは一般座標不変性をあらかず共形不変性によって二つのモードが結びついて、負計量モードが単独で現れることを禁止している。

このことから、ユニタリ性にとって大事なものはゲージ不変ではない各

モードの符号ではなく、一般座標不変な組み合わせである重力場作用全体の符号の正しさであるといえる。くりこみ可能な量子重力の作用は下にバウンドされた正しい符号をもっているので経路積分が正しく定義され、物理状態である共形場の実数性を破るような要因が存在しない。それゆえ、その2点相関関数の振幅はユニタリ性の条件である正の数となることが期待される。特に  $n = 2$  のスカラー曲率に相当する演算子の2点相関関数は宇宙初期のスペクトルを与える。

結合定数が大きくなるとこんどは相互作用によって正計量と負計量のモードが交わり始める。一方で共形不変性は破れ始め、いわゆる漸近場を定義することのできる古典的な時空が現れる。第2章の最後に議論したように、この場合は1970年代の議論が適用できて、負計量のモードは相互作用によってその伝播関数の極が虚数となり、現実の世界には現れないことが示せる。このように負計量のモードは量子論的なバーチャル状態として、特異点の解消やくりこみ可能性を保障するために存在するゴーストで、現実の世界に現れることはないと考えられる。それは、4階微分量子重力作用が(2.1.1)のように $\hbar$ を含まないことから示唆される。

## 第6章 くりこみ理論

この章では前章まで議論してきた共形場理論からの摂動展開として4次元量子重力のくりこみ理論を構築する。それは Weyl 作用の前の結合定数  $t$  についての摂動展開で与えられる。

具体的な計算方法として、いくつかある紫外発散の正則化法のなかで、ここでは次元正則化を用いる。この方法は現在一般座標不変性を保ったまま高次のくりこみ計算ができる唯一の正則化法である。

この方法の特徴は測度の選び方によらないことである。4次元で定義された DeWitt-Schwinger 法などでは発散量である  $\delta^{(4)}(0) = \langle x|x' \rangle|_{x' \rightarrow x}$  を有限化して評価する<sup>1</sup>。それが経路積分測度からの寄与に相当するが、次元正則化ではこの量は  $\delta^{(D)}(0) = \int d^D k = 0$  により恒等的にゼロになる。次元正則化では測度からの寄与に相当する共形異常は4次元と  $D$ 次元の間に含まれていて、有限化した後に4次元にもどしてもその寄与は残る。そのため、 $D$ 次元での共形モードの依存性を注意深く扱う必要がある。

### 6.1 次元正則化と $D$ 次元量子重力作用

この章では簡単のためフェルミオンのフレーバー数が  $n_F$  の量子電磁気学 (QED) と結合した系を例に議論する。 $D$ 次元での量子重力の裸の作用

---

<sup>1</sup>理論に固有な正定置の正則化演算子  $D$  を用いて  $\delta^{(4)}(0) = \langle x|e^{-tD}|x \rangle|_{t \rightarrow 0}$  と書くことができる。この量は熱伝道方程式  $(\partial_t + D)\langle x|e^{-tD}|x \rangle = 0$  を解くことで求めることができる。そのため熱核 (Heat Kernel) 法とも呼ばれる。

は、あらかじめ Euclid 計量に Wick 回転して、

$$I = \int d^D x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 + bE_D + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{n_F} i\bar{\psi}_j \not{D}\psi_j - \frac{M_P^2}{2} R + \Lambda \right\} \quad (6.1.1)$$

で与えられる。最初の重力作用は  $D$  次元に一般化された Weyl 作用で、

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma} - \frac{4}{D-2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{2}{(D-1)(D-2)} R^2 \quad (6.1.2)$$

と定義される。 $E_D$  は拡張された Euler 密度  $E_4$  を  $D$  次元に一般化したもので、

$$E_D = G_D - \frac{4(D-3)^2}{(D-1)(D-2)} \nabla^2 R \quad (6.1.3)$$

と定義される。ここで、

$$G_D = G_4 + \frac{(D-3)^2(D-4)}{(D-1)^2(D-2)} R^2 \quad (6.1.4)$$

である。 $G_4$  は (2.1.4) 式で与えられる通常の Euler 密度の組み合わせで、 $G_D$  はそれを  $D$  次元に一般化したものである。 $E_D$  を時空体積で積分した作用は  $G_D$  を時空体積で積分したものと同一である。

Dirac 微分演算子は  $\not{D} = e^{\mu\alpha} \gamma_\alpha D_\mu$  で定義される。ここで、 $e_\mu^\alpha$  は 4 脚場 (vierbein field) の  $D$  次元版で、関係式  $e_\mu^\alpha e_{\nu\alpha} = g_{\mu\nu}$  と  $e_{\mu\alpha} e^\mu_\beta = \delta_{\alpha\beta}$  を満たす。Dirac のガンマ行列は  $\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = -2\delta_{\alpha\beta}$  と規格化されている。フェルミオン場に作用する共変微分は  $D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} + ieA_\mu$  で定義される。ここで、接続 1 フォーム (connection 1-form) と Lorentz 生成子は、それぞれ  $\omega_{\mu\alpha\beta} = e^\nu_\alpha (\partial_\mu e_{\nu\beta} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_{\lambda\beta})$  と  $\Sigma^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$  で与えられる。詳しいことは付録 A.2 にまとめている。

トレースレステンソル場、ゲージ場、フェルミオン場のくりこみ定数は通常の処方箋にしたがって

$$A_\mu = Z_3^{1/2} A_\mu^r, \quad \psi_j = Z_2^{1/2} \psi_j^r, \quad h_{\mu\nu} = Z_h^{1/2} h_{\mu\nu}^r \quad (6.1.5)$$

と定義する。また、QED とトレースレスモードの結合定数については

$$e = Z_e e_r, \quad t = Z_t t_r \quad (6.1.6)$$

と定義する。Ward-Takahashi 恒等式 ( $Z_1 = Z_2$ ) は量子重力と結合した系でも成り立って、くりこみ定数は  $Z_e = Z_3^{-1/2}$  を満たす。

量子重力のくりこみでもっとも特徴的なことは、共形モード場がくりこみを受けないことである。これは共形モード場に結合定数を導入していないからで、くりこみ定数は

$$Z_\phi = 1 \quad (6.1.7)$$

となる。

次元正則化では紫外発散は  $D - 4$  の負べきで現れる。そのため、それらを除くためのくりこみ定数は  $D - 4$  の Laurent 展開で与えられ、

$$Z_3 = 1 + \frac{x_1}{D-4} + \frac{x_2}{(D-4)^2} + \dots \quad (6.1.8)$$

のように定義される。その他の  $Z$  定数も同様に展開される。ここで、留数  $x_1$ 、 $x_2$  はくり込まれた結合定数  $e_r$  と  $t_r$  の関数で与えられる。

一方、Euler 密度に比例した紫外発散を取り除くために導入した定数  $b$  は、Euler 項が運動項をもたないため、新たな結合定数ではない。そのため、 $D - 4$  の負べきだけで

$$b = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(D-4)^n} \quad (6.1.9)$$

のように展開され、留数  $b_n$  は結合定数  $e_r$  と  $t_r$  の関数で与えられる。

量子重力作用の決定 4次元量子重力の作用は一般座標不変性と積分可能条件を課すと不定性なしに決まるが、 $D$  次元では任意性が現れる。先に定義した重力作用は、 $D$  次元に一般化された積分可能条件と2次元量子重力との類似性を課すことで、任意性を固定して決定している。それについて以下で説明する。

積分可能条件 (2.1.10) を  $D$  次元に一般化した式は

$$4\eta_1 + D\eta_2 + 4(D-1)\eta_3 + (D-4)\eta_4 = 0 \quad (6.1.10)$$

で与えられる (付録 A.1 参照)。これを満たす作用の一つが  $D$  次元に一般化された Weyl テンソルの 2 乗である。

積分可能条件を満たす組み合わせとして、ほかに  $G_4$  と

$$M_D = \nabla^2 R - \frac{D-4}{4(D-1)} R^2 \quad (6.1.11)$$

がある。 $M_D$  は自明な共形異常  $\nabla^2 R$  の一般化であるが、 $D$  次元ではもはや自明ではない。作用  $E_D$  はこの二つの組み合わせ

$$E_D = G_4 + \eta M_D \quad (6.1.12)$$

で与えられる。パラメータ  $\eta$  は積分可能条件だけでは決まらないので、ここでは 2 次元量子重力との類似性を使って決めることにする。

2 次元量子重力の作用はスカラー曲率  $R$  で与えられる。2 次元の近傍で  $D$  次元に一般化しても一般座標不変な作用は  $R$  だけである。この作用を 2 次元のまわりで

$$\int d^D x \sqrt{g} R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D-2)^n}{n!} S_n^{(2)}(\phi, \bar{g}) \quad (6.1.13)$$

と展開すると、各項  $S_n^{(2)}$  は

$$S_n^{(2)}(\phi, \bar{g}) = \int d^D x \sqrt{\bar{g}} \left\{ \phi^n \bar{\Delta}_2 \phi + \bar{R} \phi^n + o(\phi^n) \right\} \quad (6.1.14)$$

のような性質をもっている。ここで、 $o(\phi^n)$  は高々  $\phi$  の  $n$  乗積の項である。 $S_1^{(2)}$  は第 3 章で扱った Liouville 作用である。

同様のことを 4 次元近傍で考えてみる。作用  $E_D$  の 4 次元のまわりの展開

$$\int d^D x \sqrt{g} E_D = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D-4)^n}{n!} S_n(\phi, \bar{g}) \quad (6.1.15)$$

を考え、展開された各項が

$$S_n(\phi, \bar{g}) = \int d^D x \sqrt{\bar{g}} \left\{ 2\phi^n \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi^n + o(\phi^n) \right\} \quad (6.1.16)$$

の性質を持つものを探ることにする。ここで、 $S_1$  は第 4 章で導入した Riegert 作用である。この条件のもとで、不定パラメータは唯一に決まって

$$\eta = -\frac{4(D-3)^2}{(D-1)(D-2)} \quad (6.1.17)$$

で与えられる。この値は4次元では $-2/3$ となり拡張されたオイラー密度 $E_4$ の組み合わせと一致する。

このようにして決めた作用 $G_D(6.1.4)$ はHathrell<sup>2</sup>による曲がった時空での3ループ( $e_r^6$ )の共形異常の計算結果を再現する。彼の計算では重力の裸の作用、すなわちくりこみ項として $D$ 次元Weyl作用のほかに、

$$bG_4 + cH^2 \quad (6.1.18)$$

が採用されている。ここで、 $H = R/(D-1)$ である。量子重力の作用 $bG_D$ は二つの係数の間に

$$c = \frac{(D-3)^2(D-4)}{(D-2)}b \quad (6.1.19)$$

の関係があることを言っている。この関係式は、 $b$ のLaurent展開式(6.1.9)を使い、 $c$ も $b$ と同様にLaurent展開すると、留数の間に関係式

$$c_1 = \frac{(D-3)^2}{D-2}b_2 = \frac{1}{2}b_2 + o(D-4) \quad (6.1.20)$$

が成り立つことを意味している。Hathrellの結果は正にこの関係式が $e_r^6$ で成り立つことを示している。彼はさらにこの関係がQEDだけでなく、4点相互作用を持つスカラー場の場合にも成り立つことを示している。その後、この関係式は非可換ゲージ場の場合にも成り立つことが示された。このことは、 $G_D$ の組み合わせが普遍的であること示唆している。

以下の議論ではこの作用を用いて高次のくりこみ計算を行い、矛盾がないことを示す。特に、くりこみ可能条件でもある $Z_\phi = 1(6.1.7)$ が成り立つことを具体的な計算によって示す。

## 6.2 くりこみの処方箋と共形異常

くりこみは裸の作用をくり込まれた量を用いてLaurent展開することで実行される。その際 $D-4$ の負べきを持った項を紫外発散を消去する

<sup>2</sup>S. Hathrell, Ann. of Phys. 142 (1982) 34.

ためのくりこみ項 (counterterm) とし、ゼロ又は正のべきをもった項を新たな運動項や相互作用項として扱う。

はじめにゲージ場の場合を議論する。くりこみ定数  $Z_3$  の Laurent 展開式 (6.4.12) を使うとゲージ場の裸の作用は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4} Z_3 \int d^D x e^{(D-4)\phi} F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} \\
&= \frac{1}{4} \int d^D x \left\{ \left( 1 + \frac{x_1}{D-4} + \frac{x_2}{(D-4)^2} + \dots \right) F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \left( D-4 + x_1 + \frac{x_2}{D-4} + \dots \right) \phi F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( (D-4)^2 + (D-4)x_1 + x_2 + \dots \right) \phi^2 F_{\mu\nu}^r F_{\lambda\sigma}^r \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\sigma} \right. \\
&\quad \left. + \dots \right\} \tag{6.2.1}
\end{aligned}$$

のように展開される。ここで、くり込まれたゲージ場は

$$F_{\mu\nu}^r = \nabla_\mu A_\nu^r - \nabla_\nu A_\mu^r = \partial_\mu A_\nu^r - \partial_\nu A_\mu^r \tag{6.2.2}$$

で与えられる。Laurent 展開式 (6.2.1) の最初の列はゲージ場の通常の運動項とくりこみ項である。トレースレステンソル場で展開するとさらに相互作用項とそれに伴うくりこみ項が現れる。

第二列は通常の平坦な時空上の量子化では現れない項で、 $\phi F_{\mu\nu}^{r2}$  はゲージ場の共形異常  $F_{\mu\nu}^{r2}$  を共形モード場について積分して得られる Wess-Zumino 作用である。逆に、この作用を共形モード場で変分すると共形異常が得られる。このように共形異常はベータ関数と関係していて、共形異常の「異常」はゲージ異常ではなく異常次元のそれに対応する。第三列は高次の共形異常を出す項である。

同様に、Weyl 作用を考えることが出来る。<sup>3</sup>  $D$  次元では共形モー

<sup>3</sup>量子重力のくりこみ項は Duff, Nucl. Phys. B125 (1977) 334 が採用したくりこみ項とは異なることに注意。Duff のくりこみ項は  $D$  次元の積分可能条件を満たさない  $4$  次元で定義された Weyl テンソルの二乗のため、1 ループでの有限項 (余分な  $R^2$  項の出現) や共形異常の高次補正に違いが現れてきて問題となる。

ド依存性が

$$\frac{1}{t^2} \int d^D x \sqrt{g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 = \frac{1}{t^2} \int d^D x \sqrt{\bar{g}} e^{(D-4)\phi} \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \quad (6.2.3)$$

となるので、裸の量をくり込まれた量に置き換えて Laurent 展開すると相互作用項及びくりこみ項が出てくる。その中に共形異常に関係した Wess-Zumino 相互作用  $\phi^n \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$  が現れる。

次に Euler 項を議論する。係数  $b$  の Laurent 展開式 (6.1.9) と Euler 密度の展開式 (6.1.15) から裸の作用は

$$\begin{aligned} & b \int d^D x \sqrt{g} E_D \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^D x \left\{ \left( \frac{b_1}{D-4} + \frac{b_2}{(D-4)^2} + \dots \right) \bar{G}_4 \right. \\ & \quad \left. + \left( b_1 + \frac{b_2}{D-4} + \dots \right) \left( 2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi + \frac{1}{18} \bar{R}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left( (D-4)b_1 + b_2 + \dots \right) \left( 2\phi^2 \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi^2 + \dots \right) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

と展開される。展開の最初の列は  $G_4$  に比例した発散を取り除くためのくりこみ項である。第二列はその発散から誘導される Wess-Zumino 作用  $S_1$  で、Riegert 作用  $S_R$  (4.1.5) のことである。この作用が共形モードの運動項を与える。第三列は高次で現れる新たな Wess-Zumino 作用  $S_2$  である。

係数  $b_n$  は一般に結合定数に依存した関数であるが、最低次の  $b_1$  は定数項を含んでいる。この定数項から伝播関数が定義されるので、以下では

$$b_1(t_r, e_r) = b_1 + b'_1(t_r, e_r) \quad (6.2.5)$$

のように定数項を  $b_1$  と書き、その他の結合定数による部分を  $b'_1$  と書いて区別することにする。一方、 $n \geq 2$  の係数はこのような定数項を含まない。

フェルミオンの作用は一般の  $D$  次元で共形不変である (付録 A.2 参照)。すなわちフェルミオン場を適当に再定義することで共形モード依存性を吸収することが出来る。次元正則化は測度の選び方によらないので、共

形モード依存性が消えるように定義されたフェルミオン場を使うことにする。裸のフェルミオン作用を平坦な背景時空のまわりで展開すると

$$\begin{aligned}
& \int d^D x i \bar{\psi} \not{D} \psi \\
&= \int d^D x \left\{ i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - i \frac{t}{4} (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) h_{\mu\nu} \right. \\
&\quad + i \frac{t^2}{16} (\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi) h_{\mu\lambda} h_{\nu\lambda} + i \frac{t^2}{16} \bar{\psi} \gamma_{\mu\nu\lambda} \psi h_{\mu\sigma} \partial_\lambda h_{\nu\sigma} \\
&\quad \left. - e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu + \frac{et}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\nu h_{\mu\nu} - \frac{et^2}{8} \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\nu h_{\mu\lambda} h_{\nu\lambda} \right\} + o(t^3)
\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

となる。ここで、 $\gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3!}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda + \text{anti-sym.})$  である。裸の結合定数  $e$  と  $t$ 、裸のフェルミオン場  $\psi$  をくり込まれた量で展開すると、相互作用項及びくりこみ項を得る。平坦な Euclid 背景時空の脚はすべて下付で表し、同じものは  $\delta_{\mu\nu}$  で縮約をとるものとする。

### 6.3 伝播関数と相互作用

共形モード場とトレースレステンソル場の運動項を導出する。さらに、Wess-Zumino 作用を結合定数で展開して、以下の計算で必要なこれらの場間の相互作用を書き下す。

トレースレステンソル場のゲージ固定 くりこみ計算を行うために、トレースレステンソル場のゲージ固定を行う。Weyl 作用の運動項は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t^2} \int d^D x \sqrt{g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \\
&= \int d^D x \left\{ \frac{D-3}{D-2} (h_{\mu\nu} \partial^4 h_{\mu\nu} + 2\chi_\mu \partial^2 \chi_\mu) - \frac{D-3}{D-1} \chi_\mu \partial_\mu \partial_\nu \chi_\nu \right\}
\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

で与えられる。ここで、 $\chi_\mu = \partial_\lambda h_{\lambda\mu}$ 、平坦な Euclid 背景時空でのダランベールシアンを  $\partial^2 = \partial_\lambda \partial_\lambda$  と書いている。

BRST ゲージ固定の処方箋に従ってゲージ固定項とそれに伴うゴースト作用

$$I_{\text{GF+FP}} = \int d^D x \delta_B \left\{ \tilde{c}_\mu N_{\mu\nu} \left( \chi_\nu - \frac{\zeta}{2} B_\nu \right) + \tilde{c} \left( \partial_\mu A_\mu - \frac{\alpha}{2} B \right) \right\} \quad (6.3.2)$$

を導入する。 $\tilde{c}_\mu$  と  $\tilde{c}$  は反ゴースト場、 $B_\mu$  と  $B$  は補助場である。 $N_{\mu\nu}$  は対称な 2 階微分の演算子で、ここでは

$$N_{\mu\nu} = \frac{2(D-3)}{D-2} \left( -2\partial^2 \delta_{\mu\nu} + \frac{D-2}{D-1} \partial_\mu \partial_\nu \right) \quad (6.3.3)$$

を採用する。

トレースレステンソル場及びゲージ場の BRST 変換は、一般座標変換の変数  $\xi^\mu/t$  をゴースト場  $c^\mu$  に、 $U(1)$  ゲージ変換の変数をゴースト場  $c$  に置き換えて、

$$\begin{aligned} \delta_B h_{\mu\nu} &= \partial_\mu c_\nu + \partial_\nu c_\mu - \frac{2}{D} \delta_{\mu\nu} \partial_\lambda c_\lambda + t c_\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{t}{2} h_{\mu\lambda} (\partial_\nu c_\lambda - \partial_\lambda c_\nu) + \frac{t}{2} h_{\nu\lambda} (\partial_\mu c_\lambda - \partial_\lambda c_\mu) + \dots, \\ \delta_B A_\mu &= \partial_\mu c + t (c_\lambda \partial_\lambda A_\mu + A_\lambda \partial_\mu c_\lambda) \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

で与えられる。このとき、ゴースト場、反ゴースト場、補助場の BRST 変換は

$$\begin{aligned} \delta_B c_\mu &= t c_\lambda \partial_\lambda c_\mu, \\ \delta_B c &= t c_\lambda \partial_\lambda c, \\ \delta_B \tilde{c}_\mu &= B_\mu, \quad \delta_B B_\mu = 0, \\ \delta_B \tilde{c} &= B, \quad \delta_B B = 0 \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

となる。

共形モード場はゲージ固定項には現れない。その BRST 変換は

$$\delta_B \phi = t c_\lambda \partial_\lambda \phi + \frac{t}{D} \partial_\lambda c_\lambda \quad (6.3.6)$$

で与えられる。

BRST 変換を使うとゲージ固定項とゴースト作用は

$$I_{GF+FP} = \int d^D x \left\{ B_\mu N_{\mu\nu} \chi_\nu - \frac{\zeta}{2} B_\mu N_{\mu\nu} B_\nu - \tilde{c}_\mu N_{\mu\nu} \partial_\lambda (\delta_B h_{\nu\lambda}) \right. \\ \left. + B \partial_\mu A_\mu - \frac{\alpha}{2} B^2 - \tilde{c} \partial_\mu (\delta_B A_\mu) \right\} \quad (6.3.7)$$

と書ける。さらに、補助場  $B$  と  $B_\mu$  を積分して消去するとゲージ固定項は<sup>4</sup>

$$I_{GF} = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2\zeta} \chi_\mu N_{\mu\nu} \chi_\nu + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right\} \quad (6.3.8)$$

となる。ここで、 $\alpha = 1$ 、 $\zeta = 1$  を Feynman ゲージと呼ぶ。以下ではこのゲージを使う。

裸の量をくり込まれた量に置き換えると伝播関数、頂点関数及び紫外発散を取り除くためのくりこみ項が導かれる。その際、ゲージ固定パラメータのくりこみ定数は  $\alpha = Z_3 \alpha_r$  と  $\zeta = Z_h \zeta_r$  で定義される。このとき、各運動項のくりこみ項はゲージ不変な形になる。また、ゴースト場に対しても新たなくりこみ定数を導入する必要がある。

Feynman ゲージでは運動項の中の最初の  $h_{\mu\nu}^r \partial^4 h_{\mu\nu}^r$  項だけが残って、トレースレステンソル場の伝播関数は

$$\langle h_{\mu\nu}^r(k) h_{\lambda\sigma}^r(-k) \rangle = \frac{D-2}{2(D-3)} \frac{1}{k^4} I_{\mu\nu,\lambda\sigma}^H \quad (6.3.9)$$

で与えられる。ここで、

$$I_{\mu\nu,\lambda\sigma}^H = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda}) - \frac{1}{D} \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma} \quad (6.3.10)$$

はトレースレス成分への射影を表す演算子で、 $I_H^2 = I_H$  を満たす。

共形モード場の伝播関数及び相互作用 共形モード場の伝播関数及びトレースレステンソル場との相互作用項を書き下す。Laurent 展開式 (6.2.4) の第二列の最初の項

$$\frac{b_1}{(4\pi)^2} S_1(\phi, \bar{g}) = \frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^D x \left\{ 2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi + \frac{1}{18} \bar{R}^2 \right\} \quad (6.3.11)$$

<sup>4</sup> $B_\mu$  を積分すると  $\det^{-1/2}(N_{\mu\nu})$  が現れる。背景場の方法のように曲がった背景時空を考える場合はこの行列式を評価する必要がある。

から伝播関数

$$\langle \phi(k)\phi(-k) \rangle = \frac{(4\pi)^2}{4b_1} \frac{1}{k^4} \quad (6.3.12)$$

が求まる。ここで、 $b_1$  はモデルによって決まる数であるが、ループ計算の際は任意の数として実行する。

結合定数  $t$  で展開すると共形モード場とトレースレステンソル場との相互作用項を得られる。以下の計算で必要な項は

$$\begin{aligned} L_{S_1}^2 &= \frac{b_1}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{2}{3} t \partial^2 \phi \partial_\mu \partial_\nu h_{\mu\nu} + \frac{1}{18} t^2 (\partial_\mu \partial_\nu h_{\mu\nu})^2 \right\}, \\ L_{S_1}^3 &= \frac{2b_1}{(4\pi)^2} t \left\{ 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \partial^2 \phi + \frac{4}{3} \partial_\mu \partial_\lambda \phi \partial_\nu \partial_\lambda \phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \partial_\lambda \phi \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \phi - 2\partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^2 \phi \right\} h_{\mu\nu}, \\ L_{S_1}^4 &= \frac{2b_1}{(4\pi)^2} t^2 \left\{ \partial^2 \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi h_{\mu\lambda} h_{\nu\lambda} + \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial_\lambda \partial_\sigma \phi h_{\mu\nu} h_{\lambda\sigma} \right. \\ &\quad \left. + h \text{ の微分を含む項} \right\} \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

