

宇宙論的摂動論¹

KEK 浜田賢二²

本書は宇宙論的摂動論 (cosmological perturbation theory) 及び CMB 異方性スペクトルについて解説したものである。参考文献: R. Durrer, *The theory of CMB Anisotropies*, astro-ph/0109522; A. Liddle and D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, 2000).

1 不安定性と摂動論

アインシュタイン方程式の Friedmann 解は不安定解である。通常はこのような解が選ばれることはない。なぜなら、この解のまわりの小さな摂動 (ゆらぎ) を考えるとそれは時間とともに成長して解から大きくずれてしまうからである。にもかかわらず宇宙は Friedmann 解で良く近似できる。このことは初期の摂動が非常に小さかったことを意味している。

100 億年以上も長く宇宙が続くために必要な非常に小さな初期ゆらぎをつくるアイデアとしてインフレーションが提案された。それは、物質が生成されるビッグバン以前に指数関数的に宇宙が膨張する時期があって、その時期にゆらぎが小さくなったとする考えである。このアイデアは同時に何故ホライズンサイズよりも大きなサイズの相関が宇宙初期に存在したのか (地平線問題) を説明することができる。

ビッグバン以後、ゆらぎが成長して星や銀河、銀河団といった構造が造られる。これらの構造形成は非線形効果を含むので単純な摂動論では記述できないが、宇宙が中性化するまではゆらぎはまだ小さく宇宙論的

¹本解説書の内容はさらに加筆、修正して著書「共形場理論を基礎にもつ 量子重力理論と宇宙論」(プレアデス出版, 2016) に掲載している。

²URL: <http://research.kek.jp/people/hamada/>

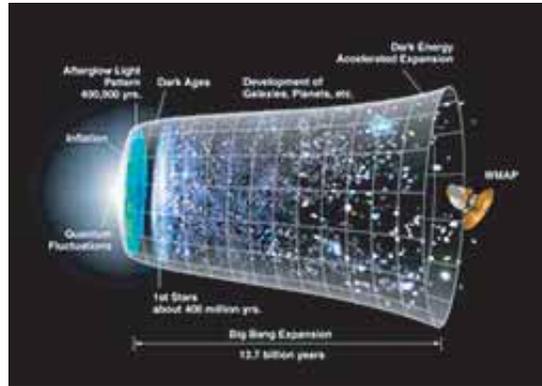


図 1: 宇宙の時間発展。

摂動論が適用可能である。中性化以後は光は物質との相互作用から自由(脱結合)になるためゆらぎが成長しなくなる(Sachs-Wolfe 関係)。そのため、脱結合する時点でのゆらぎのスペクトルが分かれば現在の宇宙マイクロ波背景放射(CMB)のスペクトルをおおよそ知ることができる。観測されたCMBのPlanck分布(図2)からのずれをあらわす温度ゆらぎの振幅 $\delta T/T$ は摂動論が十分に機能する 10^{-5} のオーダーである。

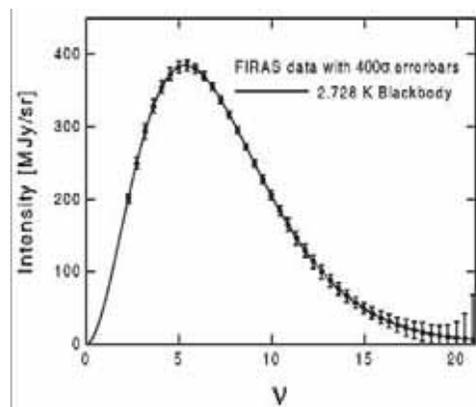


図 2: CMBのPlanck分布。

Wilkinson Microwave Anisotropies Probe (WMAP) 人工衛星によるCMBの観測から得られた温度ゆらぎスペクトル(図3)は放射優勢な時

代から現在までの宇宙の歴史を記録している。宇宙初期のスペクトルはほぼ特徴のないスケール不変な形であったと考えられている。Harrison-Zel'dovich 型と呼ばれるそのスペクトルを図3のなかに書き込むと真横一直線になる。すなわち、その直線からの変形が宇宙の発展のなかでゆらぎが受けたダイナミクスを表している。