である。ここで、 $L_{S_1}^2$  は  $\bar{E}_4\phi$  中の  $(\bar{\nabla}^2 \bar{R})\phi$  項と  $\bar{R}^2$  項から、相互作用  $L_{S_1}^3$  と  $L_{S_1}^4$  はどちらも  $\phi \bar{\Delta}_4\phi$  項から導かれる。

## 6.4 くりこみ定数の計算

この節ではいくつか具体的な計算を示しながら紫外発散のくりこみを議論する。以下の計算からも分かるように、量子重力ではループ展開は  $\hbar$  展開にはならない。これは、共形モード場の運動項である Wess-Zumino 作用が量子効果として現れることから分かる。第2章でも述べたように、4次元の4階微分重力作用は Weyl 作用も含めて完全に無次元の量であり、 $\hbar$  のゼロ次で与えられることに由来する。

紫外発散を取り扱うために、ここでは重力場のモードに無限小の質量  $z$  を加えて正則化する。すなわち  $\phi$  や  $h_{\mu\nu}$  の伝播関数の運動量依存性を  $1/(k^2 + z^2)^2$  と置き換えて計算する。このとき紫外発散は  $\log z^2$  の形で現れる。この質量項はゲージ不変ではないので最終的には相殺する。

一方、Einstein 項や宇宙項は質量項と見なすことはできない。4 階微分重力作用は結合定数  $t_r$  の展開にともなって共形モード場の依存性が多項式で現れるが、宇宙項や Einstein 作用は結合定数の最低次でも共形モード場の指数関数を含む形でゲージ不変になるため、場の二次の項で定義されるゲージ不変な質量項を与えない。共形不変性は  $M_P$  等の依存性がべき的な振る舞いをするを示唆している。このような複合場のくりこみ計算は後の節で議論する。

ここで、以下の計算に出てくる量をまとめて

$$D = 4 - 2\epsilon, \quad t_r = \tilde{t}_r \mu^\epsilon, \quad e_r = \tilde{e}_r \mu^\epsilon, \quad b = \tilde{b} \mu^{-2\epsilon} \quad (6.4.1)$$

と定義しておく。 $\tilde{t}_r$  と  $\tilde{e}_r$  は無次元化された結合定数で、 $\mu$  は任意の質量スケールである。指数関数の肩にも現れる共形モード場は  $D$  次元でも無次元の場である。これに対し、結合定数と組で現れるトレースレステンソル場は次元  $\mu^{-\epsilon}$  を持つ。

共形モード場の非くりこみ定理 (1) はじめに、Feynman グラフが図 6.1 で与えられる次数  $t_r^2$  の共形モード場の 2 点関数の計算を行い、この場が固有の結合定数を持たないことからくりこみを受けないことを直接的に示す。

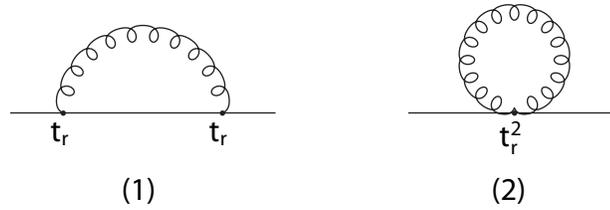


図 6.1: 共形モード場の次数  $t_r^2$  の補正。

相互作用  $L_{S_1}^3$  より、図 6.1(1) からの寄与は

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \phi(k) \phi(-k) \left\{ \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{b_1}{6} \frac{t_r^2}{(4\pi)^2} \frac{D-2}{2(D-3)} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l^2+z^2)^2 \{(l+k)^2+z^2\}^2} \\
& \times \left[ 6(l^2 k^6 + l^6 k^2) + 24l^4 k^4 - 16(l \cdot k)(l^2 k^4 + l^4 k^2) - 20(l \cdot k)^2 l^2 k^2 \right. \\
& \quad - 2(l \cdot k)^2 (l^4 + k^4) + 8(l \cdot k)^3 (l^2 + k^2) + 8(l \cdot k)^4 \\
& \quad + \frac{4-D}{3D} \left( -36l^4 k^4 + 24(l \cdot k)(l^2 k^4 + l^4 k^2) + 40(l \cdot k)^2 l^2 k^2 \right. \\
& \quad \left. \left. - 4(l \cdot k)^2 (l^4 + k^4) - 16(l \cdot k)^3 (l^2 + k^2) - 16(l \cdot k)^4 \right) \right]. \quad (6.4.2)
\end{aligned}$$

となる。付録 D の公式を用いて運動量  $l$  の積分を  $z \ll 1$  の条件で実行すると、 $\{ \}$  括弧内は

$$\frac{2b_1}{(4\pi)^2} k^4 \left[ -3 \frac{\tilde{t}_r^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\bar{\epsilon}} - \log \frac{z^2}{\mu^2} + \frac{7}{6} \right) \right], \quad (6.4.3)$$

と計算される。ここで、 $1/\bar{\epsilon} = 1/\epsilon - \gamma + \log 4\pi$  と定義している。このとき非局所項  $\log k^2/\mu^2$  は相殺して現れない。

オタマジャクシ (tadpole) 図 6.1(2) からの寄与は相互作用  $L_{S_1}^4$  より容易に計算できる。 $h_{\mu\nu}$  の微分が含まれる相互作用項が関係する図は運動量積分をすると消えるので、記された 2 項だけが寄与して

$$\frac{2b_1}{(4\pi)^2} k^4 \left[ 3 \frac{\tilde{t}_r^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\bar{\epsilon}} - \log \frac{z^2}{\mu^2} + \frac{7}{12} \right) \right]. \quad (6.4.4)$$

を得る。

二つの Feynman グラフからの寄与を足すと紫外発散及び赤外発散が相殺することが分かる。このように  $t_r^2$  の次数で  $Z_\phi = 1$  が示された。

トレースレステンソル場のくりこみ トレースレステンソル場のくりこみは 2 点関数と 3 点関数を計算することが必要である (図 6.2)。ここで、Weyl 作用はトレースレスモードの 2 点関数及び 3 点関数を含むが、係数  $b_n$  を決めるために必要な  $\bar{G}_4$  に比例したくりこみ項は 3 点関数からしか現れない。

トレースレステンソル場のくりこみ計算は大変である。ここでは、非可換ゲージ場や重力場のくりこみの際にしばしば用いられる方法である

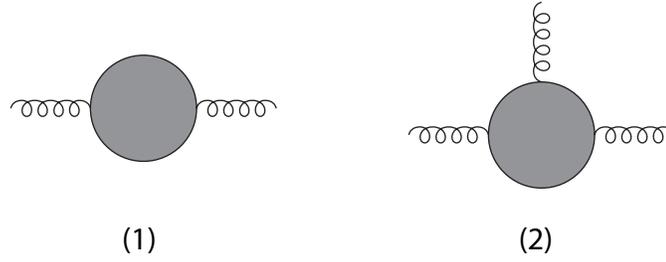


図 6.2: トレースレステンソル場の 2 点関数及び 3 点頂点関数のループ補正。

背景場の方法 (background field method) を用いて計算された結果だけを書くことにすると、結合定数  $t_r$  のくりこみ定数は

$$Z_t = 1 - \left( \frac{n_F}{80} + \frac{5}{3} \right) \frac{\tilde{t}_r^2}{(4\pi)^2 \epsilon} - \frac{7n_F}{288} \frac{\tilde{e}_r^2 \tilde{t}_r^2}{(4\pi)^4 \epsilon} + o(\tilde{t}_r^4) \quad (6.4.5)$$

で与えられる。1 ループ Feynman グラフからの次数  $t_r^2$  の寄与は、内線にフェルミオンが伝播する図から  $-n_F/80$ 、 $U(1)$  ゲージ場及びそのゴースト場から  $-1/40$ 、共形モード場からの寄与が  $1/60$ 、トレースレステンソル場及びそのゴースト場からの寄与が  $-199/120$  である。次数  $t_r^2 e_r^2$  の寄与は内線として重力場以外のフェルミオンとゲージ場が伝播する 2 ループの Feynman グラフからの寄与である。

背景場の方法では背景場として  $\hat{g}_{\mu\nu} = (e^{th})_{\mu\nu}$  を導入して、くりこみ定数  $Z_{\hat{h}}$  を  $\hat{h}_{\mu\nu} = Z_{\hat{h}}^{1/2} \hat{h}_{\mu\nu}^r$  と定義すると、ゲージ不変性の条件である  $Z_t Z_{\hat{h}}^{1/2} = 1$  が満たされることが保障される。このように、背景場の方法のよいところは、通常のくりこみでは  $Z_h$  はゲージ依存性を示すのに対して、背景場のくりこみ定数  $Z_{\hat{h}}$  は明白にゲージ不変になることである。そのため、 $Z_{\hat{h}}$  を計算すると  $Z_t$  が計算できる。上の式はこのようにして計算されたものである。

結合定数  $t_r$  のベータ関数の定義式は

$$\beta_t = \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{t}_r \quad (6.4.6)$$

で与えられる。もともとの作用で定義される裸の量は、次元を補うため

に導入した任意の質量スケール  $\mu$  に依存しない。この条件から

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} t = \mu \frac{d}{d\mu} (Z_t \tilde{t}_r \mu^\epsilon) \quad (6.4.7)$$

が成り立つので、ベータ関数は

$$\beta_t = -\epsilon \tilde{t}_r - \tilde{t}_r \frac{\mu}{Z_t} \frac{dZ_t}{d\mu} \quad (6.4.8)$$

と表すことができる。これより、無次元化された結合定数のスケール依存性が  $\mu d\tilde{t}_r/d\mu = \beta_t = -\epsilon \tilde{t}_r + o(\tilde{t}_r^2)$  であることが分かる。同様に  $\mu d\tilde{e}_r/d\mu = -\epsilon \tilde{e}_r + \dots$  なので、これらの式を使ってくりこみ定数 (6.4.5) からベータ関数を求めることができ、

$$\beta_t = -\left(\frac{n_F}{40} + \frac{10}{3}\right) \frac{t_r^3}{(4\pi)^2} - \frac{7n_F}{72} \frac{e_r^2 t_r^3}{(4\pi)^4} + o(t_r^5) \quad (6.4.9)$$

と計算される。このように、ベータ関数が負になって、トレースレステンソル場の結合定数は漸近自由性を示すこと分かる。

Euler 密度  $\bar{G}_4$  に比例した紫外発散から

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= \frac{11n_F}{360} + \frac{40}{9}, & \tilde{b}'_1 &= -\frac{n_F^2}{6} \frac{\tilde{e}_r^4}{(4\pi)^4} + o(\tilde{t}_r^2), \\ \tilde{b}_2 &= \frac{2n_F^3}{9} \frac{\tilde{e}_r^6}{(4\pi)^6} + o(\tilde{t}_r^4) \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

が決まる。係数  $b_1$  の中の最低次の結合定数を含まない項の内訳はフェルミオンとゲージ場から  $(11n_F + 62)/360$ 、共形モード場から  $-7/90$ 、トレースレステンソル場から  $87/20$  である。 $b_1$  の  $e_r^4$  の項及び  $b_2$  の  $e_r^6$  の項は内線に重力場以外の場が伝播する 2 ループ及び 3 ループの Feynman グラフからの寄与である。

共形モード場の非くりこみ定理 (2) 共形モード場の 2 点関数の計算から、この場が  $t_r^2$  の次数でくりこみを受けないことはすでに示した。ここでは、Hathrell の結果を使って  $e_r^6$  の次数まで  $Z_\phi = 1$  が成り立つことを示す。

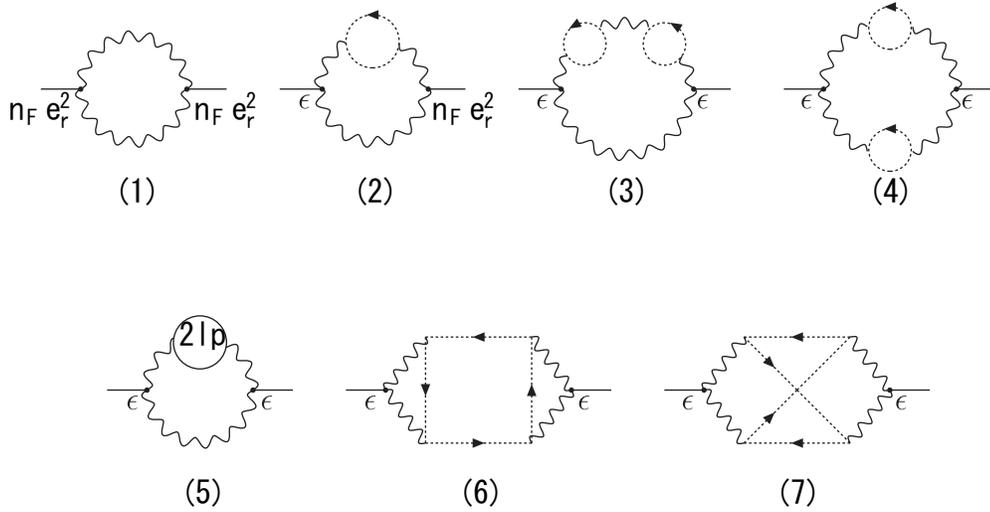


図 6.3: 共形モード場の  $e_r^4$  ループ補正。

QED で計算された  $Z_3$  の留数の値は

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{8n_F}{3} \frac{\tilde{e}_r^2}{(4\pi)^2} + 4n_F \frac{\tilde{e}_r^4}{(4\pi)^4}, \\
 x_2 &= -\frac{32n_F^2}{9} \frac{\tilde{e}_r^6}{(4\pi)^6}
 \end{aligned}
 \tag{6.4.11}$$

である。この値をゲージ場作用の Laurent 展開式 (6.2.1) に代入すると Wess-Zumino 相互作用が得られる。その次数から  $e_r^2$  次の共形モード場の 2 点関数は自明に有限になることがすぐに分かる。

次数  $e_r^4$  の量子補正を表す Feynman グラフは図 6.3 で与えられる。ここで、円の中に 2lp と書かれている部分はゲージ場の 2 ループ自己エネルギーグラフである。内部グラフ (subdiagram) の発散を相殺するためのくりこみ項を内部に含む図は簡単のため省略している。また、次数  $e_r^4$  では内部グラフ以外にはくりこみ項は現れない。なぜなら、先に示したように 2 重極の留数  $b_2$  は次数  $e_r^6$  から現れるので、2 点関数の全体の紫外発散を消去する単純極のくりこみ項は、作用  $E_D$  の Laurent 展開式 (6.2.4) より、次数  $e_r^6$  から現れる。

各グラフについて述べると、図 (5) からの寄与は、ゲージ場の 2 ループ

自己エネルギーが単純極の発散しか出さないことから、共形モード場の頂点にある  $\epsilon$  と相殺して自明に有限になる。また、フェルミオンループを含むゲージ場の4点関数は有限になることから、図(6)と図(7)も有限である。このように、単純極の紫外発散を出すグラフは図(1)から図(4)で、すべて加えると相殺して有限になる。

次数  $e_r^6$  の場合も同様にして、Hathrellの結果を用いると、 $Z_\phi = 1$ を示すことができる。次数  $e_r^6$  の計算で留意すべき点は、先にも述べたように、留数  $b_2$  が値を持つため共形モードの運動項に単純極のくりこみ項が現れることである。

ゲージ場のくりこみ  $U(1)$  ゲージ場のくりこみ定数  $Z_3$  への重力相互作用の寄与を計算する。内線にトレースレステンソル場が伝播する次数  $t_r^2$  の補正は図6.4のFeynmanグラフで与えられる。この寄与は、自己エネルギー図(1)とオタマジャクシ図(2)からの紫外発散が相殺して有限になることが分かる。

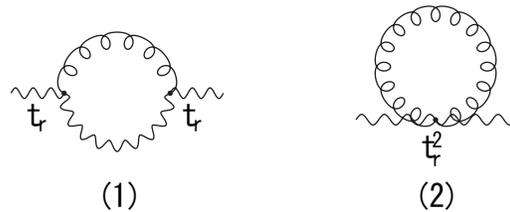


図 6.4:  $Z_3$  の  $t_r^2$  ループ補正。

内線に共形モードが伝播する Feynman グラフは次数  $e_r^4$  から現れる。その中で、単純極が生じる図は三つで、図6.5で与えられる。先にも述べたように、単純極しか出さないゲージ場の2ループ自己エネルギーなどを含む Feynman グラフは自明に有限になるので省略している。また、次数  $e_r^6$  で2重極を生じる Feynman グラフは図6.6で与えられる。

通常の QED の量子補正 (6.4.11) に、これらの図からの寄与を加えると、

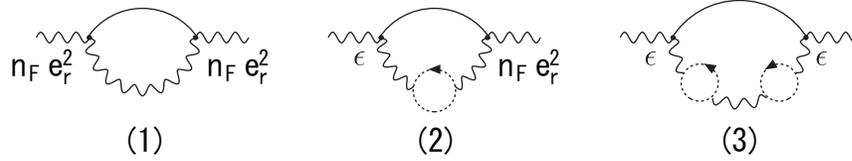


図 6.5:  $Z_3$  に次数  $e_r^4$  の単純極を与える Feynman グラフ。

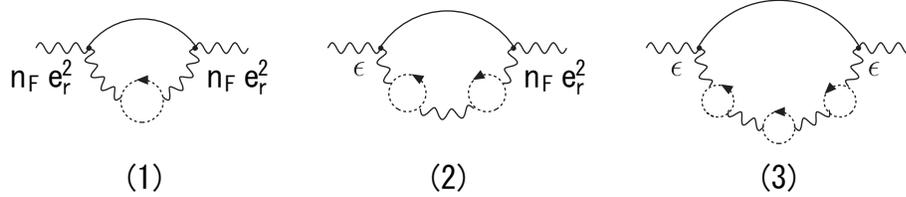


図 6.6:  $Z_3$  に次数  $e_r^6$  の2重極を与える Feynman グラフ。

くりこみ定数  $Z_3$  は

$$Z_3 = 1 - \frac{4n_F}{3} \frac{\tilde{e}_r^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + \left( -2n_F + \frac{8n_F^2}{27\tilde{b}_1} \right) \frac{\tilde{e}_r^4}{(4\pi)^4} \frac{1}{\epsilon} + \left( -\frac{8n_F^2}{9} + \frac{8n_F^3}{81\tilde{b}_1} \right) \frac{\tilde{e}_r^6}{(4\pi)^6} \frac{1}{\epsilon^2} + o(\tilde{e}_r^2 \tilde{t}_r^2, \tilde{t}_r^4) \quad (6.4.12)$$

となる。

QED の結合定数のベータ関数は

$$\beta_e = \mu \frac{d\tilde{e}_r}{d\mu} \quad (6.4.13)$$

で定義される。重力場と結合している場合でも Ward-Takahashi 恒等式  $Z_1 = Z_2$  は成り立つので、結合定数  $e_r$  のくりこみ定数は  $Z_e = Z_3^{-1/2}$  で与えられる。これより、ベータ関数は

$$\beta_e = -\epsilon \tilde{e}_r + \frac{\tilde{e}_r}{2} \frac{\mu}{Z_3} \frac{dZ_3}{d\mu} \quad (6.4.14)$$

と書くこともできる。

ベータ関数を計算するまえに、くりこみ定数に表れる多重極の留数の間に成り立つ関係式について議論する。いま、 $Z_3$  を一般的に

$$Z_3 = 1 + \frac{A_1}{\epsilon} + \frac{A_2}{\epsilon^2} + \cdots + \frac{1}{\tilde{b}_1} \left( \frac{B_1}{\epsilon} + \frac{B_2}{\epsilon^2} + \cdots \right) + \cdots \quad (6.4.15)$$

と展開して、それぞれの係数を結合定数  $\tilde{e}_r$  の自乗の関数として、

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{n \geq 1} A_{1,n} \tilde{e}_r^{2n}, & A_2 &= \sum_{n \geq 3} A_{2,n} \tilde{e}_r^{2n}, \\ B_1 &= \sum_{n \geq 2} B_{1,n} \tilde{e}_r^{2n}, & B_2 &= \sum_{n \geq 3} B_{2,n} \tilde{e}_r^{2n} \end{aligned} \quad (6.4.16)$$

と定義する。このとき、ベータ関数の式 (6.4.13) と (6.4.14) の連立方程式を  $\epsilon$  の各次数ごとに解くと、留数の間の関係式

$$A_{2,3} = -\frac{1}{3} A_{1,1} A_{1,2}, \quad B_{2,3} = -\frac{1}{4} A_{1,1} B_{1,2} \quad (6.4.17)$$

が得られる。このとき、 $\mu d\tilde{b}_1/d\mu = 2\epsilon\tilde{b}_1$  を使っている。図 6.5 から計算された単純極の留数  $B_{1,2}$  と図 6.6 から計算された 2 重極の留数  $B_{2,3}$  は上の関係式を満たしている。

最終的に、量子重力の補正を含めた QED 結合定数のベータ関数は

$$\beta_e = \frac{4n_F}{3} \frac{e_r^3}{(4\pi)^2} + \left(4n_F - \frac{8n_F^2}{9b_1}\right) \frac{e_r^5}{(4\pi)^4} + o(e_r^3 t_r^2) \quad (6.4.18)$$

で与えられる。このように、量子重力の効果は負で現れている。 $b_1$  の値を代入すると、 $n_F \geq 24$  ならば次数  $e_r^5$  の項は全体が負になることが分かる。このため、量子重力が有効になる力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  まで結合定数  $e_r$  が発散しなければ、Landau 特異点の問題を回避することができるかもしれない。

共形モード場の非くりこみ定理 (頂点関数) 最後に頂点関数  $\phi_{F_{\mu\nu}}^{r2}$  のくりこみを考え、この関数がすでに計算された  $Z_3$  の情報だけで、すなわち  $Z_\phi = 1$  で有限になることを示す。

ゲージ場のくりこみ定数  $Z_3$  に現れる 2 重極が  $e_r^6$  から生じることから、Laurent 展開式 (6.2.1) より、Wess-Zumino 相互作用  $\phi_{F_{\mu\nu}}^{r2}$  の単純極のくりこみ項は  $e_r^6$  から誘導される。このことから、非自明な紫外発散を含む Feynman グラフはこの次数から現れる。

はじめに、内線に QED の場しか伝播しない場合を考える。簡単のため以下では共形モード場の運動量をゼロに置いて計算する。紫外発散が生

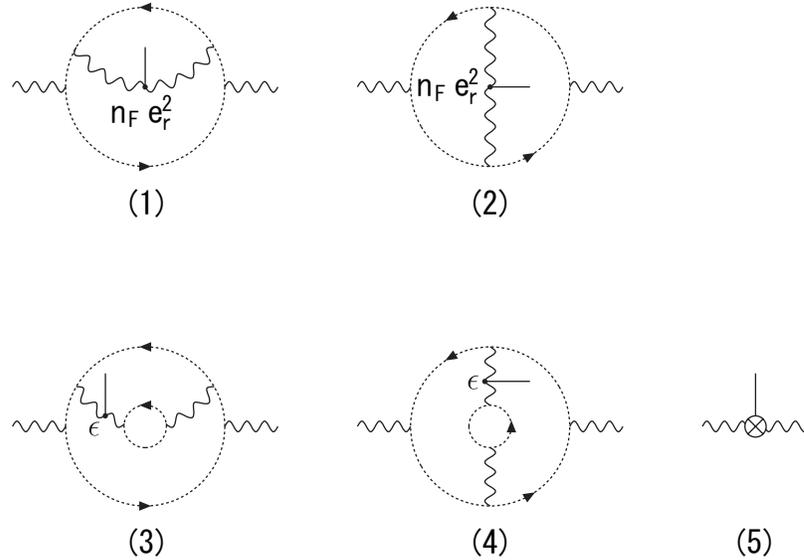


図 6.7:  $\phi F_{\mu\nu}^2$  頂点関数の  $e_r^6$  ループ補正 I。

じる Feynman グラフは図 6.7 で与えられる。最初の図 (1) と図 (2) はゲージ場の 2 ループの自己エネルギーに頂点関数  $n_F e_r^2 \phi F_{\mu\nu}^2$  を付けたものである。2 ループの自己エネルギーは単純極を与えるので、この図も単純極を与える。

図 (3) と図 (4) は 3 ループの自己エネルギーに  $\epsilon \phi F_{\mu\nu}^2$  の頂点関数を付けたものである。フェルミオンループが二つ存在する 3 ループの自己エネルギーは 2 重極を与えることが知られているので、共形モードの頂点にある  $\epsilon$  を考慮するとこの図も単純極を与えることが分かる。

最後の図 (5) は  $Z_3$  の 2 重極にともなって出てくる単純極のくりこみ項である。その他にも、一つのフェルミオンループにゲージ場が内線として 2 本伝播している 3 ループの図に  $\epsilon \phi F_{\mu\nu}^2$  の頂点関数を付けた Feynman グラフも存在する。ただ、フェルミオンループが一つしかない 3 ループ自己エネルギーの和は単純極しか生じないため、共形モード場の頂点関数の  $\epsilon$  と相殺して自明に有限になるのでここでは省略した。

それぞれの紫外発散の寄与をまとめると

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\phi AA}(0; k, -k)|_I = \left\{ -\frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{8}{9} \right\} n_F^2 \frac{e_r^6}{(4\pi)^6} \frac{1}{\epsilon} (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) = 0 \quad (6.4.19)$$

のように相殺して有限になることが示せる。ここで、頂点関数の有効作用は

$$\Gamma = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \phi(-k_1 - k_2) A_\mu^r(k_1) A_\nu^r(k_2) \Gamma_{\mu\nu}^{\phi AA}(-k_1 - k_2; k_1, k_2) \quad (6.4.20)$$

と規格化している。最初の項は図(1)と図(2)からの寄与の和で、第二項は図(3)と図(4)から、最後は図(5)のくりこみ項からの寄与である。

次に、内線に共形モード場が伝播する Feynman グラフをもつ頂点関数のくりこみを考える。紫外発散が生じる Feynman グラフは図 6.8 で与えられる。他にも、ゲージ場の 2 ループ及び 3 ループ自己エネルギーを含む Feynman グラフが存在するが、それらは自明に有限になるので省略している。この場合、共形モード場の誘導された自己頂点関数  $\phi^3$  及び  $\phi^2 F_{\mu\nu}^2$  の相互作用が寄与するため、 $b\sqrt{g}E_D$  の Laurent 展開式 (6.2.4) の非自明な検証になる。それぞれの寄与を足し合わせると紫外発散は相殺して

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\phi AA}(0, k, -k)|_{II} = \left\{ -\frac{8}{81} + \frac{16}{81} - \frac{8}{81} \right\} \frac{n_F^3}{b_1} \frac{e_r^6}{(4\pi)^6} \frac{1}{\epsilon} (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) = 0 \quad (6.4.21)$$

のように有限になる。ここで、最初の項は図(1)から図(3)までの和、第二項は図(10)から図(13)までの和である。第三項は図(14)からの寄与で、 $Z_3$  の 2 重極に由来して生じる単純極のくりこみ項である。また、図(4)から図(9)までの紫外発散の寄与は加えると相殺して有限になる。

## 6.5 一般座標不変な有効作用

ここでは、有効作用を考えて、共形異常に伴う Wess-Zumino 作用が一般座標不変性を保障するために現れることを見る。

はじめに、QED における共形異常とベータ関数の関係について述べる。

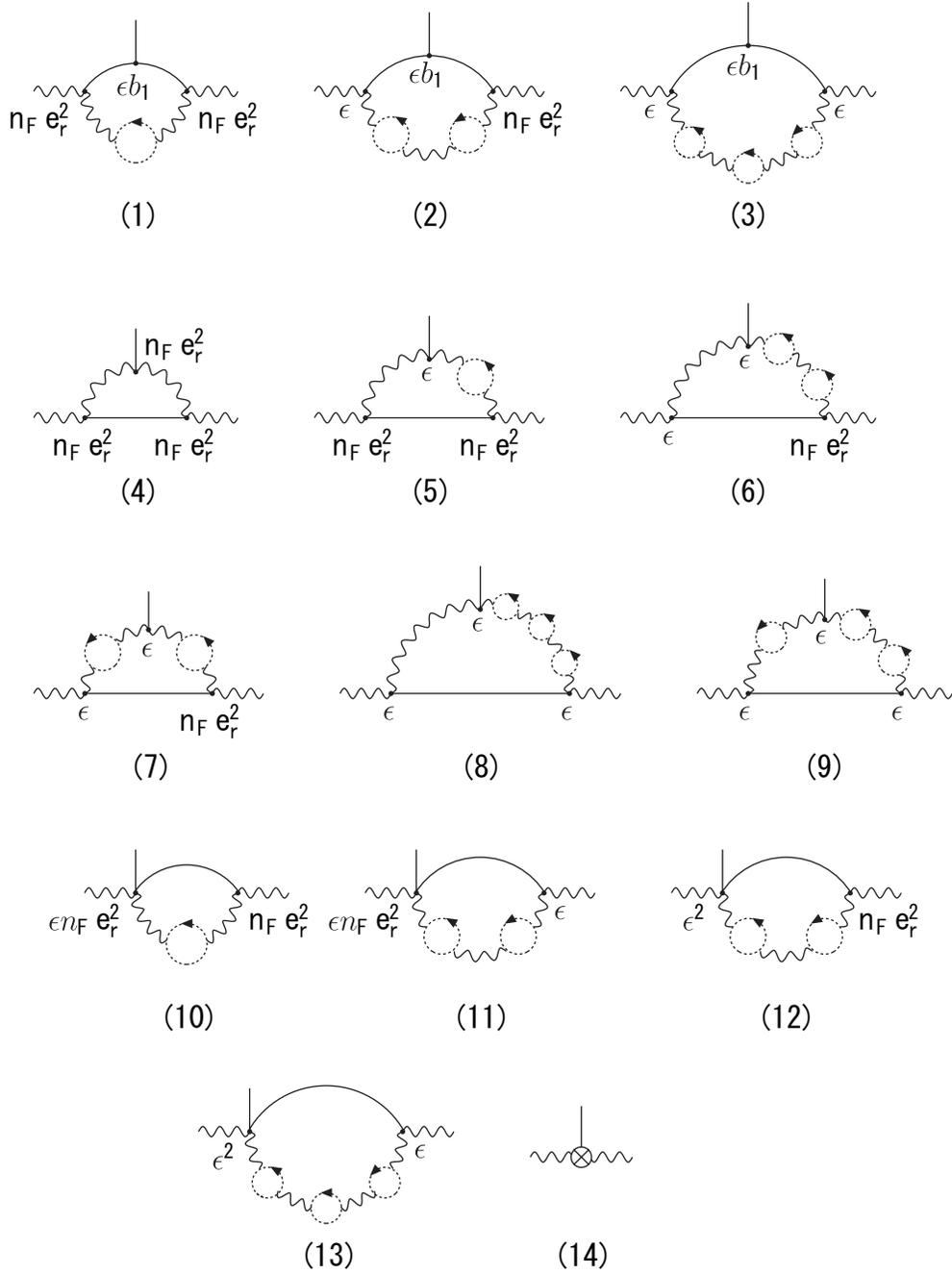


図 6.8:  $\phi F_{\mu\nu}^2$  頂点関数の  $e_r^6$  ループ補正 II。

くりこみを行うと運動量空間で非局所項  $\log(k^2/\mu^2)$  が有効作用に現れる。これはくりこみ操作によるスケールの現れで、その前の係数がベータ関数を与える。QED の 2 ループのベータ関数は、 $\beta_e/e_r = y_1/2$  と書くと

$$y_1 = \frac{8n_F}{3} \frac{e_r^2}{(4\pi)^2} + 8n_F \frac{e_r^4}{(4\pi)^4} \quad (6.5.1)$$

で与えられる。ここで、 $y_1$  の  $e_r^4$  項は留数  $x_1$  (6.4.11) のその二倍になっている。

共形モードの依存性まで含めた QED の有効作用は

$$\Gamma_{\text{QED}} = \left\{ 1 - \frac{y_1}{2} \log\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) + x_1\phi + 4n_F \frac{e_r^4}{(4\pi)^4} \phi \right\} \frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu}^2 \quad (6.5.2)$$

で与えられる。右辺の第 3 項は留数  $x_1$  により誘導された Wess-Zumino 作用である。第 4 項は図 6.9 から来る有限な寄与である。簡単のため、ここでは  $\phi$  のゼロモード部分だけを考えている。有効作用を  $\phi$  についての変分すると共形異常が求まって、その係数は

$$\delta_\phi \Gamma_{\text{QED}} = \left( x_1 + 4n_F \frac{e_r^4}{(4\pi)^4} \right) \frac{1}{4} \sqrt{g_r} F_{\mu\nu}^2 = y_1 \frac{1}{4} \sqrt{g_r} F_{\mu\nu}^2 \quad (6.5.3)$$

のようにベータ関数に比例する。

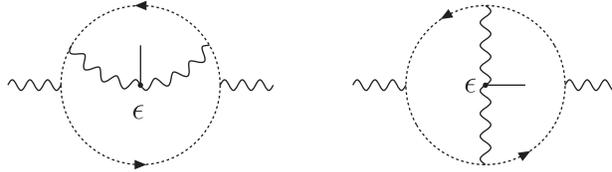


図 6.9:  $\phi F_{\mu\nu}^2$  頂点関数の  $e_r^4$  有限補正。光子の 2 ループ自己エネルギー補正が単純極しかもたないので、それが頂点にある  $\epsilon$  と相殺して有限になる。

運動量の自乗は  $k^2 (= k_\mu k_\nu \delta^{\mu\nu})$  のように平坦な背景時空上で定義されていることに注意して、ここでは元の計量  $g_{\mu\nu}^r (= e^{2\phi} \delta_{\mu\nu})$  で定義された物理的運動量

$$p^2 = k^2/e^{2\phi} \quad (6.5.4)$$

を導入する。これを用いて有効作用は

$$\Gamma_{\text{QED}} = \left\{ 1 - \frac{y_1}{2} \log \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right) \right\} \frac{1}{4} \sqrt{g_r} F_{\mu\nu}^{r2} \quad (6.5.5)$$

のように一般座標不変な式で書くことができる。

このように共形異常はくりこみに伴うスケールの現われと関係する量で、Wess-Zumino 作用は非局所項を一般座標不変な形にするために現れる。そのため、共形異常はゲージ異常とは異なり、一般座標不変性を保つために必要なものである。高次のベータ関数にともなう非局所項  $\log^n(k^2/\mu^2)$  に対して  $\phi^n F_{\mu\nu}^{r2}$  の Wess-Zumino 作用が対応する。

同様のことが Weyl 作用についても成り立つ。くりこみ操作にともなう非局所項  $\log(k^2/\mu^2)$  と Wess-Zumino 作用  $\phi C_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2}$  が誘導され、ベータ関数を  $\beta_t = -\beta_0 t_r^3$  ( $\beta_0 > 0$ ) とすると、有効作用は

$$\begin{aligned} \Gamma_W &= \left\{ \frac{1}{t_r^2} - 2\beta_0 \phi + \beta_0 \log \left( \frac{k^2}{\mu^2} \right) \right\} \bar{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2} \\ &= \frac{1}{\bar{t}_r^2(p)} \sqrt{g_r} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2} \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

で与えられる。括弧  $\{ \}$  内をまとめた関数  $\bar{t}_r(p)$  が漸近自由性にともなうランニング結合定数で、

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)} \quad (6.5.7)$$

と表される。 $p$  は物理的運動量 (6.5.4) である。力学的スケールは  $\Lambda_{\text{QG}} = \mu \exp\{-1/(2\beta_0 t_r^2)\}$  と定義される。高次のベータ関数にともなう非局所項  $\log^n(k^2/\mu^2)$  に対して  $\phi^n C_{\mu\nu\lambda\sigma}^{r2}$  が対応する。

次に、Euler 項に伴う共形異常と関係した一般座標不変な有効作用について述べる。Euler 密度  $\bar{G}_4$  に比例した留数  $b_1$  の単純極の紫外発散にともなう生じる有効作用を考える。 $\bar{G}_4$  が 2 点関数を持たないことから、対応する Feynman グラフはトレースレスモードの 3 点関数の図 6.2(2) で与えられ、それから得られる有限部分の形は

$$W_G(\bar{g}_r) = \frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{8} \bar{E}_4^r \frac{1}{\Delta_4^r} \bar{E}_4^r - \frac{1}{18} \bar{R}_r^2 \right\} \quad (6.5.8)$$

になると考えられる。 $\bar{R}^2$  に比例した項は  $W_G$  が平坦な時空のまわりで展開したときトレースレスモードの 2 点関数を持たないことを保障している。同時に、この作用の共形変分が  $\bar{G}_4$  に比例することも保障している。

有効作用は Riegert 作用  $b_1 S_1$  とこの有限部分  $W_G$  の和で与えられ、

$$\frac{b_1}{(4\pi)^2} S_1(\phi, \bar{g}_r) + W_G(\bar{g}_r) = \frac{b_1}{8(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g_r} E_4^r \frac{1}{\Delta_4^r} E_4^r \quad (6.5.9)$$

と表される。このとき、 $\bar{R}^2$  項は相殺して一般座標不変な形になる。右辺に現れたスケール不変な作用を非局所的 Riegert 作用と呼ぶ。これは、2 次元量子重力に於ける Polyakov 作用の 4 次元版に相当する。

さらに、Riegert 作用密度  $L_{S_1} = b_1/(4\pi)^2 \times \{2\phi\bar{\Delta}_4^r\phi + \dots\}$  の前の係数が結合定数に依存した高次補正を含む場合を考える。次数  $t_r^2$  の補正をランニング結合定数に置き換えて展開すると

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= (1 - a_1 t_r^2(p) + \dots) L_{S_1}(\phi, \bar{g}_r) \\ &= \left\{ 1 - a_1 \left[ t_r^2 + 2\beta_0 t_r^4 \phi - \beta_0 t_r^4 \log\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) + \dots \right] \right\} L_{S_1}(\phi, \bar{g}_r) \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

となることから、 $\phi^2 \bar{\Delta}_4^r \phi$  の項が  $t_r^4$  の次数から現れることが分かる。それに伴って、非局所項も現れる。この項は単純極の発散に伴って現れる項なので、展開式 (6.2.4) より係数  $b_2$  が  $t_r^4$  から表れることを示唆している。このように、 $\phi^n \bar{\Delta}_4^r \phi$  ( $n \geq 2$ ) 項は係数の結合定数依存性がランニング結合定数で置き換えることができることを保障していると考えられる。

## 6.6 宇宙項のくりこみ

この節では宇宙項を例にあげて複合場の異常次元のくりこみ計算を行い、その結果が共形代数から得られたものと一致することを確かめる。

共形モード場を厳密に取り扱っているので、宇宙項は指数関数の複合

場として

$$I_\Lambda = \Lambda \int d^D x \sqrt{g} = \Lambda \int d^D x e^{D\phi} \quad (6.6.1)$$

と表される。共形モード場がくりこみを受けないことから、くりこみは裸の宇宙定数を

$$\Lambda = Z_\Lambda \Lambda_r = Z_\Lambda \tilde{\Lambda}_r \mu^{-2\epsilon} \quad (6.6.2)$$

と置き換えて実行される。ここで、 $\Lambda_r$  はくり込まれた宇宙定数、 $Z_\Lambda$  はそのくりこみ定数である。また、正準次元4をもつ宇宙項を  $\tilde{\Lambda}_r$  と書くことにする。

くりこみ定数を

$$Z_\Lambda = 1 + \frac{u_1}{D-4} + \frac{u_2}{(D-4)^2} + \dots \quad (6.6.3)$$

と Laurent 展開すると、宇宙項は

$$\begin{aligned} I_\Lambda = \Lambda_r \int d^D x \left\{ \left( 1 + \frac{u_1}{D-4} + \frac{u_2}{(D-4)^2} + \dots \right) e^{4\phi} \right. \\ + \left( D-4 + u_1 + \frac{u_2}{D-4} + \dots \right) \phi e^{4\phi} \\ + \frac{1}{2} \left( (D-4)^2 + (D-4)u_1 + u_2 + \dots \right) \phi^2 e^{4\phi} \\ \left. + \dots \right\} \quad (6.6.4) \end{aligned}$$

と展開される。

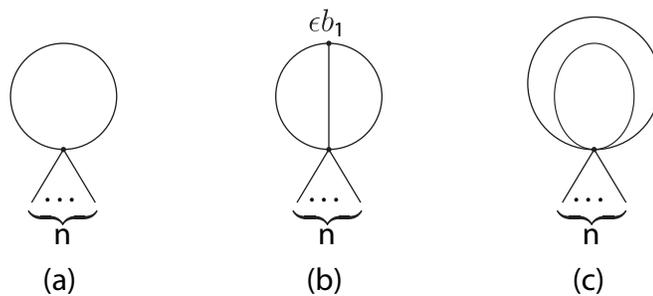


図 6.10: 宇宙項の  $1/b_1$  と  $1/b_1^2$  の量子補正。

宇宙項のくりこみは結合定数の次数がゼロの場合でも必要である。ここでは大きい  $b_1$  近似で計算する。これは大きな粒子数を考えるいわゆる大きい  $N$  近似と同じである。計算は指数関数部分を  $e^{4\phi} = \sum_n (4\phi)^n/n!$  と展開して実行する。このとき、宇宙項のくりこみ定数は

$$Z_\Lambda = 1 - \frac{2}{\tilde{b}_1} \frac{1}{\epsilon} - \frac{2}{\tilde{b}_1^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{2}{\tilde{b}_1^2} \frac{1}{\epsilon^2} + \dots \quad (6.6.5)$$

と計算される。単純極を与える Feynman グラフは図 6.10 の (a) と (b) である。図 (c) は二重極を与える。これより、留数は  $u_1 = 4/\tilde{b}_1 + 4/\tilde{b}_1^2$  と  $u_2 = 8/\tilde{b}_1^2$  になる。

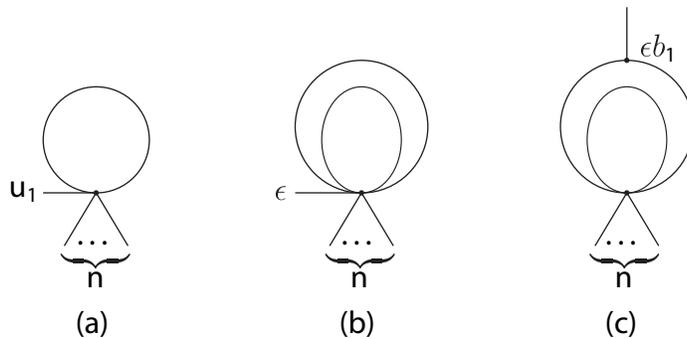


図 6.11: 誘導宇宙項  $\phi e^{4\phi}$  に比例した  $1/b_1^2$  の量子補正。

次に、 $\phi e^{4\phi}$  に比例した項のくりこみを考える。この項に比例した発散は図 6.11 のように  $1/b_1^2$  の次数で現れる。図 (a) と (b) は Laurent 展開式 (6.6.4) の第 2 列に現れる誘導された相互作用を用いて構成されている。この二つの図から生じる紫外発散を足したものは、おなじく第 2 列の留数  $u_2$  によって生じる単純極のくりこみ項と相殺して有限になることが示せる。一方、図 (c) は、ここでは省略されている内部グラフの発散を取り除くためのくりこみ項を内部に含む図を考慮に入れると、それだけで有限になることがわかる。このように、留数  $u_1$  と  $u_2$  が与えられると  $\phi e^{4\phi}$  に比例した項のくりこみもできることがわかる。一般に、留数  $u_n$  の情報が与えられるとすべてのくりこみが実行できる。

宇宙項の異常次元は

$$\gamma_\Lambda = -\frac{\mu}{\tilde{\Lambda}_r} \frac{d\tilde{\Lambda}_r}{d\mu} \quad (6.6.6)$$

で定義される。裸の宇宙項が  $\mu$  によらないことを用いて右辺を書き換えて計算すると

$$\gamma_\Lambda = -2\epsilon + \frac{\mu}{Z_\Lambda} \frac{dZ_\Lambda}{d\mu} = \frac{4}{b_1} + \frac{8}{b_1^2} + \dots \quad (6.6.7)$$

を得る。

この結果を共形代数から求めた厳密な式と比較してみる。異常次元はスケール変換、すなわち共形変換に対する応答を表す量であり、量子補正を受けた宇宙項の共形モード依存性は  $\delta_\phi L_\Lambda = (4 + \gamma_\Lambda)L_\Lambda$  と表される。ここで、4は正準値である。共形代数から求めた宇宙項に相当する物理状態の共形モード依存性は  $e^{\gamma_0\phi}$  で与えられることから、 $\gamma_0 = 4 + \gamma_\Lambda$  の関係式が成り立つ。これより、 $\gamma_\Lambda$  の厳密解は

$$\begin{aligned} \gamma_\Lambda &= 2b_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{b_1}} \right) - 4 \\ &= \frac{4}{b_1} + \frac{8}{b_1^2} + \frac{20}{b_1^3} + \dots \end{aligned} \quad (6.6.8)$$

で与えられる。最初の2項が(6.6.7)式と合っていることが分かる。

## 第7章 量子重力的宇宙論

この章ではくりこみ可能な量子重力にもとづく初期宇宙の進化のモデルを構築する。時間の概念も、空間の概念もない共形不変な時空から私たちの現在の宇宙が構成される過程を、ダイナミクスを決める二つの重力的スケール、Planck 質量  $m_{\text{pl}} \simeq 10^{19}\text{GeV}$  と力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$ 、を用いて説明する。力学的エネルギースケールを Planck スケールより低い  $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17}\text{GeV}$  の値にとると、宇宙の進化はこれらのスケールによって共形不変性が破れていく過程として表され、インフレーションから、時空の相転移としてのビッグバンを経て、Friedmann 宇宙に移行するシナリオを構成することができる。

### 7.1 作用のまとめと用語

はじめに、量子重力の作用及び用語についてまとめておく。作用は

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{t^2} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - bG_4 + \frac{M_{\text{P}}^2}{2} R - \Lambda \right\} + I_{\text{M}} \quad (7.1.1)$$

で定義される。ここで、 $M_{\text{P}} = 1/\sqrt{8\pi G}$  は換算 Planck 質量である。計量場は共形モードとトレースレステンソルモードに分解して

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (7.1.2)$$

と記述する。宇宙論の各章では結合定数が大きくなる場合も考えるので、計量場  $\bar{g}_{\mu\nu}$  の展開式に結合定数  $t$  を導入せずに、

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \cdots \quad (7.1.3)$$

と展開する。すなわち、前の章で  $th_{\mu\nu}$  と表される量を  $h_{\mu\nu}$  と書いたことになる。平坦背景時空  $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$  の座標を  $x^\mu = (\eta, x^i)$  と表して、 $\eta$  を共形時間 (conformal time)、 $x^i$  を共動座標 (comoving coordinate) と呼ぶ。

一般座標不変な分配関数は、平坦背景時空上で定義された測度を用いると、

$$Z = \int \frac{[d\phi dhdAdX]_\eta}{\text{Vol}(\text{diff.})} \exp \{iS(\phi, \bar{g}) + iI(A, X, g)\} \quad (7.1.4)$$

と表すことができる。作用  $S$  は、共形異常に関係した Wess-Zumino 作用で、一般座標不変な測度を実用的な測度に書き換えた際に出てくるヤコビアン (Jacobian) である。結合定数のゼロ次で現れる項は特に Riegert 作用とよばれ、

$$S(\phi, \bar{g}) = -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ 2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \left( \bar{G}_4 - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^2 \bar{R} \right) \phi + \frac{1}{18} \bar{R}^2 \right\} \quad (7.1.5)$$

で与えられる。係数  $b_1$  は、スカラー場、Weyl フェルミオン場、ゲージ場の数をそれぞれ  $N_X$ 、 $N_W$ 、 $N_A$  とすると、

$$b_1 = \frac{1}{360} \left( N_X + \frac{11}{2} N_W + 62 N_A \right) + \frac{769}{180} \quad (7.1.6)$$

で与えられる。最後の  $\bar{R}^2$  項は次章でゆらぎの線形発展方程式を議論するさいにゲージ不変性を保障するために必要である。

量子時空と古典時空の境界をあらわす力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  は、漸近自由性 ( $\beta_t = -\beta_0 t_r^3$ ,  $\beta_0 > 0$ ) に由来したランニング結合定数を通して、

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)} \quad (7.1.7)$$

のように現れる。ここで、 $p$  は物理的運動量で、背景平坦時空  $\eta_{\mu\nu}$  上での運動量  $k$  との関係は  $p = k/e^\phi$  で与えられる。有効作用はランニング結合定数を用いて書くことができる (前章 6.5 節を参照)。

## 7.2 インフレーションと時空相転移

Planck 質量よりも高いエネルギー領域では高階微分作用が優勢になり、時空のゆらぎは共形場理論で記述される。ここではエネルギーが Planck スケールまで下がってきて、Einstein 作用が有効になる領域を議論する。