これらの変化はすべて宇宙が放射優勢から物質優勢に移る時期から中性化するまでの期間に起こる。それ以前はスケール不変なスペクトルが保たれるため放射優勢な時代が続く限りどこまでも過去に遡ることができる。そのため、CMB スペクトルから宇宙初期のスペクトルが生成されたと考えられる Planck スケールの現象を調べることができる³。

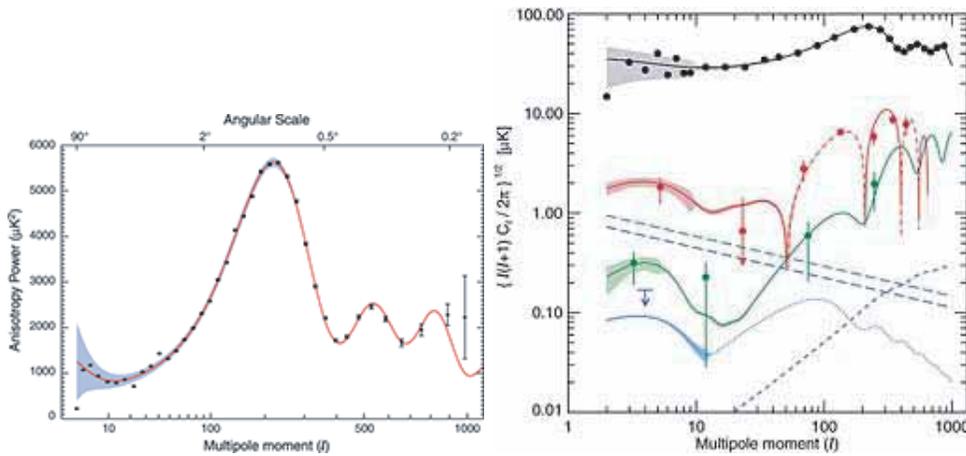


図 3: WMAP 温度ゆらぎスペクトル。

スペクトルは大まかに三つの領域に分けることができる:スケール不変な初期宇宙のスペクトルをほぼそのまま伝えていると考えられる低多重極成分領域 ($l < 30$)、放射優勢の時代から物質優勢の時代に入って宇宙が中性化するまでの光子とバリオンのプラズマ流体の振動が現れている領域 ($30 < l < 800$)、そして中性化の過程で光子のゆらぎの振幅が指数関数

³現在観測している CMB は放射優勢から物質優勢に移行する前後からホライズンの内側に入るサイズのゆらぎである。サイズがまだホライズンサイズより大きなそれ以前の時期ではスペクトルはほとんど変化しない。

的に減少する Silk 減衰領域 ($l > 800$)。この減衰領域では完全流体の近似が破れ非等方ストレスが現れる。

Silk 減衰が起こるのは、物質が中性化するプロセス (再結合) が始まってから光が物質から完全に自由になる (脱結合) までの間に、光の平均自由行程が長くなり熱平衡が保てなくなることによる。平均自由行程よりも波長が長ければ完全流体の近似が成り立つが、短い波長のゆらぎは拡散 (photon diffusion) してゆらぎが平均化され振幅は減衰する⁴。この効果は第 1 音波ピークを越えた辺りから現れはじめ、 $l \simeq 800$ を越えると著しくなる。したがって、完全流体を仮定した宇宙論的摂動論が比較的有効なのは長波長領域のせいぜい $l < 800$ までである。Silk 減衰を扱うためにはトムソン散乱を考慮した Boltzmann 方程式を解く必要がある。

ここでは Boltzmann 方程式を解くことはしない。CMB 温度ゆらぎスペクトルの計算はすでにプログラム化されており、CMBFAST など既存の計算コードが公開されている。この解説書の目的は図 3 のスペクトルがどのようにして得られるのか大まかに理解することである。

2 Friedmann 時空

宇宙論的摂動論とは、ある一様等方な背景時空のまわりでのゆらぎ (摂動) の時間発展を記述する学問である。通常は背景時空として Einstein 方程式の解である Friedmann 時空を考える。観測の結果から空間曲率はほとんどゼロなので以下では簡単のため無視する。また、物質場として完全流体を考える。このとき背景時空の計量及び各状態の物質場のストレステンソルは

$$ds^2 = e^{2\hat{\phi}} (-d\eta^2 + dx^2), \quad (2.1)$$

$$T_{(\alpha)\nu}^\mu = \text{diag}(-\rho_\alpha, P_\alpha, P_\alpha, P_\alpha) \quad (2.2)$$