はじめに述べたように、ダイナミクスを支配する二つのエネルギースケールの間に

$$m_{\text{pl}} \gg \Lambda_{\text{QG}} \quad (7.2.1)$$

の関係があるとする。このときインフレーション解が存在する。

この関係式の意味は時空と粒子描像の関係を考えると良く分かる。たとえば Planck 質量よりも十分軽い質量  $m$  の通常の素励起を考えると、位置のゆらぎの目安であるコンプトン波長  $\Delta x \sim 1/m$  はその Schwarzschild 半径  $r_g = 2Gm$  と比べて十分に大きく、 $\Delta x \gg r_g$  が成り立つ。したがって、この素励起ではホライズンはゆらぎによって消されているのでブラックホールではない。この場合、点粒子として記述することが正当化される。それでは、質量  $m$  が Planck 質量  $m_{\text{pl}}$  の場合はどうなるか。量子重力ではそのような素励起が現れることが予想される。Planck 質量の素励起ではコンプトン波長は Planck 長さ  $l_{\text{pl}} (= 1/m_{\text{pl}})$  となり、その Schwarzschild 半径  $2l_{\text{pl}}$  より短くなる。そのため、古典論ではこのような素励起はブラックホールとなり、粒子としての情報はホライズンの中に閉じ込められ失われてしまう。しかしながら、量子重力の効果が Planck エネルギースケールより低い  $\Lambda_{\text{QG}}$  で効き始めると、力学的相関距離  $\xi_{\Lambda} = 1/\Lambda_{\text{QG}}$  は  $\xi \gg l_{\text{pl}}$  となって、ゆらぎのサイズがホライズンより大きくなる。そのため、ブラックホールにはならないことが分かる。

安定なインフレーション解 漸近自由性によりエネルギーが力学的スケールより十分高いときは結合定数を無視することができる。このとき、共形モード場の空間的に等質な成分を  $\hat{\phi}(\eta)$  とすると、運動方程式は

$$-\frac{b_1}{4\pi^2} \partial_{\eta}^4 \hat{\phi} + 6M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left( \partial_{\eta}^2 \hat{\phi} + \partial_{\eta} \hat{\phi} \partial_{\eta} \hat{\phi} \right) = 0 \quad (7.2.2)$$

となる。この式はストレステンソルのトレースがゼロの式と同じである。考えているエネルギー領域では物質場のストレステンソルのトレースはゼロなので、この運動方程式に物質場の寄与は現れない。

この方程式がインフレーション解をもつことを見るために、宇宙論で用いられるスケール因子  $a$  と Hubble 変数  $H$  を導入する。

$$a = e^{\hat{\phi}}, \quad H = \frac{\partial_{\eta} a}{a^2} = \frac{\dot{a}}{a} \quad (7.2.3)$$

ここで、ドットは物理時間 (固有時間, proper time)  $\tau$  による微分で、物理時間は関係式

$$d\tau = a d\eta \quad (7.2.4)$$

によって定義される。Hubble 変数を用いると運動方程式は

$$\frac{b_1}{8\pi^2} \left( \ddot{H} + 7H\ddot{H} + 4\dot{H}^2 + 18H^2\dot{H} + 6H^4 \right) - 3M_{\text{P}}^2 \left( \dot{H} + 2H^2 \right) = 0 \quad (7.2.5)$$

と書き換えられる。この方程式はインフレーション解 (=de Sitter 解)

$$H = H_{\text{D}}, \quad H_{\text{D}} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{b_1}} M_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\pi}{b_1}} m_{\text{pl}} \quad (7.2.6)$$

をもつ。このとき、スケール因子は物理時間の関数として

$$a \propto e^{H_{\text{D}}\tau} \quad (7.2.7)$$

のように指数関数的に膨張する。

宇宙における時間とは単調に増大する変数のことで、インフレーション解はそれがスケール因子に他ならないことを表している。このことは、言い換えれば指数関数的な膨張を引き起こす Planck スケールが時間を生み出していると言える。それ以前は変化が極めて緩やかな時間のない世界と考えることができる。

係数  $b_1$  の値は標準模型や GUT 模型では 10 前後になるので、定数  $H_{\text{D}}$  の値は換算 Planck 質量  $M_{\text{P}} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$  と通常の Planck 質量  $m_{\text{pl}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$  の中間に位置することになる。以下では、 $H_{\text{D}}$  も Planck スケールの一つとして扱い、宇宙が急膨張し始める時間

$$\tau_{\text{P}} = 1/H_{\text{D}} \quad (7.2.8)$$

を Planck 時間と定義する。

このインフレーション解が安定であることを示す。解からのズレを  $\delta$  として  $H = H_D(1 + \delta)$  を方程式に代入して、 $o(\delta^2)$  の項を無視すると、

$$\ddot{\delta} + 7H_D\dot{\delta} + 15H_D^2\delta + 12H_D^3\delta = 0 \quad (7.2.9)$$

を得る。この式に  $\delta = e^{v\tau}$  を代入して解くと、 $v$  の値として

$$-4H_D, \quad \left(-\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) H_D \quad (7.2.10)$$

を得る。三つのモードすべてが負の実部を持つことから、ズレは時間とともに指数関数的に小さくなり、インフレーション解が安定であることが分かる。また、後の章で示すように、空間方向のゆらぎ (摂動) に対しても安定で、この場合はべき的 (power-law) に小さくなることが分かる。

**時空の相転移** Planck スケール付近での共形不変性の破れは小さく量子相関はべき的に振舞うのに対して、力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  の破れはランニング結合定数を通して対数関数的で、共形不変性はこのとき急激にそして完全に壊れる。

量子重力の物理的な相関距離は  $1/\Lambda_{\text{QG}}$  で与えられる。これよりも短いサイズのゆらぎは量子的で、これより長いサイズは古典的なゆらぎと考えることができる。エネルギーが  $\Lambda_{\text{QG}}$  より低くなれば、時空のゆらぎはすべて古典的になる。

相転移のダイナミクスを考えるに当たって漸近自由性を示す場の量子論の代表格である量子色力学 (QCD) を参照にする。QCD には力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QCD}}$  が存在して、これよりも低いエネルギーではゲージ場の運動項が消える。

同様にして、時空の相転移では共形不変な重力場の運動項が消えると考えられる。実際、結合定数が力学的スケールで無限大になるとすると、曲率は有限なので、Weyl 作用  $-(1/t_r^2)C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$  は消えることが分かる。現実には、結合定数が無限大になる前に変化が現れると考えるの

が自然と思われるが、ここでは理想的に無限大になるとして運動項の消滅を表すことにする。

共形モード場の Wess-Zumino 作用は次のように考える。有効作用の計算からその係数  $b_1$  は量子補正を受けて

$$b_1 \rightarrow b_1 (1 - a_1 t_r^2 + \dots) = b_1 B_0(t_r) \quad (7.2.11)$$

のように置き換えられる。そこで、結合定数の展開を

$$B_0(t_r) = \frac{1}{(1 + \frac{a_1 t_r^2}{\kappa})^\kappa} \quad (7.2.12)$$

のようにまとめ上げた形で表すことにする。ここで、 $\kappa$  は高次の摂動効果をあらわす現象論的パラメータで、 $0 < \kappa \leq 1$  の範囲にあるとする。

この効果を入れると共形モード場の運動方程式は

$$-\frac{b_1}{4\pi^2} B_0 \partial_\eta^4 \hat{\phi} + M_P^2 e^{2\hat{\phi}} \{6\partial_\eta^2 \hat{\phi} + 6\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi}\} = 0 \quad (7.2.13)$$

のように変更される。また、ストレステンソルの  $(0,0)$  成分からエネルギー保存の式を求めると

$$\frac{b_1}{8\pi^2} B_0 \{2\partial_\eta^3 \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} - \partial_\eta^2 \hat{\phi} \partial_\eta^2 \hat{\phi}\} - 3M_P^2 e^{2\hat{\phi}} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} + e^{4\hat{\phi}} \rho = 0 \quad (7.2.14)$$

と表される。ここで、 $\rho$  は物質場のエネルギー密度である。

結合定数がランニングする効果を取り入れることで、インフレーションから時空の相転移までの時間発展を表すことにする。ここでは、ランニング結合定数を唯一のスケールである物理時間に対するくりこみ群方程式

$$-\tau \frac{d}{d\tau} \bar{t}_r = \beta(\bar{t}_r) = -\beta_0 \bar{t}_r^3 \quad (7.2.15)$$

で定義する。力学的時間スケール

$$\tau_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}} \quad (7.2.16)$$

で無限大になる解は

$$\bar{t}_r^2(\tau) = \frac{1}{\beta_0 \log(1/\tau^2 \Lambda_{\text{QG}}^2)} \quad (7.2.17)$$

で与えられる。これは、ランニング結合定数の式で物理的運動量  $p$  を物理時間の逆数  $1/\tau$  ( $\tau > 0$ ) に置き換えたものに相当する。

結合定数  $t_r$  を時間に依存したランニング結合定数  $\bar{t}_r(\tau)$  に置き換えて、力学的因子  $B_0$  を時間の関数として表す。さらに、Hubble 変数を使って書き換えると、運動方程式

$$\frac{b_1}{8\pi^2} B_0(\tau) \left( \ddot{H} + 7H\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 18H^2\dot{H} + 6H^4 \right) - 3M_{\text{P}}^2 \left( \dot{H} + 2H^2 \right) = 0 \quad (7.2.18)$$

を得る。また、エネルギー保存の式は

$$\frac{b_1}{8\pi^2} B_0(\tau) \left( 2H\ddot{H} - \dot{H}^2 + 6H^2\dot{H} + 3H^4 \right) - 3M_{\text{P}}^2 H^2 + \rho = 0 \quad (7.2.19)$$

となる。

結合定数が小さなインフレーション初期では、運動方程式の解は  $H \simeq H_{\text{D}}$  で与えられる。この解を保存則に代入すると  $\rho \simeq 0$  になる。このように物質場のエネルギー密度はインフレーション解  $H = H_{\text{D}}$  からズレ始めると生成される。結合定数はインフレーション期に次第に大きくなり、相転移近くで急激に増大する。それに伴って力学的因子  $B_0$  は減少して、相転移点で消滅する。

このとき相転移点では、Hubble 変数  $H$  は  $0 < \kappa < 1$  のときその3階微分が発散する。 $\kappa = 1$  のときは2階微分も発散するが、いずれにせよ  $B_0\dot{H}$  は有限になるので、物理量である物質エネルギー密度は有限のままである。

このように相転移点では高階微分作用項が消え、保存則 (7.2.19) から、その項が持っていた重力のエネルギーが物質に移って行って、物質場のエネルギー密度  $\rho(\tau_{\Lambda}) = 3M_{\text{P}}^2 H^2(\tau_{\Lambda})$  が生成されることが分かる。このことは、保存則を時間で微分した式

$$\dot{\rho} + 4H\rho = \frac{b_1}{8\pi^2} \dot{B}_0(\tau) \left( 2H\ddot{H} - \dot{H}^2 + 6H^2\dot{H} + 3H^4 \right) \quad (7.2.20)$$

を考えると分かりやすい。右辺は物質場の源泉を表す項で、力学的因子  $B_0$  が大きく時間変化すると物質が生成されることを表している。このよ

うに、インフラトンのような人為的な自由度を導入することなしに、高階微分の重力場作用に含まれる余分な自由度によってビッグバンを説明することができる。

宇宙のスケールが急激に膨張し始める Planck 時間  $\tau_P (= 1/H_D)$  から時空転移が起こる力学的時間  $\tau_\Lambda (= 1/\Lambda_{QG})$  までをインフレーションの期間として、この期間の宇宙の膨張率 (e-foldings) を

$$\mathcal{N}_e = \log \frac{a(\tau_\Lambda)}{a(\tau_P)} \quad (7.2.21)$$

と定義する。もし相転移時までほぼ指数関数  $a \simeq e^{H_D \tau}$  のまま膨張したとすると、膨張率は二つのスケール比

$$\mathcal{N}_e \simeq \frac{H_D}{\Lambda_{QG}} \quad (7.2.22)$$

で与えられる。実際の膨張率は力学的パラメータ  $\beta_0$ 、 $a_1$ 、 $\kappa$  に依存して増加する。これらは  $t_r$  の強結合ダイナミクスに依存するパラメータなので現象論的に決めることにする。図 7.1 及び図 7.2 に、 $H_D/\Lambda_{QG} = 60$ 、 $\beta_0/b_1 = 0.06$ 、 $a_1/b_1 = 0.01$ 、 $\kappa = 0.5$  の場合の計算結果を示す。図では  $H_D = 1$  と規格化しているので、相転移時間は  $\tau_\Lambda = 60$  となる。このとき膨張率は  $\mathcal{N}_e = 65.0$  になる。低エネルギー領域 ( $\tau > \tau_\Lambda$ ) については以下の節で議論する。

Planck 定数が  $M_P = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}$  であることから  $b_1 = 10$  とすると  $H_D = 6.7 \times 10^{18} \text{ GeV}$  になる。このことから、力学的エネルギースケールは

$$\Lambda_{QG} = 1.1 \times 10^{17} \text{ GeV} \quad (7.2.23)$$

となる。第9章でこの値が CMB の観測結果を矛盾なく説明できることをみる。

### 7.3 低エネルギー有効理論

力学的エネルギースケール  $\Lambda_{QG}$  以下の低エネルギー領域では Einstein 作用が優勢になる。この節では、QCD の低エネルギー有効理論であるカ

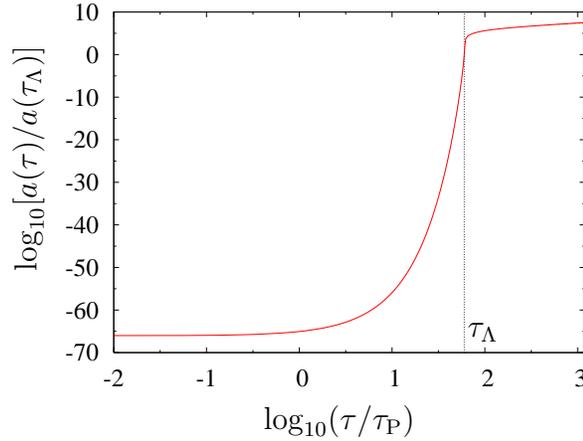


図 7.1: スケール因子  $a(\tau)$  の時間発展。時空は Planck 時間  $\tau_P$  から急激の膨張し始める。インフレーションは力学的時間スケール  $\tau_\Lambda (= 60\tau_P)$  で終わり、Friedmann 宇宙に移る。

イラル摂動論を参考にしながら、量子重力の低エネルギー有効理論を構成する。

QCD では力学的エネルギースケール  $\Lambda_{\text{QCD}}$  以下では、ゲージ場のダイナミクスが消え、メソンとバリオンが力学的な場の変数となる。量子重力では、 $\Lambda_{\text{QG}}$  より十分高いエネルギー領域では、重力場は共形モードとトレースレステンソルモードに分けて記述することができるが、 $\Lambda_{\text{QG}}$  以下では共形不変なダイナミクスが消え、二つのモードの複合場としての重力場が力学的変数となる。実際、共形モードとトレースレスモードの分離は Einstein 重力では Friedmann 解のように不安定になる。

量子重力の低エネルギー有効相互作用は重力場の微分展開として

$$I_{\text{low}} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \dots \} \quad (7.3.1)$$

で与えられる。ここで、添え字の数字は微分の数を表す。微分を含まない宇宙項は初期宇宙では無視できるので考えていない。微分を二つ含む項は Einstein 作用と物質場の作用から構成され、

$$\mathcal{L}_2 = \frac{M_{\text{P}}^2}{2} R + \mathcal{L}_{\text{M}} \quad (7.3.2)$$

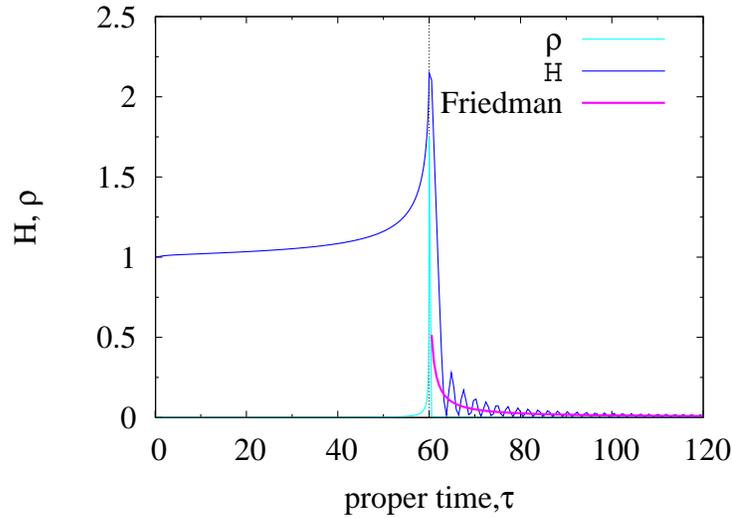


図 7.2: Hubble 変数  $H$  と物質のエネルギー密度  $\rho$  の時間発展。ここでは  $H_D = 1$  と規格化している。時間が経つと書き込まれている Friedmann 解に漸近する。

で与えられる。ここで、 $\mathcal{L}_M$  は物質場の作用密度である。

ここでは微分を四つ含む作用まで考える。低エネルギー有効理論では最低次の Einstein 項は 1 ループまでの量子効果を考えるが、高階微分項は古典的に扱う。このとき、換算 Planck 質量  $M_P$  はカイラル摂動論のパイオン崩壊定数  $4\pi F_\pi$  に対応する。換算 Planck 質量の逆数による高階微分項の展開は  $M_P \gg \Lambda_{\text{QG}}$  の関係によって保障され、可能な 4 階微分作用  $\mathcal{L}_4$  には

$$R^2, \quad R_{\mu\nu}^2, \quad R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2, \quad \frac{1}{M_P^2} R_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu}, \quad \frac{1}{M_P^4} T_M^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^M \quad (7.3.3)$$

の 5 種類がある。ここで、 $T_{\mu\nu}^M$  は共形不変な物質場のストレステンソルで、トレースレスの条件を満たす。

低エネルギー有効理論は最低次である Einstein 理論のまわりでの展開として定義されるので、高次の展開項は Einstein 方程式  $M_P^2 R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^M$  で結びつくものは独立ではないと考える。Einstein 方程式は  $R = 0$  でもあり、これらの方程式を使って  $\mathcal{L}_4$  の数を減らすことができる。さらに、

Euler の関係式を使って Riemann 曲率テンソルの二乗を消すと、独立な作用は一つになって、

$$\mathcal{L}_4 = \frac{\alpha}{(4\pi)^2} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (7.3.4)$$

で与えられる。ここで、 $\alpha$  は実験的に決めなければならない現象論的パラメータである。

結合定数  $\alpha$  は図 7.3 で与えられる 1 ループの量子補正を受ける。低エネルギー有効理論のくりこみは、カットオフ  $E_c$  ( $< \Lambda_{\text{QG}}$ ) を導入して、Einstein 方程式を満たす背景場のまわりで展開して計算する。量子補正を  $\alpha$  にくり込むとカットオフに依存した関数

$$\alpha(E_c) = \alpha(\Lambda_{\text{QG}}) + \zeta \log(E_c^2/\Lambda_{\text{QG}}^2) \quad (7.3.5)$$

が得られる。内線にスカラー場が  $N_X$ 、Weyl フェルミが  $N_W$ 、ゲージ場が  $N_A$  種類伝播する Feynman グラフからの寄与は  $\zeta = (N_X + 3N_W + 12N_A)/120$  と計算される。Ricci テンソルが  $\nabla^\mu R_{\mu\nu} (= \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{\text{M}}) = 0$  を満たすことから、係数  $\zeta$  はゲージ不変になる。

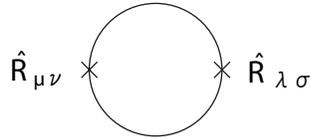


図 7.3: 低エネルギー有効理論の量子補正。 $\hat{R}_{\mu\nu}$  は Einstein 方程式を満たす背景場の Ricci テンソル。

現象論的結合定数のエネルギースケール  $\Lambda_{\text{QG}}$  での値  $\alpha(\Lambda_{\text{QG}})$  を正の数とすると、 $\zeta$  が正であることから、(7.3.5) 式は低エネルギーで  $\alpha(E_c)$  が小さくなり、4 階微分作用項がすぐに効かなくなることを表している。

また、低エネルギー有効理論が有効なエネルギースケールは  $\Lambda_{\text{QG}}$  以下であるのに対して、高階微分作用から生じるゴーストの極は Planck スケールなので、低エネルギーではゴーストが現れることはなく、ユニタリ性の問題に抵触することはない。

空間が一様等方であると仮定して運動方程式を求めると

$$M_{\text{P}}^2 (\dot{H} + 2H^2) + \frac{\alpha}{4\pi^2} (\ddot{H} + 7H\ddot{H} + 4\dot{H}^2 + 12H^2\dot{H}) = 0 \quad (7.3.6)$$

となる。エネルギーの保存を表す式は

$$-3M_{\text{P}}^2 H^2 + \rho + \frac{\alpha}{4\pi^2} (-6H\ddot{H} + 3\dot{H}^2 - 18H^2\dot{H}) = 0 \quad (7.3.7)$$

で与えられる。

前節と同様に、結合定数を時間に依存した関数に置き換えることで、量子効果を取り入れることにする。ここではカットオフを  $E_c = 1/\tau$  と置き換えることで、ランニング結合定数を

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 + \zeta \log\left(\frac{1}{\tau^2 \Lambda_{\text{QG}}^2}\right) \simeq \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\zeta}{\alpha_0} \log(\tau^2 \Lambda_{\text{QG}}^2)} \quad (7.3.8)$$

と書く。ここで、 $\alpha_0 = \alpha(\Lambda_{\text{QG}})$  である。また、最後の書き換えはランニング結合定数が最終的には消えることを仮定している。

相転移前後の様子を記述するためには格子 QCD のような非摂動的な方法が必要であるが、ここではインフレーション期を表す運動方程式と低エネルギー有効理論から求めた運動方程式を単純に相転移時間  $\tau = \tau_{\Lambda}$  でつなぐことにする。低エネルギー有効理論の運動方程式を解くための  $H$ 、 $\dot{H}$ 、 $\rho$  の初期値はインフレーション解とつながるように選ぶ。また、(7.3.6) 式を解くための  $\ddot{H}$  の初期値は保存の式 (7.3.7) から決める。図 7.2 と図 7.1 に数値計算の結果を示した。ここでは、パラメータを  $\alpha_0 = 1$  と  $\zeta = 1$  に選んでいる。

運動方程式 (7.3.6) と (7.3.7) は  $\dot{H} + 2H^2 = 0$  と  $3M_{\text{P}}^2 H^2 = \rho$  を満たす Friedmann 解を含んでいる。接続した解は、最初急激に  $H$  の値が小さくなり、振動しながらしだいに Friedmann 解に近づいていく。図 7.2 の中に書き込まれている Friedmann 解はその漸近解である。

秩序パラメータ 相転移の前後で大きく変化する量としてスカラー曲率がある。インフレーションは  $R \neq 0$  と表されるのに対し、Friedmann 宇宙

は  $R = 0$  である。変化の様子を見るためにスカラー曲率  $R = 6\dot{H} + 12H^2$  を導入して、運動方程式 (7.3.6) と (7.3.7) を書き換えると

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + \frac{4\pi^2}{\alpha} M_{\text{P}}^2 R = 0, \quad (7.3.9)$$

$$\rho = 3M_{\text{P}}^2 H^2 + \frac{\alpha}{4\pi^2} \left( H\dot{R} + H^2 R - \frac{1}{12} R^2 \right) \quad (7.3.10)$$

を得る。ここで Planck スケールの質量スケール  $m_{\text{rsp}} = \sqrt{8\pi^2/2\alpha} M_{\text{P}} = \sqrt{\pi/2\alpha} m_{\text{pl}}$  を定義すると、この方程式はインフレーション解  $R \neq 0$  からおよそ  $1/m_{\text{rsp}}$  の Planck 時間内に Friedmann 時空  $R = 0$  に変化することを表している。