⁴完全流体は粘性がゼロの流体である (\neq 理想気体)。粘性は平均自由行程に比例する量で、粘性がゼロであるとは、平均自由行程がゼロの強結合の系を意味する。このように頻繁に相互作用している系ではその系の中で熱のやり取りが閉じていて熱平衡が実現できる。

で与えられる。ここで、 $\hat{\phi}(\eta)$ は背景重力場の共形モード、 η は共形時間 (conformal time)、 \mathbf{x} は共動座標 (comoving coordinate) である。共動座標は宇宙が膨張してもかわらない角度のような座標である。これに対して $d\tau = e^{\hat{\phi}} d\eta$ および $\mathbf{r} = e^{\hat{\phi}} \mathbf{x}$ で定義される座標を固有 (物理) 時間及び物理的距離と呼ぶ。 ρ_α と P_α はある状態 α のエネルギー密度及び圧力を表す。通常、物質場として複数の状態を考える。これらの変数は共形時間 η にのみ依存する関数である。

物質の状態は圧力とエネルギー密度の比例係数として定義される状態方程式パラメータ (equation of state parameter)

$$w_\alpha = \frac{P_\alpha}{\rho_\alpha} \quad (2.3)$$

で表される。放射の状態では状態方程式パラメータは $1/3$ となり、ストレステンソルはトレースレスになる。また、質量をもった粒子でもビッグバン直後のように温度が十分高ければ質量ゼロとみなせるので放射の状態として記述される。宇宙が冷えて温度が粒子の質量よりも低くなれば放射圧が消えて状態方程式パラメータは 0 になる。

粒子の源泉がない場合の物質場の保存則 $\nabla_\mu T_{(\alpha)\nu}^\mu = 0$ は各状態に対して

$$\partial_\eta \rho_\alpha + 3\partial_\eta \hat{\phi} (\rho_\alpha + P_\alpha) = 0 \quad (2.4)$$

で与えられる。Einstein 方程式のトレース部分と (00) 成分はそれぞれ

$$M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} \left(6\partial_\eta^2 \hat{\phi} + 6\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \right) - \rho + 3P - 4\Lambda = 0, \quad (2.5)$$

$$-3M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} + \rho + \Lambda = 0, \quad (2.6)$$

で与えられる。ここで、 Λ は宇宙項である。エネルギー密度 ρ と圧力 P はすべての状態について和を取った

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \quad P = \sum_\alpha P_\alpha \quad (2.7)$$

で与えられる。

保存則 (2.4) は各状態 α に対して成り立つのに対し、Einstein 方程式は状態の和の形で入ってくることに注意しなければならない。もちろん、保

存則は状態の和の変数 ρ 、 P に対しても成り立ち、状態方程式パラメータは $w = P/\rho$ で与えられる。

通常よく用いられるスケール因子 a を導入すると、

$$a = e^{\hat{\phi}}, \quad \partial_\eta \hat{\phi} = \frac{\partial_\eta a}{a} = aH \quad (2.8)$$

と書ける。ここで、 H は Hubble 変数である。この変数を使って方程式を書き直すと、Einstein 方程式は

$$6M_{\text{P}}^2 (a^{-1} \partial_\eta H + 2H^2) = \rho - 3P + 4\Lambda = (1 - 3w)\rho + 4\Lambda, \quad (2.9)$$

$$3M_{\text{P}}^2 H^2 = \rho + \Lambda, \quad (2.10)$$

エネルギー保存則は

$$\partial_\eta \rho_\alpha = -3aH (\rho_\alpha + P_\alpha) = -3(1 + w_\alpha) aH \rho_\alpha \quad (2.11)$$

と書ける。

Friedmann 宇宙を指定する宇宙論パラメータの一つである Hubble 変数の現在の値を表す Hubble 定数はしばしば小文字の h を使って $H_0 = 100h$ [$\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$] と表す。自然単位系 ($c = \hbar = 1$) では

$$H_0 = \frac{h}{2997.9} = 0.00024\text{Mpc}^{-1}. \quad (2.12)$$

ここでは $h = 0.72$ の値を採用した。このとき、現在見えている宇宙の大きさを表すためによく使われる Hubble 距離 $1/H_0$ は 4164Mpc になる。