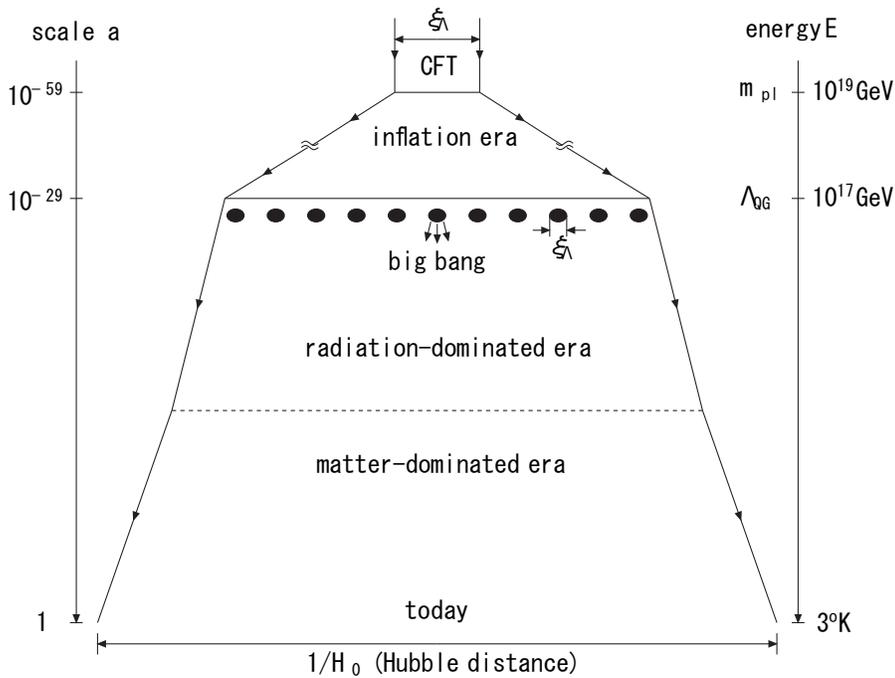


図 7.4: 量子重力的インフレーション宇宙論。宇宙が膨張を始める前の Planck 時間以前に相関距離  $\xi_{\Lambda} = 1/\Lambda_{\text{QG}} (\gg l_{\text{pl}})$  の大きさであったゆらぎが現在までに  $10^{59}$  倍膨張して、宇宙の大きさを表す Hubble 距離  $1/H_0 (\simeq 5000\text{Mpc})$  まで膨張する。すなわち、 $1/H_0 \simeq 10^{59} \xi_{\Lambda}$  である。



## 第8章 ゆらぎの時間発展

前章で、エネルギースケールが  $E \sim m_{\text{pl}}$  になると、宇宙は指数関数的に急膨張するインフレーションの時代に移ることをみた。この章ではインフレーション時空のまわりでの摂動 (ゆらぎ) を考え、宇宙論的摂動論 (cosmological perturbation theory) の方法を適用してゆらぎの時間発展の方程式を線形近似で求める。

### 8.1 線形摂動論

インフレーションの時期にゆらぎ (摂動) の振幅が小さくなると考えられる。エネルギースケールを  $E$  として、そのおよその大きさを無次元化されたスカラー曲率のゆらぎの振幅としてを評価してみると

$$\frac{\delta R}{R} \sim \frac{E^2}{12H_{\text{D}}^2} \quad (8.1.1)$$

となる<sup>1</sup>。分母はインフレーション解  $H = H_{\text{D}}$  (7.2.6) のスカラー曲率である。  $H_{\text{D}}$  はその際に導入した新たな Planck スケールである。インフレーションの期間を急膨張が始まる Planck エネルギー  $E \sim H_{\text{D}}$  から時空の相転移が起こる力学的エネルギー  $\Lambda_{\text{QG}}$  までとすると、この期間のスカラー曲率のゆらぎは  $\delta R/R|_{\tau_{\text{P}}} \sim 0.1$  から

$$\frac{\delta R}{R} \Big|_{\tau_{\Lambda}} \sim \frac{\Lambda_{\text{QG}}^2}{12H_{\text{D}}^2} \sim 10^{-5} \quad (8.1.2)$$

まで変化すると考えられる。この値は CMB の観測から要求されるスカラー振幅の大きさと合致している。

<sup>1</sup>宇宙項によるインフレーションの場合は重力ポテンシャルのゆらぎが指数関数的に減少するのは対照的である。

ゆらぎが小さくなることが期待されることから、場の変数を一様等方なインフレーション解とそのまわりで展開した摂動変数に分離して時間発展を考えることにする。

相転移近くになってもこの線形近似が正しいためには、スペクトルが相転移のダイナミクスによらないことが条件である。もしも考えているゆらぎが相転移時に力学的相関距離  $1/\Lambda_{\text{QG}}$  程度のサイズをもつものであるならば、相転移のモデルについての詳細な情報が必要になる。一方、ここで考えるゆらぎのサイズは Planck 時間に Planck 長さをもつゆらぎである。このゆらぎのサイズはインフレーションが終わるときには力学的相関距離より遥かに大きくなっているため、相転移のダイナミクスに影響されないことが期待される。

トレースレステンソル場のゆらぎは漸近自由性により、初期のゆらぎは小さいと期待されるので、やはり摂動論が有効である。実際、ここで扱うゆらぎのサイズでは、相転移時まで振幅の大きさが保存されることが示せる。

ゲージ不変な重力場の摂動変数 共形モード場の摂動変数  $\varphi$  は

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) = \hat{\phi}(\eta) + \varphi(\eta, \mathbf{x}) \quad (8.1.3)$$

で定義される。ここで、背景場  $\hat{\phi}(\eta)$  は運動方程式 (7.2.13) のインフレーション解である。

摂動変数の一般座標変換は、線形近似では

$$\begin{aligned} \delta_\xi \varphi &= \xi^0 \partial_\eta \hat{\phi} + \frac{1}{4} \partial_\lambda \xi^\lambda, \\ \delta_\xi h_{\mu\nu} &= \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

で与えられる。ここではトレースレステンソル場をさらに分解して

$$\begin{aligned} h_{00} &= h, \\ h_{0i} &= h_i^{\text{T}} + \partial_i h', \\ h_{ij} &= h_{ij}^{\text{TT}} + \partial_{(i} h_{j)}^{\text{T}'} + \frac{1}{3} \delta_{ij} h + \left( \frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) h'' \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

と書く。 $i$ と $j$ は3次元空間座標の脚で、 $\partial^2 = \partial^i \partial_i$ は共動座標空間でのラプラシアンを表す。 $h_i^T$ と $h_i^{T'}$ は横波ベクトルモードである。 $h_{ij}^{TT}$ は横波トレースレステンソルモードである。ここで、ゲージ変換のパラメータの空間成分を $\xi_i = \xi_i^T + \partial_i \xi^S$ と分解すると、各モードのゲージ変換は

$$\begin{aligned}
 \delta_\xi \varphi &= \xi^0 \partial_\eta \hat{\phi} + \frac{1}{4} \partial_\eta \xi^0 + \frac{1}{4} \partial^2 \xi^S, \\
 \delta_\xi h &= -\frac{3}{2} \partial_\eta \xi^0 + \frac{1}{2} \partial^2 \xi^S, \\
 \delta_\xi h' &= -\xi^0 + \partial_\eta \xi^S, \\
 \delta_\xi h'' &= 2 \partial^2 \xi^S, \\
 \delta_\xi h_i^T &= \partial_\eta \xi_i^T, \\
 \delta_\xi h_i^{T'} &= 2 \xi_i^T, \\
 \delta_\xi h_{ij}^{TT} &= 0
 \end{aligned} \tag{8.1.6}$$

と分解される。

これらの変換規則を用いてゲージ不変な重力変数を定義する。スカラー変数は Bardeen ポテンシャルと呼ばれる重力ポテンシャルで、

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \varphi + \frac{1}{6} h - \frac{1}{6} h'' + \sigma \partial_\eta \hat{\phi}, \\
 \Psi &= \varphi - \frac{1}{2} h + \sigma \partial_\eta \hat{\phi} + \partial_\eta \sigma
 \end{aligned} \tag{8.1.7}$$

の二つが良く用いられる。ここで、 $\sigma$ は

$$\sigma = h' - \frac{1}{2} \frac{\partial_\eta h''}{\partial^2} \tag{8.1.8}$$

と定義される。この変数が $\delta_\xi \sigma = -\xi^0$ と変換することを用いると、重力ポテンシャル(8.1.7)がゲージ不変であることが容易に示せる。ゲージ自由度を二つ使って $h' = h'' = 0$ の共形ニュートンゲージ (conformal Newtonian gauge) [縦型ゲージ (longitudinal gauge) とも呼ばれる] を取ると、重力ポテンシャルはそれぞれ $\Phi = \varphi + h/6$ と $\Psi = \varphi - h/2$ で書けて、時空の線素は

$$ds^2 = a^2 \left[ -(1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 + 2\Phi) dx^2 \right] \tag{8.1.9}$$

の形になる。この形から  $\Psi$  をニュートンポテンシャル、 $\Phi$  を空間曲率ゆらぎとも言う。

ゲージ不変な重力場のベクトル及びテンソル変数は

$$\Upsilon_i = h_i^T - \frac{1}{2}\partial_\eta h_i^{T'}, \quad h_{ij}^{TT} \quad (8.1.10)$$

で与えられる。

実用的には上で述べた  $h' = h'' = 0$  の他にさらに二つのゲージ自由度を使って  $h_i^{T'} = 0$  と置くこと計算が簡単になる。

ゲージ不変な物質場の摂動変数 物質場のストレステンソルはトレースレス  $T^{M\lambda}_\lambda = 0$  であることから、ゆらぎの変数は

$$\begin{aligned} T^{M0}_0 &= -(\rho + \delta\rho), \\ T^{Mi}_0 &= -\frac{4}{3}\rho v_i, \\ T^{M0}_i &= \frac{4}{3}\rho(v_i + h_{0i}), \\ T^{Mi}_j &= \frac{1}{3}(\rho + \delta\rho)\delta^i_j \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

で定義される。ここで、物質場のエネルギー密度  $\rho(\eta)$  は一様等方な運動方程式 (7.2.14) の解である。 $\delta\rho$  はエネルギー密度の摂動変数で、 $v_i$  は速度ゆらぎ変数と呼ばれるものである。

物質場のストレステンソルは一般座標変換のもとで

$$\delta_\xi T^{M\mu}_\nu = \partial_\nu \xi^\lambda T^{M\mu}_\lambda - \partial_\lambda \xi^\mu T^{M\lambda}_\nu + \xi^\lambda \partial_\lambda T^{M\mu}_\nu \quad (8.1.12)$$

のように変換する。これより、速度変数を  $v_i = v_i^T + \partial_i v$  のように横波成分  $v_i^T$  とスカラー成分  $v$  に分解すると、物質場の摂動変数は

$$\begin{aligned} \delta_\xi(\delta\rho) &= \xi^0 \partial_\eta \rho, \\ \delta_\xi v &= -\partial_\eta \xi^S, \\ \delta_\xi v_i^T &= -\partial_\eta \xi_i^T \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

のように変換することが分かる。

ここではゲージ不変な物質場の摂動変数として

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\partial_\eta\rho}{\rho}\sigma - 4\partial_\eta\hat{\phi}V, \\
 V &= v + \frac{1}{2}\frac{\partial_\eta h''}{\partial^2}, \\
 V_i &= v_i^{\text{T}} + \frac{1}{2}\partial_\eta h_i^{\text{T}'}, \\
 \Omega_i &= v_i^{\text{T}} + h_i^{\text{T}}
 \end{aligned} \tag{8.1.14}$$

を導入する。ここで、重力場のベクトル変数  $\Upsilon_i$  と物質場のベクトル変数  $V_i$  と  $\Omega_i$  は独立ではなく、関係式  $\Upsilon_i + V_i = \Omega_i$  を満たす。

## 8.2 重力場の線形発展方程式

共形モード場を特別に扱う扱うために、三種類のストレストンソルを導入して議論する。共形不変でない Einstein 重力だけを考えるのであれば三種類も導入する必要はないが、共形不変な作用を考える際は見通しがよくなる。それらは有効作用の変分

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
 &= \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left\{\bar{T}^\lambda_\lambda\delta\phi + \frac{1}{2}\bar{T}^{\mu\nu}\delta\bar{g}_{\mu\nu}\right\} \\
 &= \int d^4x\left\{\mathbf{T}^\lambda_\lambda\delta\phi + \frac{1}{2}\mathbf{T}^\mu_\nu\delta h^\nu_\mu\right\}
 \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

で定義される  $T_{\mu\nu}$ 、 $\bar{T}_{\mu\nu}$ 、 $\mathbf{T}_{\mu\nu}$  の三種類である。ここで、二つ目の等式は計量  $g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}$  の変分をモード分解した式

$$\delta g_{\mu\nu} = 2e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}\delta\phi + e^{2\phi}\delta\bar{g}_{\mu\nu} \tag{8.2.2}$$

を使っている。

それぞれどの計量で縮約するのか注意しなければならない。最初の等式で定義されている通常のストレストンソル  $T_{\mu\nu}(g)$  は物理的計量  $g_{\mu\nu}$  で縮約を取る。二行目の  $\bar{T}_{\mu\nu}(\phi, \bar{g})$  は共形モードを除いた計量  $\bar{g}_{\mu\nu}$  で、最後

に導入した  $\mathbf{T}_{\mu\nu}(\phi, h)$  は平坦な Minkowski 背景時空  $\eta_{\mu\nu}$  で縮約を取る。通常のストレストンソルとバー付のストレストンソルの関係は共形モード場の依存性として現れ、

$$T^{\mu\nu} = e^{-6\phi}\bar{T}^{\mu\nu} = e^{-6\hat{\phi}}(1-6\varphi)\bar{T}^{\mu\nu}, \quad (8.2.3)$$

$$T^\mu{}_\nu = e^{-4\phi}\bar{T}^\mu{}_\nu = e^{-4\hat{\phi}}(1-4\varphi)\bar{T}^\mu{}_\nu \quad (8.2.4)$$

などの関係が成り立つ。さらに、バー付と太字のストレストンソルの関係は、以下で議論する  $h^\mu{}_\nu$  について線形近似の範囲内では、

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \eta_{\lambda(\mu}\bar{T}^{\lambda}_{\nu)} \quad (8.2.5)$$

$$= \bar{T}_{\mu\nu} - h^\lambda_{(\mu}\hat{T}_{\nu)\lambda} \quad (8.2.6)$$

となる。ここで、 $\mathbf{T}_{\mu\nu}$  は対称化されている。 $\hat{T}_{\mu\nu}$  は摂動のゼロ次の背景時空ストレストンソルである。また、定義式より  $\mathbf{T}^\lambda{}_\lambda (= \eta^{\mu\nu}\mathbf{T}_{\mu\nu}) = \bar{T}^\lambda{}_\lambda$  である。

摂動変数の運動方程式は

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \mathbf{T}_{\mu\nu}^R + \mathbf{T}_{\mu\nu}^W + \mathbf{T}_{\mu\nu}^{EH} + \mathbf{T}_{\mu\nu}^M = 0 \quad (8.2.7)$$

と表される。ここで、R、W、EH、M はそれぞれ Riegert (=Wess-Zumino) 作用、Weyl 作用、Einstein 作用、物質場からの寄与である。

摂動変数の運動方程式をゲージ不変にするためには、力学的因子がスカラー関数として

$$\delta_\xi B = \xi^\lambda \partial_\lambda B = \xi^0 \partial_\eta B \quad (8.2.8)$$

のように変換するよう修正する必要がある。変数  $\sigma$  を使うと修正された力学的因子は

$$B = B_0 - \sigma \partial_\eta B_0 \quad (8.2.9)$$

と表される。Riegert 作用から導かれたストレストンソルの前の係数  $b_1$  を  $b_1 B$  と置き換えるとゲージ不変な運動方程式になる。ただ、実用的には、先にも述べた  $\sigma = 0$  を満たす共形ニュートンゲージを取ればこの変更は考えなくても良い。

スカラー線型方程式 次の二つの組み合わせ

$$\mathbf{T}^\lambda{}_\lambda = 0, \quad (8.2.10)$$

$$\frac{1}{\partial^2} \left( \mathbf{T}^i{}_i - 3 \frac{\partial^i \partial^j}{\partial^2} \mathbf{T}_{ij} \right) = 0 \quad (8.2.11)$$

を考える。これらの式では物質場からの寄与が消えて、重力ポテンシャルだけの式が得られる。

ストレステンソルのトレース成分 (8.2.10) から

$$\begin{aligned} & \frac{b_1}{8\pi^2} B_0(\tau) \left\{ -2\partial_\eta^4 \Phi - 2\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta^3 \Phi + \left( -8\partial_\eta^2 \hat{\phi} + \frac{10}{3} \partial^2 \right) \partial_\eta^2 \Phi \right. \\ & \quad + \left( -12\partial_\eta^3 \hat{\phi} + \frac{10}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial^2 \right) \partial_\eta \Phi + \left( \frac{16}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} - \frac{4}{3} \partial^2 \right) \partial^2 \Phi \\ & \quad + 2\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta^3 \Psi + \left( 8\partial_\eta^2 \hat{\phi} + \frac{2}{3} \partial^2 \right) \partial_\eta^2 \Psi + \left( 12\partial_\eta^3 \hat{\phi} - \frac{10}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial^2 \right) \partial_\eta \Psi \\ & \quad \left. + \left( -\frac{16}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} - \frac{2}{3} \partial^2 \right) \partial^2 \Psi \right\} \\ & + M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left\{ 6\partial_\eta^2 \Phi + 18\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \Phi - 4\partial^2 \Phi - 6\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \Psi \right. \\ & \quad \left. + \left( 12\partial_\eta^2 \hat{\phi} + 12\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} - 2\partial^2 \right) \Psi \right\} = 0 \quad (8.2.12) \end{aligned}$$

を得る。ここでは、背景場の運動方程式 (7.2.13) を使って  $\partial_\eta^4 \hat{\phi}$  と  $\partial_\eta B_0$  を含む項を取り除いている。

二番目の式 (8.2.11) は2階の微分方程式

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\bar{t}_r^2(\tau)} \left\{ 4\partial_\eta^2 \Phi - \frac{4}{3} \partial^2 \Phi - 4\partial_\eta^2 \Psi + \frac{4}{3} \partial^2 \Psi \right\} \\ & + \frac{b_1}{8\pi^2} B_0(\tau) \left\{ \frac{4}{3} \partial_\eta^2 \Phi + 4\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \Phi + \left( \frac{28}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} - \frac{8}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} - \frac{8}{9} \partial^2 \right) \Phi \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \Psi + \left( -\frac{4}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} + \frac{8}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} - \frac{4}{9} \partial^2 \right) \Psi \right\} \\ & + M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \{-2\Phi - 2\Psi\} = 0 \quad (8.2.13) \end{aligned}$$

になる。この方程式はインフレーション時代と Einstein 時空を結ぶ拘束条件のような役割がある。ランニング結合定数が小さいインフレーション初期の極限  $t_r \rightarrow 0$  では共形モード場の摂動を表す  $\Phi = \Psi (= \varphi)$  のゆらぎが優勢になることを表している。一方、結合定数が発散する相転移時で

は、最後の Einstein 項が優勢になって、Einstein 時空で成り立つ  $\Phi = -\Psi$  のゆらぎが実現されることを表している。

結合定数が消える極限では、 $\Phi = \Psi = \varphi$  とすると、トレース方程式 (8.2.12) の左辺は共形モード場のゆらぎ変数  $\varphi$  だけを用いて書くことができ、

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^\mu{}_\mu|_{t_r \rightarrow 0} &= -\frac{b_1}{4\pi^2} (\partial_\eta^4 \varphi - 2\partial_\eta^2 \partial_\eta^2 \varphi + \partial_\eta^4 \varphi) \\ &\quad + M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \{ 6\partial_\eta^2 \varphi - 6\partial_\eta^2 \varphi + 12\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \varphi \\ &\quad \quad \quad + 12 (\partial_\eta^2 \hat{\phi} + \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi}) \varphi \} \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

となる。

ベクトル、テンソル線形方程式 重力場のベクトルゆらぎが満たす線型方程式は

$$\frac{\partial^j}{\partial \eta^2} \mathbf{T}_{ij} = 0 \quad (8.2.15)$$

から導かれ、

$$\begin{aligned} &\frac{2}{t_r^2(\tau)} \{ \partial_\eta^3 \Upsilon_i - \partial_\eta \partial_\eta^2 \Upsilon_i \} \\ &- \frac{b_1}{8\pi^2} B_0(\tau) \left\{ \left( \frac{1}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} + \frac{4}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \right) \partial_\eta \Upsilon_i + \left( \frac{1}{3} \partial_\eta^3 \hat{\phi} + \frac{8}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \right) \Upsilon_i \right\} \\ &+ M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\eta \Upsilon_i + \partial_\eta \hat{\phi} \Upsilon_i \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.2.16)$$

で与えられる。

テンソルゆらぎが満たす運動方程式は  $\mathbf{T}_{ij} = 0$  より導かれ、

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{t_r^2(\tau)} \{ \partial_\eta^4 h_{ij}^{\text{TT}} - 2\partial_\eta^2 \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} + \partial_\eta^4 h_{ij}^{\text{TT}} \} \\ &+ \frac{b_1}{8\pi^2} B_0(\tau) \left\{ \left( \frac{1}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} + \frac{4}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \right) \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} + \left( \frac{1}{3} \partial_\eta^3 \hat{\phi} + \frac{8}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \right) \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + \left( -\frac{7}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} + \frac{2}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \right) \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} \right\} \\ &+ M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} - \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} + \frac{1}{2} \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.2.17)$$

で与えられる。

物理時間への変換公式 運動方程式を解く際は  $d\tau = a(\tau)d\eta$  で定義される物理時間  $\tau$  を使って解く。ここで、その変換公式を与えておく。スケール因子  $a(\tau) = e^{\hat{\phi}(\tau)}$  と Hubble 変数  $H(\tau) = \dot{a}(\tau)/a(\tau)$  を用いて、微分演算子は

$$\begin{aligned}\partial^2 &= a^2 \left( -\frac{k^2}{a^2} \right), \\ \partial_\eta &= a\partial_\tau, \\ \partial_\eta^2 &= a^2 (\partial_\tau^2 + H\partial_\tau), \\ \partial_\eta^3 &= a^3 \{ \partial_\tau^3 + 3H\partial_\tau^2 + (\dot{H} + 2H^2) \partial_\tau \}, \\ \partial_\eta^4 &= a^4 \{ \partial_\tau^4 + 6H\partial_\tau^3 + (4\dot{H} + 11H^2) \partial_\tau^2 + (\ddot{H} + 7H\dot{H} + 6H^3) \partial_\tau \}\end{aligned}\tag{8.2.18}$$

と書き換えることができる。また、背景時空の変数も

$$\begin{aligned}\partial_\eta \hat{\phi} &= aH, \\ \partial_\eta^2 \hat{\phi} &= a^2 (\dot{H} + H^2), \\ \partial_\eta^3 \hat{\phi} &= a^3 (\ddot{H} + 4H\dot{H} + 2H^3), \\ \partial_\eta^4 \hat{\phi} &= a^4 (\dddot{H} + 7H\ddot{H} + 4\dot{H}^2 + 18H^2\dot{H} + 6H^4)\end{aligned}\tag{8.2.19}$$

と書き換えられる。

### 8.3 物質場を含む線形発展方程式

最後に物質場の摂動変数を含む運動方程式を考える。これらの方程式は、次の章で行う原始スペクトルの計算には不要であるが、方程式系を完成させるために求めておく。

物質場のストレステンソル (8.1.11) は

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{\text{M}\lambda}_{\lambda} &= 0, \\ \mathbf{T}^{\text{M}}_{00} &= e^{4\phi} (\rho + \delta\rho + 4\rho\varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{0i}^{\text{M}} &= -\frac{4}{3}e^{4\phi}\rho\left(v_i + \frac{1}{2}h_{0i}\right), \\ \mathbf{T}_{ij}^{\text{M}} &= \frac{1}{3}e^{4\phi}(\rho + \delta\rho + 4\rho\varphi)\delta_{ij}\end{aligned}\quad (8.3.1)$$

と書き換えることができる。これを用いて次の二つの組み合わせ

$$\mathbf{T}_{00} + 3\partial_\eta\hat{\phi}\frac{\partial^i}{\partial^2}\mathbf{T}_{i0} = 0, \quad (8.3.2)$$

$$\frac{\partial^i}{\partial^2}\mathbf{T}_{i0} = 0 \quad (8.3.3)$$

を考える。

最初の式からエネルギー密度の摂動変数  $D$  を含んだ微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{8\pi^2}B_0(\tau)\left\{\left(-2\partial_\eta^2\hat{\phi} + 2\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} - \frac{2}{3}\partial^2\right)\partial_\eta^2\Phi + \left(2\partial_\eta^3\hat{\phi} - 4\partial_\eta^2\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi}\right)\partial_\eta\Phi\right. \\ \left.+ \partial_\eta\hat{\phi}\left(-2\partial_\eta^2\hat{\phi} + 2\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} - 2\partial^2\right)\partial_\eta\Phi + \left(-\frac{20}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} + \frac{4}{9}\partial^2\right)\partial^2\Phi\right. \\ \left.+ \partial_\eta\hat{\phi}\left(2\partial_\eta^2\hat{\phi} - 2\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} + \frac{2}{3}\partial^2\right)\partial_\eta\Psi + \left(-2\partial_\eta^3\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} + 4\partial_\eta^2\hat{\phi}\partial_\eta^2\hat{\phi}\right)\Psi\right. \\ \left.+ \left(2\partial_\eta^2\hat{\phi} + \frac{2}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} + \frac{2}{9}\partial^2\right)\partial^2\Psi\right\} \\ + \frac{2}{\bar{t}_r^2(\tau)}\left\{-\frac{4}{3}\partial^4\Phi - 4\partial_\eta\hat{\phi}\partial^2\partial_\eta\Phi + \frac{4}{3}\partial^4\Psi + 4\partial_\eta\hat{\phi}\partial^2\partial_\eta\Psi\right\} \\ + M_{\text{P}}^2e^{2\hat{\phi}}2\partial^2\Phi + e^{4\hat{\phi}}\rho D = 0\end{aligned}\quad (8.3.4)$$