現在の密度パラメータは Hubble 定数を使って

$$\Omega_\alpha = \frac{\rho_{\alpha 0}}{3M_{\text{P}}^2 H_0^2} \quad (2.13)$$

と定義する。 $\rho_{\alpha 0}$ は状態 α の現在のエネルギー密度を表す。物質の状態 α として、冷たい暗黒物質 (cold dark matter, CDM) は c 、バリオンを b 、放射を r と書く。 c と b を合わせた質量をもつ物質全体をダストと呼び d と記述する。また、宇宙項は $w = -1$ の物質とみなすことができ、

$\Omega_\Lambda = \Lambda/3M_{\text{P}}^2H_0^2$ という量を定義する。この解説書では

$$\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu = 4.2 \times 10^{-5}/h^2 = 8.1 \times 10^{-5}, \quad (2.14)$$

$$\Omega_b = 0.042, \quad (2.15)$$

$$\Omega_d = \Omega_c + \Omega_b = 0.27, \quad (2.16)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.73 \quad (2.17)$$

の値を使うことにする。ここで、 Ω_r は光子からの寄与 Ω_γ と3世代のニュートリノからの寄与 Ω_ν を合計した値である。その比は $\rho_{\nu 0} = 2(\pi^2/30)T_\nu^4$ と $\rho_{\nu 0} = N_\nu 2(\pi^2/30)(7/8)T_\nu^4$ より

$$\frac{\Omega_\nu}{\Omega_\gamma} = \frac{\rho_{\nu 0}}{\rho_{\gamma 0}} = N_\nu \frac{7}{8} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^4 = 0.68 \quad (2.18)$$

で与えられる。最後の等式では、 $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$ と $N_\nu = 3$ (世代数) を使った。これより光子密度は $\Omega_\gamma = 4.8 \times 10^{-5}$ になる。

これらの量は Einstein 方程式 (2.10) から

$$\Omega_d + \Omega_\Lambda = 1 \quad (2.19)$$

をみることが分かる。ここで、 Ω_r は小さいので無視している。これは空間が平坦であることを示す関係式で、もし空間に曲率があれば右辺は1からずれるが、観測は1であることを示唆している。

状態 r 、 c 、 b の状態方程式パラメータはそれぞれ

$$w_r = \frac{1}{3}, \quad w_c = 0, \quad w_b = 0 \quad (2.20)$$

であることから、保存則 (2.11) を解くと

$$\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 = 3M_{\text{P}}^2 H_0^2 \Omega_r \left(\frac{a_0}{a} \right)^4, \quad (2.21)$$

$$\rho_c = \rho_{c0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 = 3M_{\text{P}}^2 H_0^2 \Omega_c \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (2.22)$$

$$\rho_b = \rho_{b0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 = 3M_{\text{P}}^2 H_0^2 \Omega_b \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (2.23)$$

を得る。 a_0 は現在のスケール因子でしばしば $a_0 = 1$ と規格化される。以下では断らない限り $a_0 = 1$ とする。これを Einstein 方程式 (2.10) に代入すると Hubble 変数は

$$H^2 = H_0^2 \left\{ \Omega_r \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_d \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda \right\} \quad (2.24)$$

と書ける。この式から分かるように宇宙項は現在に近い $a_0/a < 2$ くらいにならないとダイナミクスに寄与しない。

現在からどれくらい過去に遡ったかを表すのに使われる赤方偏移 (red shift) z はスケール因子を使って

$$z + 1 = \frac{a_0}{a} \quad (2.25)$$

で定義される。赤方偏移と距離 (comoving angular size distance)⁵ の関係は、(2.24) 式から $H = \partial_\eta a/a^2$ を使って $d\eta = \dots$ の式に書き換えて積分すると、

$$d = \eta_0 - \eta = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_r (z+1)^4 + \Omega_d (z+1)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (2.26)$$

で与えられる。具体的な数値は

$$\begin{aligned} z = 0.1 &\Leftrightarrow d = 408 \text{Mpc}, \\ z = 1 &\Leftrightarrow d = 3271 \text{Mpc}, \\ z = 5 &\Leftrightarrow d = 7822 \text{Mpc}, \\ z_{\text{dec}} = 1100 &\Leftrightarrow d_{\text{dec}} = 13808 \text{Mpc} (\simeq \text{宇宙の大きさ}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここで、 z_{dec} は宇宙が中性化する最終散乱面 (last scattering surface) の赤方偏移を表す。

距離と角度の関係は図 4 より $\theta \simeq \lambda_0/d$ で与えられる。ここで多重極 (multipole) l とゆらぎのサイズをあらわす共動波数 (comoving wave number) $k = \pi/\lambda_0$ の関係を与えておく。あとの節で述べるように、 C_l

⁵その他 proper motion distance、angular diameter distance、transverse comoving distance とも呼ばれる。

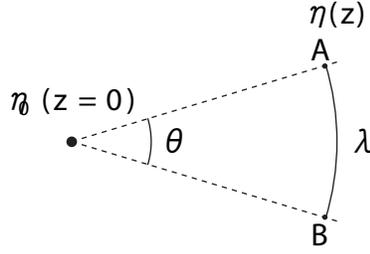


図 4: 赤方偏移と距離。

を定義する際に距離の変数 d_{dec} が入ってくることから、 l は $d = d_{\text{dec}}$ を使って評価され

$$l \simeq \frac{\pi}{\theta} = kd_{\text{dec}} \quad (2.28)$$

の関係が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} k = 0.0002\text{Mpc}^{-1} &\Leftrightarrow l \simeq 3 \\ k = 0.002\text{Mpc}^{-1} &\Leftrightarrow l \simeq 30 \\ k = 0.005\text{Mpc}^{-1} &\Leftrightarrow l \simeq 70 \\ k = 0.015\text{Mpc}^{-1} &\Leftrightarrow l \simeq 210 \\ k = 0.05\text{Mpc}^{-1} &\Leftrightarrow l \simeq 700 \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。物理的なゆらぎの波数は共動波数をスケール因子で割って $p = k/a$ で与えられる。いま $a_0 = 1$ としているので k の値は現在の物理的なゆらぎのサイズをあらわしている。 $l = 3$ に相当するゆらぎの波長は宇宙の大きさを表す Hubble 距離 ($1/H_0$) と同程度の $1/k \simeq 5000\text{Mpc}$ になる。 $l \simeq 30$ は $1/k \simeq 500\text{Mpc}$ のサイズをあらわす。 $l \simeq 700$ でも $1/k \simeq 20\text{Mpc}$ で超銀河団 (super cluster of galaxies) の $10 \sim 30\text{Mpc}$ のサイズである。

放射のエネルギー密度が宇宙膨張とともに a^{-4} で減少するのに対して質量をもった物質は a^{-3} で減少するため、宇宙は $\rho_r \gg \rho_d$ の放射優勢な時代から $\rho_r \ll \rho_d$ の物質優勢な時代に変わる時期がある。その時期を示す赤方偏移値は定義式 $\rho_r = \rho_d$ を解くと

$$z_{\text{eq}} + 1 = \frac{\Omega_d}{\Omega_r} = 3333 \quad (2.30)$$

になる。

最後にスケール因子の振る舞いについて見てみる。放射優勢時代では $\rho_d = 0$ と近似すると Einstein 方程式は簡単に解けて $a \propto \eta$ を得る。一方、物質優勢時代では $\rho_r = 0$ と近似できて $a \propto \eta^2$ になる。ここでは、主に共形時間を使うが、 $d\tau = ad\eta$ で定義される物理 (固有) 時間ではそれぞれ $a \propto \tau^{1/2}$ と $a \propto \tau^{2/3}$ になる。

3 ゲージ不変な摂動変数

摂動変数 重力場は共形モード ϕ とトレースレステンソルモード $h_{\mu\nu}$ に分けて

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu}, \quad \bar{g}_{\mu\nu} = (e^h)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \dots \quad (3.1)$$

と展開する。ここで、トレースレステンソルモードの足の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ で行い、 $h^\lambda{}_\lambda = 0$ を満たす。さらに、共形モードを

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) = \hat{\phi}(\eta) + \varphi(\eta, \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