が得られる。この式は重力ポテンシャルについて高々2階の時間微分しか含まないので、(8.2.12)と(8.2.13)の連立微分方程式から得られた $\Phi$ と $\Psi$ の解を代入すれば変数 $D$ の値を求めることができる。

二番目の式からは速度スカラー変数 $V$ を含んだ微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{8\pi^2}B_0(\tau)\left\{-\frac{2}{3}\partial_\eta^3\Phi + \left(-\frac{10}{3}\partial_\eta^2\hat{\phi} + \frac{2}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} + \frac{4}{9}\partial^2\right)\partial_\eta\Phi - \frac{4}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial^2\Phi\right. \\ \left.+ \frac{2}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta^2\Psi + \left(2\partial_\eta^2\hat{\phi} - \frac{2}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} + \frac{2}{9}\partial^2\right)\partial_\eta\Psi + \left(2\partial_\eta^3\hat{\phi} - \frac{2}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial^2\right)\Psi\right\} \\ + \frac{2}{\bar{t}_r^2(\tau)}\left\{-\frac{4}{3}\partial^2\partial_\eta\Phi + \frac{4}{3}\partial^2\partial_\eta\Psi\right\} \\ + M_{\text{P}}^2e^{2\hat{\phi}}\left\{2\partial_\eta\Phi - 2\partial_\eta\hat{\phi}\Psi\right\} - \frac{4}{3}e^{4\hat{\phi}}\rho V = 0\end{aligned}\quad (8.3.5)$$

を得る。この式も重力ポテンシャルについて高々3階の時間微分なので、連立微分方程式 (8.2.12) と (8.2.13) の解を代入すれば  $V$  を求めることができる。

運動方程式  $T_{0i} = 0$  からベクトル成分を抜き出すと、ベクトル変数  $\Omega_i$  を含んだ微分方程式

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\bar{t}_r^2(\tau)} \left\{ \partial_\eta^2 \partial^2 \Upsilon_i - \partial^4 \Upsilon_i \right\} - \frac{b_1}{8\pi^2} B_0(\tau) \left( \frac{1}{3} \partial_\eta^2 \hat{\phi} + \frac{4}{3} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \right) \partial^2 \Upsilon_i \\ & + \frac{1}{2} M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \partial^2 \Upsilon_i - \frac{4}{3} e^{4\hat{\phi}} \rho \Omega_i = 0 \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

を得る。この式もベクトル変数  $\Upsilon_i$  について高々2階の時間微分しか含まないなので、微分方程式 (8.2.16) の解を代入すれば  $\Omega_i$  を求めることができる。



## 第9章 CFT スペクトルから CMB 多重極まで

相転移のエネルギースケールが  $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 10^{17} \text{ GeV}$  であるとする、相転移以後宇宙はおよそ  $10^{29}$  ( $= 10^{17} \text{ GeV}/3^\circ\text{K}$ ) 倍ほど膨張することになる (図 7.4 参照)。インフレーション期に宇宙は  $10^{30}$  倍ほど膨張するので、Planck 時間に Planck 長さであったゆらぎは  $10^{59}$  倍ほど膨張して、現在では銀河団よりも大きな数百メガパーセク (Mpc) の大きさになっていると考えられる。この大きさのゆらぎは CMB を観測することによって調べることができるので、そのパワースペクトルを研究することで Planck スケールの現象を理解することができる。

この章では、まず重力ポテンシャルの線形発展方程式を解いてインフレーション解が実際に安定であることを示す。すなわち、ゆらぎの振幅が次第に小さくなり、平坦性やホライズン問題が説明できることを見る。その結果をもとに、Planck 時間以前に設定される共形不変な初期スペクトルがどのように時間発展するかを考察して、相転移点でのスペクトルを求める。それをビッグバン後の宇宙構造形成の種となる原始ゆらぎパワースペクトルと同一して CMB 異方性スペクトルを計算する。

### 9.1 重力場の 2 点相関関数と初期スペクトル

はじめに、線形発展方程式を解くための初期条件である初期スペクトルを与える。初期スペクトルはインフレーションが始まる以前のある適当な時間  $\tau_i = 1/E_i$  ( $E_i \geq H_D$ ) に設定する。この領域では  $\Phi = \Psi$  で表される共形モード場のゆらぎ  $\varphi$  が優勢で、そのダイナミクスは 4 階微分の

Riegert 作用によって記述される。その相関関数は対数関数となり、同時刻では

$$\langle \varphi(\tau_i, \mathbf{x}) \varphi(\tau_i, \mathbf{x}') \rangle = -\frac{1}{4b_1} \log(m^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2) \quad (9.1.1)$$

で与えられる。正の定数  $b_1$  は Riegert 作用の前の係数である。質量スケール  $m$  は物理時間  $\tau_i$  での共動座標で見た Planck 質量で、

$$m = a(\tau_i) H_D \quad (9.1.2)$$

と定義される。このとき、時間  $\tau_i$  の超曲面上の物理的距離は  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = a(\tau_i) |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  となる。ここで注意すべき点は、対数の相関関数 (9.1.1) はインフレーション時空のホライズン距離である Planck 長さ  $L_P = 1/H_D$  より長い相関をもつゆらぎが存在することを表している。

スペクトルは 3 次元共動座標空間での Fourier 変換を使って表す。変数  $\varphi(\mathbf{x})$  の Fourier 変換を

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (9.1.3)$$

と定義する。標準偏差  $\langle |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \rangle$  は

$$\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') \rangle = \langle |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \rangle (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (9.1.4)$$

で定義される。

対数関数の Fourier 変換は

$$-\log(m^2 |\mathbf{x}|^2) = \int_{k>\epsilon} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi^2}{k^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \log\left(\frac{m^2}{\epsilon^2 e^{2\gamma-2}}\right) \quad (9.1.5)$$

で与えられる。ここで、 $k = |\mathbf{k}|$  である。 $\epsilon (\ll 1)$  は無限小のカットオフ、 $\gamma$  は Euler 定数である。右辺の定数項は Fourier 空間では  $\delta^3(\mathbf{k})$  に比例するので無視すると、式 (9.1.1) から

$$\langle |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{\pi^2}{b_1} \frac{1}{k^3} \quad (9.1.6)$$

を得る。

重力場変数  $\varphi(\mathbf{x})$  の無次元パワースペクトル  $P_\varphi$  は

$$\langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle = \int \frac{dk}{k} P_\varphi(k) \quad (9.1.7)$$

で定義される。定義式 (9.1.4) を使うと、

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(\mathbf{x}) \rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}') \rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\tilde{\varphi}(\mathbf{k})|^2 \rangle \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

と計算されるので、スケール不変なスカラーパワースペクトル

$$P_\varphi(\tau_i, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\tilde{\varphi}(\tau_i, k)|^2 \rangle = \frac{1}{2b_1} \quad (9.1.9)$$

を得る。このスカラースペクトルのことを Harrison-Zel'dovich-Peebles スペクトルと呼ぶ。これは、通常  $k^{n_s-1}$  で定義されるスカラーゆらぎのスペクトル指数で表すと  $n_s = 1$  に相当する<sup>1</sup>。

初期のベクトル及びテンソルスペクトルは無次元のゲージ不変な変数  $\Upsilon^i$  と  $h_{\text{TT}}^{ij}$  のそれぞれの2点相関関数から求める。波数表示でのスペクトルは同様にして、無次元の場であるテンソル場  $h_{\text{TT}}^{ij}$  のダイナミクスは4階微分の Weyl 作用によって記述され、2点相関関数は対数関数で与えられる。これにより、テンソル場のパワースペクトルもスケール不変な

$$P_h(\tau_i, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |h_{\text{TT}}(\tau_i, k)|^2 \rangle = A_t \quad (9.1.10)$$

で与えられる。ここで、 $A_t$  は結合定数の2乗に比例した無次元の正の定数である。漸近自由性により初期では振幅  $A_t$  はスカラースペクトルのそれよりも十分に小さい値である。 $k^{n_t}$  で定義されるテンソルゆらぎのスペクトル指数で表すと  $n_t = 0$  に相当する。

## 9.2 線形方程式の解と安定性

ここでは、線形発展方程式を数値的に解いて、インフレーション期に振幅がどのように変化するかを見る。その考察から時空の相転移点  $\tau = \tau_\Lambda$

<sup>1</sup>指数を  $n_s - 1$  と定義するのはスカラーゆらぎに限った伝統的な表記である。

でのスペクトルをもとめ、それをビッグバン以後の宇宙の構造形成の初期値である原始パワースペクトルと同定する。

ランニング結合定数が小さい初期時間  $\tau_i$  では重力ポテンシャルは  $\Psi = \Phi = \varphi$  を満たすので、初期条件を

$$\tilde{\Phi}(\tau_i, k) = \tilde{\Psi}(\tau_i, k) \quad (9.2.1)$$

と設定する。一方、結合定数が発散する相転移点では  $\Psi = -\Phi$  となることが式 (8.2.13) から読み取れるので、境界条件として

$$\tilde{\Phi}(\tau_\Lambda, k) + \tilde{\Psi}(\tau_\Lambda, k) = 0 \quad (9.2.2)$$

を課して、(8.2.12) と (8.2.13) の連立微分方程式を物理時間  $\tau$  について数值的に解くことにする。

初期と相転移点では  $\Phi$  と  $\Psi$  の 2 点相関スペクトルは同じになるので、以下では  $\Phi$  を使ってスカラースペクトルを表すことにする。重力ポテンシャルの時間変化を表す遷移関数を

$$\tilde{\Phi}(\tau_\Lambda, k) = \mathcal{T}_\Phi(\tau_\Lambda, \tau_i) \tilde{\Phi}(\tau_i, k) \quad (9.2.3)$$

と定義すると、原始パワースペクトルは  $P_\Phi(\tau_\Lambda, k) = \mathcal{T}_\Phi^2(\tau_\Lambda, \tau_i) P_\varphi(\tau_i, k)$  で与えられる。

線形近似では共動波数  $k$  を固定して解く。微分の階数に応じてスケール因子  $a(\tau)$  をくくりだし、 $H_D$  を使って方程式全体を無次元化すると<sup>2</sup>、共動波数に依存した  $-\partial^2$  を含む項は物理的波数の関数  $k^2/m^2 a(\tau)^2$  に置き換わる。ここで、分母のスケール因子は背景時空の方程式の解で、数値計算する際は初期値を  $a(\tau_i) = 1$  と規格化して Planck 定数  $H_D$  を  $m$  に書き換えている。インフレーションによってスケール因子  $a(\tau)$  が大きくなると、物理的波数は急速に小さくなり、相転移付近では運動方程式はもはや波数依存性を持たなくなる。そのため、原始パワースペクトルのパターンは相転移のダイナミクスと関係した現象論的パラメータ  $\beta_0$ 、 $a_1$ 、 $\kappa$  によらない。

<sup>2</sup>物理時間  $\tau$  を無次元化した時間  $t = H_D \tau$  に置き換えるとよい。

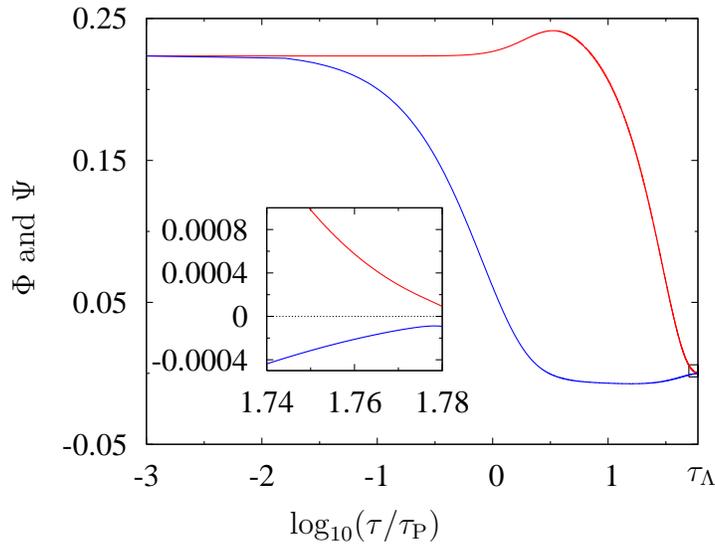


図 9.1: Bardeen ポテンシャル  $\Phi$  (赤) と  $\Psi$  (青) のインフレーション背景時空での線形発展方程式の解。初期値は  $\Phi = \Psi (= \varphi)$  を満たす定数  $1/\sqrt{20}$  で、共動波数は  $k = 0.01\text{Mpc}^{-1}$  と設定している。その他のパラメータは  $m = 0.0156 (= 60\lambda)\text{Mpc}^{-1}$ 。Bardeen ポテンシャルは振幅を減少させながら変化して相転移点  $\tau_\Lambda$  では  $\Phi = -\Psi$  となる。

ここでは、 $b_1 = 10$  として計算する。共動座標での Planck スケールは  $m = 0.0156\text{Mpc}^{-1}$  とした。インフレーション時代の膨張率 (e-foldings) はおおよそ二つの質量スケールの比  $H_D/\Lambda_{\text{QG}}$  になる。ここでは、前章で採用した値  $H_D/\Lambda_{\text{QG}} = 60$  を使う、また現象論的パラメータも同じ、 $\beta_0/b_1 = 0.06$ 、 $a_1/b_1 = 0.01$ 、 $\kappa = 0.5$  を使用する。このとき、膨張率は  $\mathcal{N}_e = 65.0$  となる。初期の重力ポテンシャルの振幅は  $1/\sqrt{2b_1} = \sqrt{P_\varphi}$  とする。計算結果を図 9.1 と図 9.2 に示す。重力のスカラーゆらぎは安定でインフレーション時代に振幅が小さくなるのが分かる。

テンソル場の線形発展方程式を初期値  $\sqrt{A_t} = 10^{-5}$  で解くと、図 9.3 を得る。テンソルゆらぎの振幅は保存されて最後まで小さいまま変わらないのが分かる。

ベクトルゆらぎは Friedmann 時空に入ると減衰して消えてなくなるの

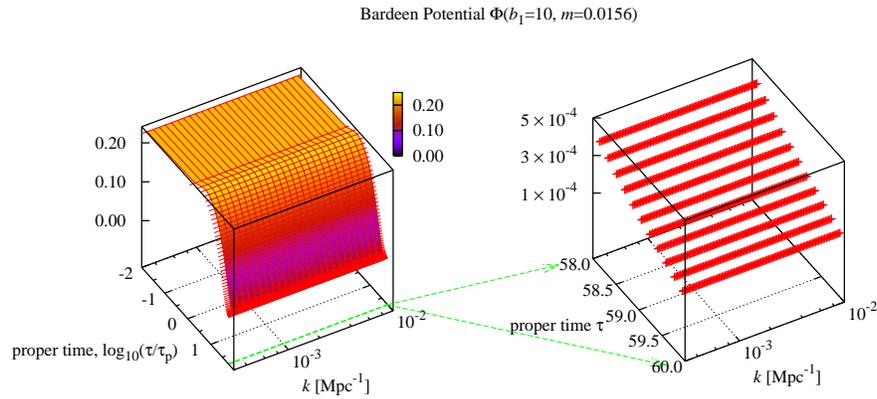


図 9.2: Bardeen ポテンシャル  $\Phi$  の時間発展。相転移点  $\tau = 60$  での線が原始パワースペクトルに相当する。

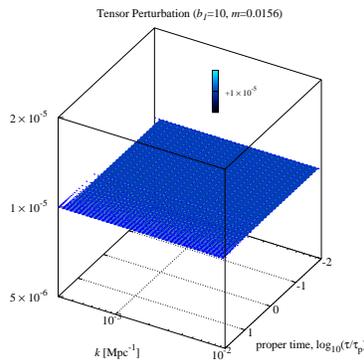


図 9.3: テンソルゆらぎの線形発展方程式の解。

でここでは考えないことにする。

**非ガウス性の効果** この小節では共形場理論で記述される共形モードのダイナミクスの非線形効果について考察する。共形不変性は量子論的な一般座標不変性の帰結であることから、ここでは一般座標不変な演算子であるスカラー曲率を用いてスカラーゆらぎを考える。初期条件  $\partial_\tau \varphi = \partial_\tau^2 \varphi = 0$ のもとで、無次元化されたスカラー曲率演算子は

$$\delta_R = \frac{\delta R}{12m^2} = \frac{1}{2m^2} e^{2\varphi} \left( -\partial^2 \varphi - \partial_i \varphi \partial^i \varphi \right) \quad (9.2.4)$$

と表される。共動運動量空間での Fourier 変換を

$$\tilde{\delta}_R(k) = \frac{k^2}{2m^2} \tilde{\varphi}_{\text{NL}}(k) \quad (9.2.5)$$

と書くと、非線形項を取り入れた共形モード場は  $\varphi$  の 2 次まで展開すると

$$\tilde{\varphi}_{\text{NL}}(k) = \tilde{\varphi}(k) + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}) \left( \frac{3}{4} + \frac{q^2}{k^2} \right) \quad (9.2.6)$$

と表される。この式は、関係式  $\varphi_{\text{NL}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + f_{\text{NL}}\varphi^2(\mathbf{x})$  で定義される非ガウス性パラメータがおおよそ  $f_{\text{NL}} \simeq 1$  であることを表している。

初期ではゆらぎの振幅が比較的大きいのでこの非線形項の寄与によってスペクトル指数が  $n_s > 1$  にシフトすると考えられる。一方、非ガウス性は一般座標不変性によって決まっているので、その大きさは時間発展の間ほぼ  $f_{\text{NL}} \simeq 1$  程度に保たれる。そのため、インフレーション時代に振幅が  $1/2b_1$  から  $A_s$  ( $\simeq 10^{-10}$ ) 程度まで小さくなると、非線形効果は消えて、スカラースペクトルは Harrison-Zel'dovich-Peebles スペクトルに近づいていく ( $n_s \rightarrow 1$ ) と考えられる。

**相関距離  $\xi_\Lambda$  の効果** ここでは、さらに量子重力の力学的な相関距離  $\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}}$  ( $\gg L_{\text{P}}$ ) を考慮に入れたスペクトルを与える。この距離は、時空がまだ膨張を始める前の量子重力が支配的な Planck 時間以前では、 $\xi_\Lambda$  以上はなれた 2 点間の相関が存在しないことを表している。

この効果はスペクトル指数に結合定数  $t_r$  の補正を入れることで表すことができる。さらにそれをランニング結合定数  $\bar{t}_r^2(k) = 1/\beta_0 \log(k^2/\lambda^2)$  に置き換えると

$$P_s(k) = A_s \left( \frac{k}{m} \right)^{v/\log(k^2/\lambda^2)} \quad (9.2.7)$$

を得る。ここで、 $v$  は正の定数、 $\lambda$  は共動座標系での力学的スケール

$$\lambda = a(\tau_i)\Lambda_{\text{QG}} \quad (9.2.8)$$

である。先に定義した Planck スケールとは  $m/\lambda = H_{\text{D}}/\Lambda_{\text{QG}}$  の関係が成り立つ。このスペクトルは  $k = \lambda$  で鋭く落ち込んで相関がゼロになることを表している。

図 7.4 でも述べたように、共動波数  $k$  で見れば、宇宙が膨張を始める前から存在しなかった  $k < \lambda$  の相関は進化の途中ずっと存在しないことになる。それゆえ、減衰因子はインフレーション期間中保たれるとして、スペクトル (9.2.7) を相転移点でのスカラースペクトルとして採用する。

テンソルゆらぎのスペクトルについても同様に考えて、相転移点でのスペクトルを

$$P_t(k) = A_t \left( \frac{k}{m} \right)^{v/\log(k^2/\lambda^2)} \quad (9.2.9)$$

と与えることにする。ここで、図 9.3 で示したように、振幅  $A_t$  は小さい値のままである。

スカラースペクトルの振幅はインフレーション期間に減少して、相転移点ではテンソルスペクトルの振幅と比較できるくらい小さくなるので、テンソル・スカラー比

$$r = \frac{A_t}{A_s} \quad (9.2.10)$$

は CMB スペクトルを決めるための重要な要素になる。

**物質場の変数と平坦性** 物質場の摂動変数の相転移点での値は重力ポテンシャルの値が分かると求めることができる。物質場を含む運動方程式からエネルギー密度変数の Fourier 成分は

$$D(\tau_\Lambda, k) = \frac{2}{3} \frac{H_D^2}{H(\tau_\Lambda)^2} e^{-2\mathcal{N}_e} \frac{k^2}{m^2} \Phi(\tau_\Lambda, k) \quad (9.2.11)$$

で与えられる。この式を導く際に  $\rho(\tau_\Lambda) = 3M_{\text{P}}^2 H^2(\tau_\Lambda)$  を使っている。この変数には膨張率  $\mathcal{N}_e$  を肩にもつ指数関数の減衰因子が掛かっているため、非常に小さな値になる。このように、現在の宇宙の年齢を説明するためには初期の物質場のゆらぎが非常に小さくなくてはならないという平坦性の問題を解くことができる。

### 9.3 CMB 異方性スペクトル

前節で求めたスペクトル  $P_s(9.2.7)$  と  $P_t(9.2.9)$  を Friedmann 時空の初

期条件である原始パワースペクトルと設定して CMB 異方性スペクトルを計算する。ここでは良く知られた既存の計算コード CMBFAST を用いてスペクトルを計算して WMAP 等のデータと比較する。

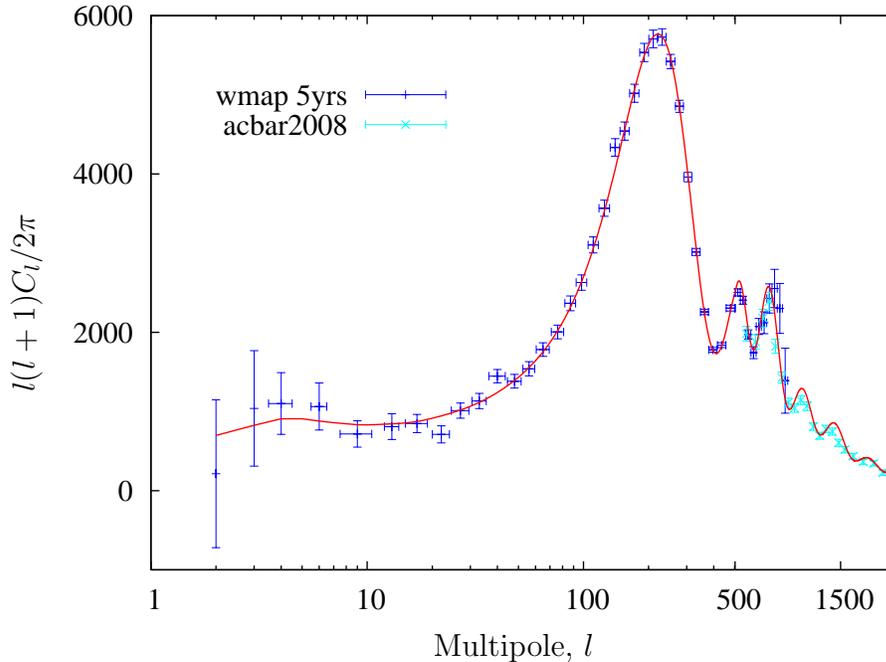


図 9.4: CMB の温度ゆらぎパワースペクトル (TT パワースペクトル)。計算結果を WMAP5 と ACBAR2008 のデータとともに表示。テンソル・スカラー比は  $r = 0.06$  としている。力学的減衰因子のパラメータは  $\lambda = 0.00026$  ( $= m/60$ ) $\text{Mpc}^{-1}$  と  $v = 0.00002$  である。光学的深さは EE スペクトル (非表示) から  $\tau_e = 0.08$  と決めている。その他の宇宙論的パラメータは  $\Omega_b = 0.043$ 、 $\Omega_c = 0.20$ 、 $\Omega_{\text{vac}} = 0.757$ 、 $H_0 = 73.1$ 、 $T_{\text{cmb}} = 2.726$ 、 $Y_{\text{He}} = 0.24$  と設定した [ $\chi^2/\text{dof} = 1.10$  ( $2 \geq l \leq 1000$ )]。

まずはじめに、低多重極成分の鋭い落ち込みを説明するために力学的スケール  $\lambda$  を決める。多重極  $l$  と共動波数  $k$  の関係はおおよそ  $l \simeq kd_{\text{dec}}$  で与えられることから、最終散乱面までの距離  $d_{\text{dec}}$  を  $14000\text{Mpc}$  として  $l = 2, 3$

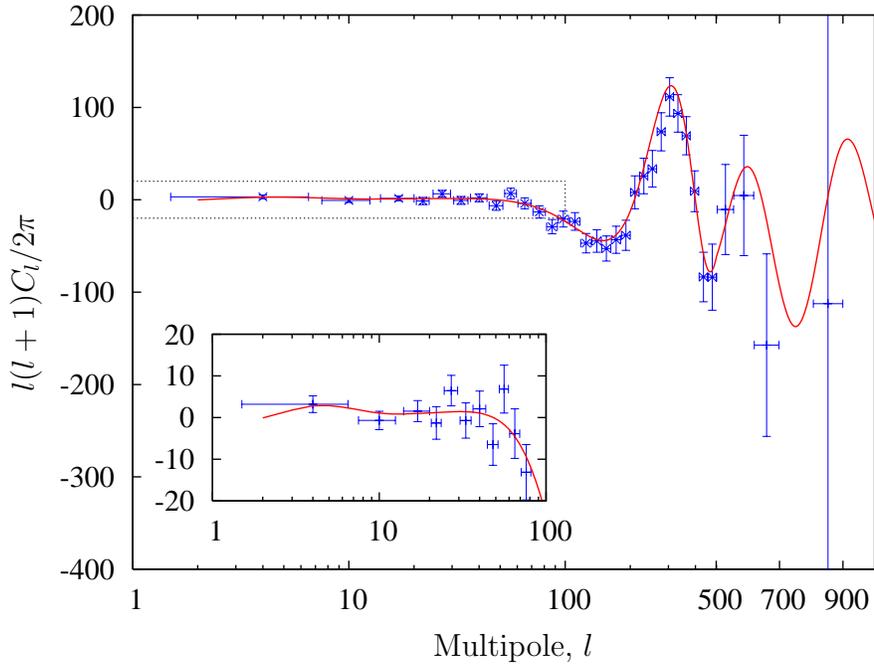


図 9.5: CMB の TE パワースペクトルを WMAP5 のデータとともに表示。パラメータは図 9.4 と同じである [ $\chi^2/\text{dof} = 0.977$  ( $2 \leq l \leq 1000$ )].