のように背景場 $\hat{\phi}$ と摂動 φ に分解すと、重力場は線形近似では

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= e^{2\hat{\phi}}(1 + 2\varphi)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2 \left\{ -(1 + 2\varphi - h_{00})d\eta^2 + 2h_{0i}d\eta dx^i \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{ij} + 2\varphi\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

と展開される⁶。ここで、 $i, j = 1, 2, 3$ は空間座標の成分を表す。物質場のエネルギー密度と圧力の摂動はそれぞれ

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(\eta, \mathbf{x}) &= \rho_\alpha(\eta) + \delta\rho_\alpha(\eta, \mathbf{x}), \\ P_\alpha(\eta, \mathbf{x}) &= P_\alpha(\eta) + \delta P_\alpha(\eta, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

⁶宇宙論的摂動論でよく使われる記号は A, B_i, H_{ij} で、 $ds^2 = a^2 \{ -(1 + 2A)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + (\delta_{ij} + 2H_{ij}) dx^i dx^j \}$ で定義される。

のように定義する。以下では特に断らない限り ρ 、 P と書けば時間にものみ依存する部分を表すものとする。

物質は完全流体に空間方向の非等方ストレスを加えて記述する。そのストレステンソルは

$$T_{(\alpha)\nu}^{\mu} = \{\rho_{\alpha}(\eta, \mathbf{x}) + P_{\alpha}(\eta, \mathbf{x})\} u_{\alpha}^{\mu} u_{\nu}^{\alpha} + P_{\alpha}(\eta, \mathbf{x}) (\delta_{\nu}^{\mu} + \Pi^{\alpha\mu}_{\nu}) \quad (3.5)$$

で与えられる。ここで、 $\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}$ ($\Pi^{\alpha}_{0\nu} = 0$) は非等方ストレスで、完全流体からのずれを表している。 u_{α}^{μ} は粒子の4元速度で

$$g_{\mu\nu} u_{\alpha}^{\mu} u_{\alpha}^{\nu} = -1 \quad (3.6)$$

をみたく。摂動がない場合の4元速度は $u_{\alpha}^{\mu} = (1/a, 0, 0, 0)$ で与えられる。これより4元速度 u_{α}^{μ} と $u_{\mu}^{\alpha} = g_{\mu\nu} u_{\alpha}^{\nu}$ は(3.6)式を摂動の一次まで解くと

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^0 &= \frac{1}{a} \left(1 - \varphi + \frac{1}{2} h_{00} \right), & u_{\alpha}^i &= \frac{v_{\alpha}^i}{a}, \\ u_0^{\alpha} &= -a \left(1 + \varphi - \frac{1}{2} h_{00} \right), & u_i^{\alpha} &= a (v_i^{\alpha} + h_{0i}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。ここで、 v_{α}^i と $v_i^{\alpha} = \delta_{ij} v_{\alpha}^j$ は4元速度の空間成分で、(3.6)式から決まらない摂動変数である。

4元速度の式を代入して物質場のストレステンソルを一次の摂動まで求めると

$$\begin{aligned} T_{(\alpha)0}^0 &= -(\rho_{\alpha} + \delta\rho_{\alpha}), \\ T_{(\alpha)0}^i &= -(\rho_{\alpha} + P_{\alpha})v_{\alpha}^i, \\ T_{(\alpha)j}^0 &= (\rho_{\alpha} + P_{\alpha})(v_j^{\alpha} + h_{0j}), \\ T_{(\alpha)j}^i &= (P_{\alpha} + \delta P_{\alpha})\delta^i_j + P_{\alpha}\Pi^{\alpha i}_{j} \end{aligned} \quad (3.8)$$

を得る。左辺のように $T_{(\alpha)\nu}^{\mu}$ と書いたときは足の上げ下げは物理的計量 $g_{\mu\nu}$ で行うが、右辺に表れる摂動変数の空間の足は $v_i = \delta_{ij} v^j$ のように δ_{ij} で行う。二番目と三番目の式が非対称に見えるのはそのためで、 $T_i^0 = g^{0\lambda} T_{\lambda i} \neq g^{i\lambda} T_{\lambda 0} = T_0^i$ に由来する。速度の摂動変数は

$$v_i^{\alpha} = \partial_i v^{\alpha} + v_i^{\Gamma\alpha} \quad (3.9)$$

と分解され、 $v_i^{\text{T}\alpha}$ は横波 (transverse) の条件を満たす。 Π_{ij}^α は非等方性を表す空間ストレステンソルでトレースレスの条件 $\Pi^{\alpha i}_i = 0$ を満たす。