成分のおよその波数を求めると  $0.0002\text{Mpc}^{-1}$  となる。ここでは

$$\lambda = 0.00026\text{Mpc}^{-1} \quad (9.3.1)$$

と設定してその落ち込みを説明する。

定義式 (9.2.8) に  $\lambda$  と  $\Lambda_{\text{QG}} \simeq 1.1 \times 10^{17}\text{GeV}$  (7.2.23) の値を代入するとスケール因子は現在を 1 としてインフレーションが始まる前は

$$a(\tau_i) = \frac{0.00026\text{Mpc}^{-1}}{1.1 \times 10^{17}\text{GeV}} \simeq 1.5 \times 10^{-59} \quad (9.3.2)$$

のオーダーになることが分かる。すなわち、現在  $1/\lambda \simeq 4000\text{Mpc}$  の波長がインフレーションが始まる前は力学的相関距離  $\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\text{QG}} \simeq 2 \times 10^{-31}\text{cm}$  の波長であったことを表している。この値はインフレーションのシナリオと良く合っている。計算された膨張率  $\mathcal{N}_e$  の値から、宇宙は Planck 時間から相転移までおよそ  $10^{30}$  倍膨張したことになる。さらに、時空相転

移以後、力学的エネルギー  $\Lambda_{\text{QG}}$  と  $3^\circ\text{K}$  の比から宇宙はおよそ  $10^{29}$  倍膨張すると考えられるので、合わせると  $10^{59}$  が導かれる。

大角度成分 ( $l < 100$ ) におけるスカラーゆらぎ振幅の不足を補うためにテンソルゆらぎを加える必要がある。ここではテンソル・スカラー比を  $r = 0.06$  と設定する。また、EE スペクトル (非表示) から光学的深さを  $\tau_e = 0.08$  と決める。その他の宇宙論パラメータは実験データと合うように決める。計算された TT パワースペクトルは WMAP の 5 年目のデータ (WMAP5) 及び ACBAR (Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver) の実験データとともに図 9.4 に表示した。TE パワースペクトルは WMAP5 のデータとともに図 9.5 に表示した。



# 付録 A

## A.1 曲率に関する公式

本書の曲率の定義は

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \\
 R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda} &= \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}, \\
 R_{\mu\nu} &= R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}
 \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

である。共変微分の交換関係は

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]A_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} = \sum_{i=1}^n A_{\lambda_1, \dots, \sigma_i, \dots, \lambda_n} R_{\lambda_i\nu\mu}^{\sigma_i} \tag{A.1.2}$$

を満たす。付録 A では断らない限り次元は任意の  $D$  とする。

変分公式 曲率の変分公式は

$$\begin{aligned}
 \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\delta g_{\lambda\sigma}, \\
 \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \\
 \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}), \\
 \delta R &= -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}\delta g_{\mu\nu} - \nabla^2(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}), \\
 \delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left\{\nabla_{\mu}\nabla^{\lambda}\delta g_{\lambda\nu} + \nabla_{\nu}\nabla^{\lambda}\delta g_{\lambda\mu} - \nabla^2\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(g^{\lambda\sigma}\delta g_{\lambda\sigma})\right\} \\
 &\quad - R_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu}^{\sigma}\delta g_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}(R_{\mu}^{\lambda}\delta g_{\lambda\nu} + R_{\nu}^{\lambda}\delta g_{\lambda\mu}), \\
 \delta R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left\{\nabla_{\sigma}\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho} + \nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\rho} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\rho}\right. \\
 &\quad \left. - \nabla_{\nu}\nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\rho} + \nabla_{\nu}\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\sigma}\right\} \tag{A.1.3}
 \end{aligned}$$

で与えられる。

曲率の Weyl 変換則 Weyl 変換  $\delta_\omega g_{\mu\nu} = 2\omega g_{\mu\nu}$  による曲率の変分は

$$\delta_\omega \sqrt{-g} R = (D-2)\omega \sqrt{-g} R - 2(D-1)\sqrt{-g} \nabla^2 \omega \quad (\text{A.1.4})$$

となる。曲率の 2 乗の変分は

$$\begin{aligned} \delta_\omega \sqrt{-g} R^{\mu\nu\lambda\sigma} R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= (D-4)\omega \sqrt{g} R^{\mu\nu\lambda\sigma} R_{\mu\nu\lambda\sigma} - 8\sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \omega, \\ \delta_\omega \sqrt{g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= (D-4)\omega \sqrt{g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g} R \nabla^2 \omega \\ &\quad - 2(D-2)\sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \omega, \\ \delta_\omega \sqrt{-g} R^2 &= (D-4)\omega \sqrt{g} R^2 - 4(D-1)\sqrt{g} R \nabla^2 \omega, \\ \delta_\omega \sqrt{-g} \nabla^2 R &= (D-4)\omega \sqrt{-g} \nabla^2 R + (D-6)\sqrt{-g} \nabla^\lambda R \nabla_\lambda \omega \\ &\quad - 2\sqrt{-g} R \nabla^2 \omega - 2(D-1)\sqrt{g} \nabla^4 \omega, \\ \delta_\omega \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (D-4)\omega \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

で与えられる。これらより、積分可能条件 (2.1.10) を  $D$  次元に一般化した式 (6.1.10) は

$$\begin{aligned} [\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}] \Gamma &= 2\{4\eta_1 + D\eta_2 + 4(D-1)\eta_3 + (D-4)\eta_4\} \\ &\quad \times \int d^D x \sqrt{-g} R \omega_{[1} \nabla^2 \omega_2] \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

で与えられる。

Euler 関係式  $D=2$  のとき Euler 関係式

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (\text{A.1.7})$$

が成り立つ。 $D=4$  では Euler 関係式

$$R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_\nu^{\lambda\sigma\rho} - 2R_{\mu\lambda\nu\sigma} R^{\lambda\sigma} - 2R_{\mu\lambda} R_\nu^\lambda + R_{\mu\nu} R = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_4 \quad (\text{A.1.8})$$

が成り立つ。

モード分解と展開式 計量場を  $g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}$  のように共形モードとトレースレステンソルモードに分解すると、曲率は

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \bar{g}_{\mu}^{\lambda}\bar{\nabla}_{\nu}\phi + \bar{g}_{\nu}^{\lambda}\bar{\nabla}_{\mu}\phi - \bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^{\lambda}\phi, \\
R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda} &= \bar{R}_{\mu\sigma\nu}^{\lambda} + \bar{g}_{\nu}^{\lambda}\bar{\Delta}_{\mu\sigma} - \bar{g}_{\sigma}^{\lambda}\bar{\Delta}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\sigma}\bar{\Delta}_{\nu}^{\lambda} - \bar{g}_{\mu\nu}\bar{\Delta}_{\sigma}^{\lambda} \\
&\quad + (\bar{g}_{\nu}^{\lambda}\bar{g}_{\mu\sigma} - \bar{g}_{\sigma}^{\lambda}\bar{g}_{\mu\nu})\bar{\nabla}_{\rho}\phi\bar{\nabla}^{\rho}\phi, \\
R_{\mu\nu} &= \bar{R}_{\mu\nu} - (D-2)\bar{\Delta}_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}\left\{\bar{\nabla}^2\phi + (D-2)\bar{\nabla}_{\lambda}\phi\bar{\nabla}^{\lambda}\phi\right\}, \\
R &= e^{-2\phi}\left\{\bar{R} - 2(D-1)\bar{\nabla}^2\phi - (D-1)(D-2)\bar{\nabla}_{\lambda}\phi\bar{\nabla}^{\lambda}\phi\right\}
\end{aligned} \tag{A.1.9}$$

と展開される。ここで、 $\bar{\Delta}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\phi - \bar{\nabla}_{\mu}\phi\bar{\nabla}_{\nu}\phi$  である。

さらに、計量場  $\bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g}e^h)_{\mu\nu}$  を  $h_{\mu\nu}$  で展開すると、

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \hat{\nabla}_{(\mu}h^{\lambda}_{\nu)} - \frac{1}{2}\hat{\nabla}^{\lambda}h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{(\mu}(h^2)^{\lambda}_{\nu)} - \frac{1}{4}\hat{\nabla}^{\lambda}(h^2)_{\mu\nu} \\
&\quad - h^{\lambda}_{\sigma}\hat{\nabla}_{(\mu}h^{\sigma}_{\nu)} + \frac{1}{2}h^{\lambda}_{\sigma}\hat{\nabla}^{\sigma}h_{\mu\nu} + o(h^3), \\
\bar{R} &= \hat{R} - \hat{R}_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \hat{\nabla}_{\mu}\hat{\nabla}_{\nu}h^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\hat{\nabla}^{\lambda}h^{\mu}_{\nu}\hat{\nabla}_{\lambda}h^{\nu}_{\mu} + \frac{1}{2}\hat{R}^{\sigma}_{\mu\lambda\nu}h^{\lambda}_{\sigma}h^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{\nu}h^{\nu}_{\mu}\hat{\nabla}_{\lambda}h^{\lambda\mu} - \hat{\nabla}_{\mu}(h^{\mu}_{\nu}\hat{\nabla}^{\lambda}h^{\nu}_{\lambda}) + o(h^3), \\
\bar{R}_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} - \hat{R}^{\sigma}_{\mu\lambda\nu}h^{\lambda}_{\sigma} + \hat{R}_{(\mu}^{\lambda}h_{\nu)\lambda} + \hat{\nabla}_{(\mu}\hat{\nabla}^{\lambda}h_{\nu)\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\nabla}^2h_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2}h^{\lambda}_{(\mu}\hat{\nabla}^2h_{\nu)\lambda} - \frac{1}{2}\hat{\nabla}^{\lambda}h^{\sigma}_{\mu}\hat{\nabla}_{\sigma}h_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\hat{\nabla}_{\mu}h^{\lambda}_{\sigma}\hat{\nabla}_{\nu}h^{\sigma}_{\lambda} \\
&\quad - \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{\lambda}(h^{\lambda}_{\sigma}\hat{\nabla}_{(\mu}h^{\sigma}_{\nu)}) + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{\lambda}(h^{\sigma}_{(\mu}\hat{\nabla}_{\nu)}h^{\lambda}_{\sigma}) + \frac{1}{2}\hat{\nabla}_{\lambda}(h^{\lambda}_{\sigma}\hat{\nabla}^{\sigma}h_{\mu\nu}) + o(h^3)
\end{aligned} \tag{A.1.10}$$

を得る。ここで、 $a_{(\mu}b_{\nu)} = (a_{\mu}b_{\nu} + a_{\nu}b_{\mu})/2$  である。 $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$ 、 $\bar{g}^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \dots$  に注意して、 $[\hat{\nabla}_{\lambda}, \hat{\nabla}_{\nu}]h^{\lambda}_{\mu} = h^{\lambda}_{\sigma}\hat{R}^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} + h_{\mu\sigma}\hat{R}^{\sigma}_{\nu}$  を使うと  $\bar{R}_{\mu\nu}$  から  $\bar{R}$  を導くことができる。

## A.2 曲がった時空中のフェルミオン

計量場は多脚場を用いて  $g_{\mu\nu} = e_{\mu}^{\alpha}e_{\nu\alpha}$  と表される。以下では任意の  $D$  次

元を考え、断らない限り  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は Lorentz の脚、 $\mu, \nu, \lambda, \sigma$  は Einstein の脚とする。ガンマ行列はアルファベットによらずすべて Lorentz の脚を持つものとし、反交換関係  $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}$  で定義される。Einstein の脚を持つガンマ行列は導入せず、多脚場を用いて  $e_\alpha^\mu \gamma^\alpha$  と表す。フェルミオン  $\psi$  の Dirac 共役 (adjoint) は Lorentz の脚のガンマ行列を使って  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  と定義される。

共変微分 共変微分の一般的な式は

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} \quad (\text{A.2.1})$$

で与えられる。ここで、接続 1 フォーム (connection 1-form)  $\omega_\mu dx^\mu$  は

$$\omega_{\mu\alpha\beta} = e_\alpha^\nu \nabla_\mu e_{\nu\beta} = e_\alpha^\nu \left( \partial_\mu e_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_{\lambda\beta} \right) \quad (\text{A.2.2})$$

と定義される量で、Lorentz の脚について反対称性  $\omega_{\mu\alpha\beta} = -\omega_{\mu\beta\alpha}$  が成り立つ。 $\Sigma^{\alpha\beta}$  は Lorentz 生成子で交換関係

$$[\Sigma^{\alpha\beta}, \Sigma^{\gamma\delta}] = \eta^{\beta\gamma} \Sigma^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma} \Sigma^{\beta\delta} + \eta^{\beta\delta} \Sigma^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha} \Sigma^{\gamma\beta} \quad (\text{A.2.3})$$

を満たす。この交換関係より共変微分は

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega_{\nu\alpha\beta} - \partial_\nu \omega_{\mu\alpha\beta} + [\omega_\mu, \omega_\nu]_{\alpha\beta}) \Sigma^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha\beta} \Sigma^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

を満たす。

Lorentz 生成子はスカラー場に対しては  $\Sigma^{\alpha\beta} = 0$  である。ゲージ場に作用する場合は、Einstein の脚を使って  $\Sigma^{\mu\nu} = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \Sigma^{\alpha\beta}$  と書くと、 $(\Sigma^{\mu\nu})_{\lambda\sigma} = g^\mu_\lambda g^\nu_\sigma - g^\mu_\sigma g^\nu_\lambda$  で与えられ、共変微分は  $D_\mu = \nabla_\mu$  となる。フェルミオンに作用する場合はガンマ行列を用いて

$$\Sigma^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad (\text{A.2.5})$$

で与えられる。

Weyl 不変性 質量ゼロのフェルミオンは任意の次元で共形不変になる。無限小 Weyl 変換  $\delta_\omega g_{\mu\nu} = 2\omega g_{\mu\nu}$  を考えると、多脚場及びフェルミオンは

$$\delta_\omega e_\alpha^\mu = -\omega e_\alpha^\mu, \quad \delta_\omega e_{\mu\alpha} = \omega e_{\mu\alpha}, \quad \delta_\omega \psi = \frac{1-D}{2}\omega\psi, \quad \delta_\omega \bar{\psi} = \frac{1-D}{2}\omega\bar{\psi} \quad (\text{A.2.6})$$

と変換する。このとき、各量の変換は

$$\begin{aligned} \delta_\omega \omega_{\mu\alpha\beta} &= (e_{\mu\alpha} e_\beta^\lambda - e_{\mu\beta} e_\alpha^\lambda) \partial_\lambda \omega, \\ \delta_\omega (e_\alpha^\mu \gamma^\alpha D_\mu \psi) &= -\frac{D+1}{2} \omega e_\alpha^\mu \gamma^\alpha D_\mu \psi \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

となる。二番目の式では  $\gamma_\alpha \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D-1)\gamma^\beta$  を使った。これより、フェルミオンの運動項は

$$\delta_\omega (\sqrt{-g} \bar{\psi} e_\alpha^\mu \gamma^\alpha D_\mu \psi) = \left( D\omega + \frac{1-D}{2}\omega - \frac{D+1}{2}\omega \right) \sqrt{-g} \bar{\psi} e_\alpha^\mu \gamma^\alpha D_\mu \psi = 0 \quad (\text{A.2.8})$$

のように任意の  $D$  次元で Weyl 不変であることが示せる。

接続 1 フォームの展開式 摂動計算のさいに用いる接続 1 フォームの平坦な背景場のまわりでの展開式を記す。フェルミオンは共形不変なので共形モード場の依存性は除いて考える。

共形モード依存性を除いた多脚場はトレースレステンソル場で展開すると

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\mu\alpha} &= (e^{\frac{1}{2}h})_{\mu\alpha} = \eta_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}h_{\mu\alpha} + \frac{1}{8}(h^2)_{\mu\alpha} + \dots, \\ \bar{e}_\alpha^\mu &= (e^{-\frac{1}{2}h})_\alpha^\mu = \delta_\alpha^\mu - \frac{1}{2}h_\alpha^\mu + \frac{1}{8}(h^2)_\alpha^\mu + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

となる。ここで、 $\bar{e}_\mu^\alpha \bar{e}_{\nu\alpha} = \bar{g}_{\mu\nu}$ 、 $\bar{e}_\alpha^\mu \bar{e}_{\mu\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  である。いま平坦な背景時空のまわりで展開しているので、右辺に現れた量の脚はすべて Lorentz の脚とみなすことができる。この式を使うと展開式

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{\mu\alpha\beta} &= \bar{e}_\alpha^\nu (\partial_\mu \bar{e}_{\nu\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{e}_{\lambda\beta}) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\alpha}) - \frac{1}{8} (h_\alpha^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\beta} - h_\beta^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\alpha}) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4} (h_{\mu\lambda} \partial_\alpha h_\beta^\lambda - h_{\mu\lambda} \partial_\beta h_\alpha^\lambda) + \frac{1}{4} (h_\alpha^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\beta} - h_\beta^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\alpha}) + o(h^3) \quad (\text{A.2.10})$$

を得る。

# 付 録 B

## B.1 $S^3$ 上のテンソル調和関数

$S^3$  上の対称・横波・トレースレステンソル調和関数 ( $ST^2$  tensor harmonics) を定義するために座標系を導入する。まず、 $R^4$  を表す二つの座標系として、 $x^{\bar{\mu}}$  ( $\bar{\mu} = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ ) で表される直交座標系と、 $x^\mu = (x^0, x^i)$  で表される球座標系を導入する。ここで、 $i = 1, 2, 3$  及び  $x^0 = r = (x^{\bar{\mu}}x_{\bar{\mu}})^{1/2}$  である。 $R^4$  空間はそれぞれの座標系の計量を使って

$$ds_{R^4}^2 = \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}} = dr^2 + r^2 \hat{\gamma}_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{B.1.1})$$

と表される。 $\hat{\gamma}_{ij}$  は単位  $S^3$  の計量である。Euler 角を使って  $S^3$  の座標を  $x^i = (\alpha, \beta, \gamma)$  と表すと、二つの座標系をつなぐ関係式は

$$\begin{aligned} x^{\bar{0}} &= r \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \gamma), \\ x^{\bar{1}} &= r \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \\ x^{\bar{2}} &= -r \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{1}{2}(\alpha - \gamma), \\ x^{\bar{3}} &= -r \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

で与えられる。

$ST^2$  テンソル調和関数  $ST^2$  テンソル調和関数を Clebsch-Gordan 係数と Wigner  $D$  関数を用いて定義する。 $D$  関数は一般的に座標の足について対称トレースレスなテンソル  $\tau_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_n}$  を用いて

$$\begin{aligned} D_{mm'}^J &= \frac{1}{r^{2J}} x^{\bar{\mu}_1} \dots x^{\bar{\mu}_{2J}} (\tau_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_{2J}})_{mm'}, \\ (\tau_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_n})_{mm'}^* &= \epsilon_M (\tau_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_n})_{-m-m'} \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

と表すことができる。

$S^3$  のアイソメトリーである  $SU(2) \times SU(2)$  の  $(J, J)$  表現に属するスカラー調和関数は Wigner  $D$  関数を用いて

$$Y_{JM} = \sqrt{\frac{2J+1}{V_3}} D_{mm'}^J, \quad Y_{JM}^* = \epsilon_M Y_{J-M} \quad (\text{B.1.4})$$

と表すことができる。

空間の足をもつ調和関数はまず  $R^4$  の直交座標系を用いて表して、それを極座標に変換することで得ることができる。偏光パラメータ  $y = \pm 1/2$  を持つ  $SU(2) \times SU(2)$  の  $(J+y, J-y)$  表現に属するベクトル調和関数は

$$\begin{aligned} Y_{J(My)}^{\bar{\mu}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} \sum_{S,T} C_{Js, \frac{1}{2}t}^{J+ym} C_{Js', \frac{1}{2}t'}^{J-ym'} Y_{JS}(\tau^{\bar{\mu}})_{tt'}, \\ Y_{J(My)}^{\bar{\mu}*} &= -\epsilon_M Y_{J(-My)}^{\bar{\mu}} \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

と表さる。偏光  $x = \pm 1$  を持つ  $(J+x, J-x)$  表現に属するテンソル調和関数は

$$\begin{aligned} Y_{J(Mx)}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \sum_{S,T} C_{Js, 1t}^{J+xm} C_{Js', 1t'}^{J-xm'} Y_{JS}(\tau^{\bar{\mu}\bar{\nu}})_{tt'}, \\ Y_{J(Mx)}^{\bar{\mu}\bar{\nu}*} &= \epsilon_M Y_{J(-Mx)}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

と表すことができる。ここで、 $\tau_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_n}$  は  $D$  関数の表式に現れるものを用いて、

$$\begin{aligned} (\tau^{\bar{\mu}})_{m_1 m_1'}^* (\tau_{\bar{\mu}})_{m_2 m_2'} &= 2\delta_{M_1 M_2}, \\ (\tau^{\bar{\mu}\bar{\nu}})_{m_1 m_1'}^* (\tau_{\bar{\mu}\bar{\nu}})_{m_2 m_2'} &= 4\delta_{M_1 M_2} \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

と規格化している。これらの調和関数は関係式

$$x_{\bar{\mu}} Y_{J(My)}^{\bar{\mu}} = x_{\bar{\mu}} Y_{J(Mx)}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0 \quad (\text{B.1.8})$$

を満たす。

極座標表示でのベクトル、テンソル調和関数は

$$Y_{\mu J(My)} = \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}} Y_{\bar{\mu} J(My)}, \quad Y_{\mu\nu J(Mx)} = \frac{\partial x^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\bar{\nu}}}{\partial x^{\nu}} Y_{\bar{\mu}\bar{\nu} J(Mx)} \quad (\text{B.1.9})$$

と座標変換することで得られる。関係式 (B.1.8) は、球座標に変換した際、 $r(=x^0)$  座標を含む成分が

$$Y_{J(My)}^r = Y_{J(Mx)}^{rr} = Y_{J(Mx)}^{ri} = 0 \quad (\text{B.1.10})$$

のように消えることを表している。このことから、極座標に変換すると  $S^3$  の座標成分のみが得られる。このことを用いると、たとえば

$$\begin{aligned} Y^{\bar{\mu}} Y_{\bar{\mu}} &= \left(\frac{1}{r^2}\right) Y^i Y_i, \\ Y^{\bar{\mu}\bar{\nu}} Y_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= \left(\frac{1}{r^4}\right) Y^{ij} Y_i Y_j \end{aligned} \quad (\text{B.1.11})$$

のような規格化や  $SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数を計算する際に現れるスカラー量は、 $S^3$  上の具体的な表示が分からなくても、 $R^4$  座標での調和関数の表示を用いて計算することができる。

一般的に偏光パラメータ  $\varepsilon_n = \pm n/2$  を持つ  $(J + \varepsilon_n, J - \varepsilon_n)$  表現に属する  $n$  階のテンソル調和関数は

$$\begin{aligned} Y_{J(M\varepsilon_n)}^{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_n} &\propto \sum_{S,T} C_{J_s, \frac{n}{2}t}^{J+\varepsilon_n m} C_{J_s', \frac{n}{2}t'}^{J-\varepsilon_n m'} Y_{JS}(\tau^{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_n})_{tt'}, \\ Y_{J(M\varepsilon_n)}^{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_n*} &= (-1)^n \epsilon_M Y_{J(-M\varepsilon_n)}^{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_n} \end{aligned} \quad (\text{B.1.12})$$

で与えられる。

最後に、上記の処方で求めたベクトル調和関数の Euler 角による表示を記しておく。偏光  $y = 1/2$  の場合は

$$\begin{aligned} Y_{\alpha J(M\frac{1}{2})} &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J-\frac{1}{2}}, \\ Y_{\beta J(M\frac{1}{2})} &= \frac{1}{\sqrt{2}(2J+1)\sin\beta} \left\{ m \sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - m' \sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J-\frac{1}{2}} \right\}, \\ Y_{\gamma J(M\frac{1}{2})} &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.13})$$

偏光  $y = -\frac{1}{2}$  の場合は

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha J(M-\frac{1}{2})} &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J+\frac{1}{2}}, \\
Y_{\beta J(M-\frac{1}{2})} &= \frac{1}{\sqrt{2}(2J+1)} \frac{1}{\sin\beta} \left\{ m' \sqrt{\frac{(2J+2m+1)(2J-2m+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - m \sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J-\frac{1}{2}} \right\}, \\
Y_{\gamma J(M-\frac{1}{2})} &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2J+2m'+1)(2J-2m'+1)}{(2J+1)V_3}} D_{mm'}^{J-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.1.14})
\end{aligned}$$

と表される。

## B.2 $SU(2) \times SU(2)$ Clebsch-Gordan 係数

$SU(2) \times SU(2)$  Clebsch-Gordan 係数は  $ST^2$  テンソル調和関数の三つの積の  $S^3$  上の積分で定義される。ここでは、本文中で定義されている  $C$  以外の係数の一般式を挙げる。

係数 D

$$\begin{aligned}
D_{J_1(M_1y_1), J_2(M_2y_2)}^{JM} &= \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{JM}^* Y_{J_1(M_1y_1)}^i Y_{iJ_2(M_2y_2)} \\
&= -\sqrt{\frac{2J_1(2J_1+1)(2J_1+2)2J_2(2J_2+1)(2J_2+2)}{2J+1}} \\
&\quad \times \left\{ \begin{array}{ccc} J & J_1 & J_2 \\ \frac{1}{2} & J_2+y_2 & J_1+y_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} J & J_1 & J_2 \\ \frac{1}{2} & J_2-y_2 & J_1-y_1 \end{array} \right\} \\
&\quad \times C_{J_1+y_1m_1, J_2+y_2m_2}^{Jm} C_{J_1-y_1m'_1, J_2-y_2m'_2}^{Jm'}. \quad (\text{B.2.1})
\end{aligned}$$

この係数は  $M = M_1 + M_2$  と三角不等  $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$  を満たす。ここで、 $J + J_1 + J_2$  は整数。不等号の低い側 (高い側) の等式は  $y_1 = y_2$  ( $y_1 \neq y_2$ ) の場合に成り立つ。

## 係数 E

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{J_1(M_1x_1), J_2(M_2x_2)}^{JM} &= \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{JM}^* Y_{J_1(M_1x_1)}^{ij} Y_{ijJ_2(M_2x_2)} \\
&= \sqrt{\frac{(2J_1-1)(2J_1+1)(2J_1+3)(2J_2-1)(2J_2+1)(2J_2+3)}{2J+1}} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} J & J_1 & J_2 \\ 1 & J_2+x_2 & J_1+x_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J_1 & J_2 \\ 1 & J_2-x_2 & J_1-x_1 \end{Bmatrix} \\
&\quad \times C_{J_1+x_1m_1, J_2+x_2m_2}^{Jm} C_{J_1-x_1m'_1, J_2-x_2m'_2}^{Jm'}. \tag{B.2.2}
\end{aligned}$$

この係数は  $M = M_1 + M_2$  と三角不等式  $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$  を満たす。ここで、 $J + J_1 + J_2$  は整数。不等号の低い側 (高い側) の等式は  $x_1 = x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ ) の場合に成り立つ。

## 係数 G

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{J_1(M_1y_1); J_2M_2}^{JM} &= \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{JM}^* Y_{J_1(M_1y_1)}^i \hat{\nabla}_i Y_{J_2M_2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2J_1(2J_1+1)(2J_1+2)(2J_2+1)}{2J+1}} \sum_{K=J_2 \pm \frac{1}{2}} 2K(2K+1)(2K+2) \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} J & J_1 & K \\ \frac{1}{2} & J_2 & J_1 + \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J_1 & K \\ \frac{1}{2} & J_2 & J_1 - \frac{1}{2} \end{Bmatrix} C_{J_1+y_1m_1, J_2m_2}^{Jm} C_{J_1-y_1m'_1, J_2m'_2}^{Jm'}. \tag{B.2.3}
\end{aligned}$$

この係数は  $M = M_1 + M_2$  と三角不等式  $|J_1 - J_2| + \frac{1}{2} \leq J \leq J_1 + J_2 - \frac{1}{2}$  を満たす。ここで、 $J + J_1 + J_2$  は半整数である。

## 係数 H

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{J_1(M_1x_1); J_2(M_2y_2)}^{JM} &= \sqrt{V_3} \int_{S^3} d\Omega_3 Y_{JM}^* Y_{J_1(M_1x_1)}^{ij} \hat{\nabla}_i Y_{jJ_2(M_2y_2)} \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2J_1-1)(2J_1+1)(2J_1+3)2J_2(2J_2+1)(2J_2+2)}{2J+1}} \\
&\quad \times \sum_{K=J_2 \pm \frac{1}{2}} 2K(2K+1)(2K+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{Bmatrix} K & 1 & J_2 + y_2 \\ \frac{1}{2} & J_2 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K & 1 & J_2 - y_2 \\ \frac{1}{2} & J_2 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J_1 + x_1 & J_2 + y_2 \\ 1 & K & J_1 \end{Bmatrix} \\
& \times \begin{Bmatrix} J & J_1 - x_1 & J_2 - y_2 \\ 1 & K & J_1 \end{Bmatrix} C_{J_1+x_1m_1, J_2+y_2m_2}^{Jm} C_{J_1-x_1m'_1, J_2-y_2m'_2}^{Jm'}. \quad (\text{B.2.4})
\end{aligned}$$

この係数は  $M = M_1 + M_2$  と三角不等式  $|J_1 - J_2| + \frac{1}{2} \leq J \leq J_1 + J_2 - \frac{1}{2}$  を満たす。ここで、 $J + J_1 + J_2$  は半整数。不等号の低い側 (高い側) の等式は  $x_1 = 2y_2$  ( $x_1 \neq 2y_2$ ) で成り立つ。

### B.3 Clebsch-Gordan 係数及び Wigner $D$ 関数を含む公式

通常の Clebsch-Gordan 係数  $C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma}$  は三角不等式  $|a - b| \leq c \leq a + b$  と条件  $\alpha + \beta = \gamma$  を満たすときに値を持つ。ここで、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  は非負の整数又は半整数で、 $a + b + c$ 、 $a + \alpha$ 、 $b + \beta$ 、 $c + \gamma$  は非負の整数になる。この係数は  $C_{a\alpha, 00}^{a\alpha} = C_{aa, bb}^{a+ba+b} = 1$  と規格化され、関係式

$$C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a+b-c} C_{a-\alpha, b-\beta}^{c-\gamma} = (-1)^{a+b-c} C_{b\beta, a\alpha}^{c\gamma} = (-1)^{b+\beta} \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{c-\gamma, b\beta}^{a-\alpha} \quad (\text{B.3.1})$$

を満たす。以下の公式は文献 D. Varshalovich, A. Moskalev and V. Kher-sonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988) を参照。

#### Clebsch-Gordan 係数及び $6j$ 記号を含む公式

$$\sum_{\alpha, \beta} C_{a\alpha, b\beta}^{c\gamma} C_{a\alpha, b\beta}^{c'\gamma'} = \delta_{cc'} \delta_{\gamma\gamma'}, \quad (\text{B.3.2})$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha, \beta, \delta} (-1)^{a-\alpha} C_{b\beta, a\alpha}^{c\gamma} C_{b\beta, d\delta}^{e\epsilon} C_{d\delta, a-\alpha}^{f\varphi} \\
& = (-1)^{a+b+e+f} \sqrt{(2c+1)(2f+1)} C_{c\gamma, f\varphi}^{e\epsilon} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ e & f & d \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.3.3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\psi, \kappa, \rho, \sigma, \tau} (-1)^{\psi + \kappa + \rho + \sigma + \tau} C_{p\psi, q\kappa}^{a\alpha} C_{q\kappa, r\rho}^{b\beta} C_{r\rho, s\sigma}^{c\gamma} C_{s\sigma, t\tau}^{d\delta} C_{t\tau, p-\psi}^{e\epsilon} \\
&= (-1)^{-a-b-2c-2p-2r-t+\alpha+\delta} \sqrt{(2a+1)(2d+1)} \\
& \times \sum_{x, y} \sum_{\xi, \eta} (-1)^{\xi+\eta} (2x+1)(2y+1) C_{a\alpha, x\xi}^{b\beta} C_{x\xi, y\eta}^{e\epsilon} C_{y\eta, d-\delta}^{c-\gamma} \\
& \times \begin{Bmatrix} a & b & x \\ r & p & q \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x & e & y \\ t & r & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y & c & d \\ s & t & r \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.3.4})
\end{aligned}$$

$$\sum_x (-1)^{p+q+x} (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & x \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & x \\ d & c & q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & c & q \\ b & d & p \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.3.5})$$

Wigner  $D$  関数の公式

$$D_{mm'}^{J*} = (-1)^{m-m'} D_{-m-m'}^J, \quad (\text{B.3.6})$$

$$D_{m_1 m'_1}^{J_1} D_{m_2 m'_2}^{J_2} = \sum_{J=|J_1-J_2|}^{J_1+J_2} \sum_{m, m'} C_{J_1 m_1, J_2 m_2}^{J m} C_{J_1 m'_1, J_2 m'_2}^{J m'} D_{m m'}^J, \quad (\text{B.3.7})$$

$$\sum_{m_1, m'_1} \sum_{m_2, m'_2} C_{J_1 m_1, J_2 m_2}^{J m} C_{J_1 m'_1, J_2 m'_2}^{J' m'} D_{m_1 m'_1}^{J_1} D_{m_2 m'_2}^{J_2} = \delta_{JJ'} \{J_1 J_2 J\} D_{m m'}^J, \quad (\text{B.3.8})$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_1, m'_1} \sum_{m_2, m'_2} \sum_{m_3, m'_3} C_{K n, J_3 m_3}^{J m} C_{J_1 m_1, J_2 m_2}^{K n} C_{K' n', J_3 m'_3}^{J' m'} C_{J_1 m'_1, J_2 m'_2}^{K' n'} \\
& \times D_{m_1 m'_1}^{J_1} D_{m_2 m'_2}^{J_2} D_{m_3 m'_3}^{J_3} = \delta_{JJ'} \delta_{KK'} \{J_1 J_2 K\} \{K J_3 J\} D_{m m'}^J \quad (\text{B.3.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Box_3 D_{mm'}^J &= 4 \left\{ \partial_\beta^2 + \cot \beta \partial_\beta + \frac{1}{\sin^2 \beta} (\partial_\alpha^2 - 2 \cos \beta \partial_\alpha \partial_\gamma + \partial_\gamma^2) \right\} D_{mm'}^J \\
&= -4J(J+1) D_{mm'}^J, \quad (\text{B.3.10})
\end{aligned}$$

$$\int_{S^3} d\Omega_3 D_{m_1 m'_1}^{J_1*} D_{m_2 m'_2}^{J_2} = \frac{V_3}{2J_1+1} \delta_{J_1 J_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2}, \quad (\text{B.3.11})$$

$$\sum_{m'=-J}^J D_{m_1 m'}^{J*} D_{m_2 m'}^J = \delta_{m_1 m_2}. \quad (\text{B.3.12})$$

ここで、 $D$  関数はすべて同一点の  $D_{mm'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$  である。 $\{J_1 J_2 J_3\}$  は  $J_1 + J_2 + J_3$  が整数で  $|J_1 - J_2| \leq J_3 \leq J_1 + J_2$  を満たすときは 1、それ以外は消える量である。また、 $\{J_1 J_2 J_3\}$  は  $J_1$ 、 $J_2$ 、 $J_3$  の並べ替えても値は変わらない。

$J = 1/2$  と  $J = 1$  の Wigner  $D$  関数の具体形は Euler 角を用いて

$$\begin{aligned}
 D_{mm'}^{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} & -\sin \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \\ \sin \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} & \cos \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix}, \\
 D_{mm'}^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \beta}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)} & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} & \frac{1-\cos \beta}{2} e^{-i(\alpha-\gamma)} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} & \cos \beta & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \\ \frac{1-\cos \beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)} & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} & \frac{1+\cos \beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.3.13}$$

と表される。

# 付録C

## C.1 ゴースト場の共形変換の生成子

ゴースト場の共形変換の生成子を構成する。輻射 + ゲージ固定をすると、残りのゲージ自由度が共形 Killing ベクトルと同じ 15 の有限自由度になる。その自由度に対するゴーストを  $c$ 、 $c_M$ 、 $c_M^\dagger$ 、 $c_{MN}$  と書く。ここで、指数  $M$  と  $N$  は  $SU(2) \times SU(2)$  の  $(2, 2)$  表現の足である。ゴースト  $c$  は実で、 $c_{MN}$  は関係式  $c_{MN}^\dagger = c_{NM}$  と  $c_{MN} = -\epsilon_M \epsilon_N c_{-N-M}$  を満たす。同様にして反ゴースト  $b$ 、 $b_M$ 、 $b_M^\dagger$ 、 $b_{MN}$  を導入する。ここで、 $b$  は実、反ゴースト  $b_{MN}$  は関係式  $b_{MN}^\dagger = b_{NM}$  と  $b_{MN} = -\epsilon_M \epsilon_N b_{-N-M}$  を満たす。

ゴースト、反ゴーストの反交換関係は

$$\begin{aligned} \{b, c\} &= 1, \\ \{b_M^\dagger, c_N\} &= \{b_M, c_N^\dagger\} = \delta_{MN}, \\ \{b_{M_1 N_1}, c_{M_2 N_2}\} &= \delta_{M_1 M_2} \delta_{N_1 N_2} - \epsilon_{M_1} \epsilon_{N_1} \delta_{-M_1 N_2} \delta_{-N_1 M_2} \end{aligned} \quad (C.1.1)$$

で与えられる。時間並進に関する  $c$  と  $b$  及び  $S^3$  の回転に関する  $c_{MN}$  と  $b_{MN}$  は共形次元 0 をもつ。特殊共形変換に関する  $c_M$  と  $b_M$  は共形次元  $-1$ 、そのエルミート共役変数  $c_M^\dagger$  と  $b_M^\dagger$  は共形次元 1 をもつ。

有限自由度量子力学系のゴーストの作用は

$$I_{gh} = \int d\eta \left\{ i b \partial_\eta c + i b_{MN} \partial_\eta c_{MN} + i b_M^\dagger (\partial_\eta + i) c_M + i b_M (\partial_\eta - i) c_M^\dagger \right\} \quad (C.1.2)$$

で与えられる。ハミルトニアンは

$$H^{gh} = \sum_M \left( b_M^\dagger c_M + c_M^\dagger b_M \right) + E_0 \quad (C.1.3)$$

となる。定数項  $E_0$  は以下で示すように代数が閉じる条件で決まる。

共形代数が閉じる条件から生成子を決定する。 $Q_M$  は共形次元  $-1$  をもった  $SU(2) \times SU(2)$  の  $(2, 2)$  表現に属することから、その一般的な形は

$$Q_M^{gh} = \lambda_1 \mathbf{b} \mathbf{c}_M + \lambda_2 \mathbf{b}_M \mathbf{c} + \sum_R (\kappa_1 \mathbf{b}_R \mathbf{c}_{RM} + \kappa_2 \mathbf{b}_{MR} \mathbf{c}_R) \quad (\text{C.1.4})$$

で与えられる。共形代数を満たす条件から各項の係数は  $\lambda_1 \lambda_2 = 2$  と  $\kappa_1 \kappa_2 = 2$  を満たすことが分かる。ハミルトニアンの定数項は

$$E_0 = -4 \quad (\text{C.1.5})$$

と決まる。これにより、15 個の共形代数の生成子が決まって

$$\begin{aligned} Q_M^{gh} &= \lambda \mathbf{b} \mathbf{c}_M + \frac{2}{\lambda} \mathbf{b}_M \mathbf{c} + \sum_R \left( \kappa \mathbf{b}_R \mathbf{c}_{RM} + \frac{2}{\kappa} \mathbf{b}_{MR} \mathbf{c}_R \right), \\ H^{gh} &= \sum_R (\mathbf{b}_R^\dagger \mathbf{c}_R + \mathbf{c}_R^\dagger \mathbf{b}_R) - 4, \\ R_{MN}^{gh} &= \mathbf{b}_N^\dagger \mathbf{c}_M + \mathbf{c}_N^\dagger \mathbf{b}_M - \epsilon_M \epsilon_N (\mathbf{b}_{-M}^\dagger \mathbf{c}_{-N} + \mathbf{c}_{-M}^\dagger \mathbf{b}_{-N}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_R (\mathbf{b}_{MR} \mathbf{c}_{NR} + \mathbf{c}_{RM} \mathbf{b}_{RN} - \mathbf{b}_{RN} \mathbf{c}_{RM} - \mathbf{c}_{NR} \mathbf{b}_{MR}) \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

を得る。ここで、 $\lambda$  と  $\kappa$  は任意の定数である。ハミルトニアンの定数項は本文でも述べたように 4 次元体積と関係している。

# 付録D

## D.1 次元正則化のための公式

次元正則化については場の理論の教科書 T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics* (World Scientific, 1987) が実用的で詳しい。

$D$  次元 Euclid 空間積分  $D$  次元 Euclid 空間積分は

$$\begin{aligned} \int d^D p &= \int p^{D-1} dp \int d\Omega_D, \quad (p^2 = p_\mu p_\mu) \\ \int d\Omega_D &= \int \prod_{l=1}^{D-1} \sin^{D-1-l} \theta_l d\theta_l = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \end{aligned} \quad (\text{D.1.1})$$

と表される。

基本積分公式  $D$  次元正則化に出てくる運動量積分の基本形は  $p^2$  の関数を被積分関数にもつ

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^{2n}}{(p^2 + L)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - n - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma(\alpha)} L^{D/2+n-\alpha} \quad (\text{D.1.2})$$

である。被積分関数が  $p_\mu$  を含む場合は

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p_\mu p_\nu f(p^2) &= \frac{1}{D} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^2 f(p^2), \\ \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p_\mu p_\nu p_\lambda p_\sigma f(p^2) &= \frac{1}{D(D+2)} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda}) \\ &\quad \times \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} p^4 f(p^2) \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

を使うと基本形の積分で表すことができる。被積分関数が運動量  $p_\mu$  の奇数次の場合はゼロである。

Feynman パラメータ公式 自己エネルギーや頂点関数のくりこみ計算を行う際に現れるより複雑な積分は Feynmann パラメータ公式

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1}}{[(1-x)A + xB]^{\alpha+\beta}} \quad (\text{D.1.4})$$

を使って運動量積分を基本形が使える形にする。

自己エネルギー積分 自己エネルギーのくりこみ計算に現れる  $A = p^2 + z^2$  と  $B = (p+q)^2 + z^2$  の組み合わせの場合を考える。ここで、 $z^2$  は質量項に当たる。このとき、

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{f(p_\mu, q_\nu)}{(p^2 + z^2)^\alpha ((p+q)^2 + z^2)^\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} \int \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \frac{f(p'_\mu - xq_\mu, q_\nu)}{[p'^2 + z^2 + x(1-x)q^2]^{\alpha+\beta}} \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

を得る。頂点関数のくりこみ計算ではこの作業をくりかえす。

発散の評価 次元正則化では  $D = 4 - 2\epsilon$  として、紫外発散は  $\epsilon$  の極として抜き出される。その際に、

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \frac{\epsilon}{2} \left( \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) + o(\epsilon^2), \\ a^\epsilon &= e^{\epsilon \ln a} = 1 + \epsilon \ln a + o(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{D.1.6})$$

を使う。ここで、 $a$  として  $p^2$  や赤外発散を取り除くための無限小の  $z^2$  などが対応する。

ガンマ行列の公式  $D$ 次元平坦 Euclid 背景時空でのガンマ行列を  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$  と定義する。次元正則化で使われるガンマ行列の公式として、

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda \gamma_\lambda &= -D, \\ \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda &= (D-2)\gamma_\mu, \\ \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda &= -(D-4)\gamma_\mu \gamma_\nu + 4\delta_{\mu\nu}, \\ \gamma_\lambda \gamma_{\mu\nu} &= \gamma_{\lambda\mu\nu} - \delta_{\lambda\mu} \gamma_\nu + \delta_{\lambda\nu} \gamma_\mu \end{aligned} \quad (\text{D.1.7})$$

などがある。ここで、同じ時空の脚は  $\delta_{\mu\nu}$  で縮約を取るものとする。ガンマ行列の反対称積は

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ \gamma_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{3!}(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda + \gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu - \gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda - \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu)\end{aligned}\tag{D.1.8}$$

と定義する。



# 付 録 E

## E.1 基本定数とパラメータ

換算 Planck 定数	$\hbar$	=	$1.055 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-1}$
光速 (speed of light)	$c$	=	$2.998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
Newton 定数	$G$	=	$6.672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Planck 質量	$m_{\text{pl}}$	=	$2.177 \times 10^{-5} \text{ g}$ = $1.221 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$
換算 Planck 質量	$M_{\text{P}}$	=	$2.436 \times 10^{18} \text{ GeV}/c^2$
Planck 長さ	$l_{\text{pl}}$	=	$1.616 \times 10^{-33} \text{ cm}$
Planck 時間	$t_{\text{pl}}$	=	$5.390 \times 10^{-44} \text{ s}$
Boltzmann 定数	$k_{\text{B}}$	=	$1.381 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$
メガパーセク (Megaparsec)	1Mpc	=	$3.086 \times 10^{24} \text{ cm}$
Hubble 定数	$H_0$	=	$100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
現在の Hubble 距離	$c/H_0$	=	$2998h^{-1} \text{ Mpc}$ (現在の観測では $h \simeq 0.7$ である)

自然単位系 ( $c = \hbar = k_{\text{B}} = 1$ ) への変換に有益な定数

1 cm	=	$5.068 \times 10^{13} \hbar/\text{GeV}$
1 s	=	$1.519 \times 10^{24} \hbar/\text{GeV}/c$
1 g	=	$5.608 \times 10^{23} \text{ GeV}/c^2$
1 erg	=	$6.242 \times 10^2 \text{ GeV}$
1 K	=	$8.618 \times 10^{-14} \text{ GeV}/k_{\text{B}}$



## 付録F 著者文献

本書の内容は以下の主な著作を統一的にまとめたものである。

### レビュー

1. Background Free Quantum Gravity and Cosmology,  
K. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, *Focus on Quantum Gravity Research* (Nova Science Publisher, NY, 2006), Chap. 1.

### 共形不変性と物理状態

2. Conformal Field Theory on  $R \times S^3$  from Quantized Gravity,  
K. Hamada, *Int. J. Mod. Phys. A24* (2009) 3073.
3. Building Blocks of Physical States in a Non-Critical 3-Brane on  $R \times S^3$ ,  
K. Hamada, *Int. J. Mod. Phys. A20* (2005) 5353.
4. Conformal Algebra and Physical States in a Non-critical 3-brane on  $R \times S^3$ ,  
K. Hamada and S. Horata, *Prog. Theor. Phys.* 110 (2003) 1169.

### くりこみ理論

5. Renormalizable 4D Quantum Gravity as a Perturbed Theory from CFT,  
K. Hamada, arXiv:0907.3969[hep-th].
6. Resummation and Higher Order Renormalization in 4D Quantum Gravity,  
K. Hamada, *Prog. Theor. Phys.* 108 (2002) 399.
7. Background-metric Independent Formulation of 4D Quantum Gravity,  
K. Hamada and F. Sugino, *Nucl. Phys. B553* (1999) 283

## 量子重力の宇宙論

8. From CFT Spectra to CMB Multipoles in Quantum Gravity Cosmology,  
K. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, arXiv:0908.0192[astro-ph].
9. Analyzing WMAP Observation by Quantum Gravity,  
K. Hamada, S. Horata, N. Sugiyama and T. Yukawa,  
Prog. Theor. Phys. 119 (2008) 253.
10. Space-time Evolution and CMB Anisotropies from Quantum Gravity,  
K. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, Phys. Rev. D74 (2006) 123502.
11. CMB Anisotropies Reveal Quantized Gravity,  
K. Hamada and T. Yukawa, Mod. Phys. Lett. A20 (2005) 509.