ゲージ変換 ゲージ変換である一般座標変換 (general coordinate transformation) $\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu \xi^\lambda$ のもとで重力場の摂動変数は線形近似の範囲内で

$$\delta_\xi \varphi = \xi^\lambda \partial_\lambda \hat{\phi} + \frac{1}{4} \partial_\lambda \xi^\lambda, \quad (3.10)$$

$$\delta_\xi h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda \quad (3.11)$$

のように変換する⁷。展開式では下付のゲージ変数は背景平坦時空の計量を用いて $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu$ と定義する。トレースレステンソルモードをさらに

$$h_{00} = h, \quad (3.12)$$

$$h_{0i} = h_i^{\text{T}} + \partial_i h', \quad (3.13)$$

$$h_{ij} = h_{ij}^{\text{TT}} + \partial_{(i} h_{j)}^{\text{T}'} + \frac{1}{3} \delta_{ij} h + \left(\frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) h'' \quad (3.14)$$

のように分解する。ここで、 h_i^{T} と $h_i^{\text{T}'}$ は横波のベクトル変数である。 h_{ij}^{TT} は横波トレースレスの条件を満たす。 $\partial^2 = \partial^i \partial_i$ は空間成分の共動座標ラプラシアンである。ゲージ変数 ξ^μ を ξ^0 と $\xi_i = \xi_i^{\text{T}} + \partial_i \xi^{\text{S}}$ に分解すると、一般座標変換は

$$\delta_\xi \varphi = \xi^0 \partial_\eta \hat{\phi} + \frac{1}{4} \partial_\eta \xi^0 + \frac{1}{4} \partial^2 \xi^{\text{S}}, \quad (3.15)$$

$$\delta_\xi h = -\frac{3}{2} \partial_\eta \xi^0 + \frac{1}{2} \partial^2 \xi^{\text{S}}, \quad (3.16)$$

$$\delta_\xi h' = -\xi^0 + \partial_\eta \xi^{\text{S}}, \quad (3.17)$$

$$\delta_\xi h'' = 2 \partial^2 \xi^{\text{S}}, \quad (3.18)$$

$$\delta_\xi h_i^{\text{T}} = \partial_\eta \xi_i^{\text{T}}, \quad (3.19)$$

$$\delta_\xi h_i^{\text{T}'} = 2 \xi_i^{\text{T}}, \quad (3.20)$$

$$\delta_\xi h_{ij}^{\text{TT}} = 0 \quad (3.21)$$

⁷摂動の高次でも φ の変換則は変わらない。一方、 $h_{\mu\nu}$ の変換には高次の項が現れて、 $\delta_\xi h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda + \xi^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda} (\partial_\nu \xi^\lambda - \partial^\lambda \xi_\nu) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda} (\partial_\mu \xi^\lambda - \partial^\lambda \xi_\mu) + o(h^2)$ となる。

のように分解することができる。

物質場のストレステンソルは一般座標変換のもとで $\delta_\xi T_{(\alpha)\nu}^\mu = \partial_\nu \xi^\lambda T_{(\alpha)\lambda}^\mu - \partial_\lambda \xi^\mu T_{(\alpha)\nu}^\lambda + \xi^\lambda \partial_\lambda T_{(\alpha)\nu}^\mu$ のように変換する。これより、物質場の摂動は各状態にたいして

$$\delta_\xi v^\alpha = -\partial_\eta \xi^S, \quad (3.22)$$

$$\delta_\xi v_i^{T\alpha} = -\partial_\eta \xi_i^T, \quad (3.23)$$

$$\delta_\xi(\delta\rho_\alpha) = \xi^0 \partial_\eta \rho_\alpha, \quad (3.24)$$

$$\delta_\xi(\delta P_\alpha) = \xi^0 \partial_\eta P_\alpha, \quad (3.25)$$

$$\delta_\xi \Pi^{\alpha i}_j = 0 \quad (3.26)$$

のように変換する。

ゲージ不変な摂動変数 線形近似の範囲内でゲージ不変な変数を導入する。スカラー変数として Bardeen ポテンシャルと呼ばれる二つの重力ポテンシャル

$$\Phi = \varphi + \frac{1}{6}h - \frac{1}{6}h'' + \sigma \partial_\eta \hat{\phi}, \quad (3.27)$$

$$\Psi = \varphi - \frac{1}{2}h + \sigma \partial_\eta \hat{\phi} + \partial_\eta \sigma \quad (3.28)$$

がある。ここで、

$$\sigma = h' - \frac{1}{2} \frac{\partial_\eta h''}{\partial^2}. \quad (3.29)$$

一般座標変換のもとで $\delta_\xi \sigma = -\xi^0$ と変換することから、Bardeen ポテンシャルがゲージ不変 ($\delta_\xi \Phi = \delta_\xi \Psi = 0$) であることが容易に示せる。

縦型ゲージ (longitudinal gauge) 又は共形ニュートンゲージ (conformal Newtonian gauge) と呼ばれる $h' = h'' = 0$ では、Bardeen ポテンシャルは $\Phi = \varphi + h/6$ と $\Psi = \varphi - h/2$ と書けるため計量の形が

$$ds^2 = a^2 \left[-(1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 + 2\Phi) dx^2 \right] \quad (3.30)$$

のように簡単になる。この式から、時間成分に現れる Ψ を Newton ポテンシャルとも言う。

重力場のゲージ不変なベクトルやテンソル摂動は

$$\Upsilon_i = h_i^{\text{T}} - \frac{1}{2}\partial_\eta h_i^{\text{T}'}, \quad (3.31)$$

$$h_{ij}^{\text{TT}} \quad (3.32)$$

と定義される。横波トレースレステンソル場はそれ自身でゲージ不変になる。

各物質状態 α に対してゲージ不変な良く使われる摂動変数は

$$V^\alpha = v^\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial_\eta h''}{\partial^2}, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} D^\alpha &= \frac{\delta\rho_\alpha}{\rho_\alpha} + \frac{\partial_\eta\rho_\alpha}{\rho_\alpha}\sigma - 3(1+w_\alpha)\partial_\eta\hat{\phi}V^\alpha \\ &= \frac{\delta\rho_\alpha}{\rho_\alpha} - 3(1+w_\alpha)\partial_\eta\hat{\phi}(\sigma + V^\alpha), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha &= \frac{\delta\rho_\alpha}{\rho_\alpha} + \frac{\partial_\eta\rho_\alpha}{\rho_\alpha}\sigma + 3(1+w_\alpha)\Phi \\ &= \frac{\delta\rho_\alpha}{\rho_\alpha} + 3(1+w_\alpha)(\Phi - \partial_\eta\hat{\phi}\sigma), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$V_i^\alpha = v_i^{\text{T}\alpha} + \frac{1}{2}\partial_\eta h_i^{\text{T}'}, \quad (3.36)$$

$$\Omega_i^\alpha = v_i^{\text{T}\alpha} + h_i^{\text{T}}, \quad (3.37)$$

$$\Pi_{ij}^\alpha \quad (3.38)$$

で与えられる。変数 (3.34) と (3.35) の中の $\partial_\eta\rho_\alpha$ の項は源泉のない保存の式 $\partial_\eta\rho_\alpha = -3(1+w_\alpha)\partial_\eta\hat{\phi}\rho_\alpha$ を使って書き換えられている。そのため源泉がある場合は最初の式で定義しなければならない。ここで導入したスカラー及びベクトル変数は独立ではなくそれぞれ $D^\alpha = \mathcal{D}^\alpha - 3(1+w_\alpha)(\Phi + \partial_\eta\hat{\phi}V^\alpha)$ 及び $\Upsilon_i + V_i^\alpha - \Omega_i^\alpha = 0$ を満たす。次の節で議論するが、 D^α はポアソン方程式の右辺に現れるエネルギー密度変数である。一方、 \mathcal{D}^α は CMB の温度ゆらぎスペクトルを考えるとときに有用な密度変数である⁸。

最後に状態の和を表す変数を定義する。 ρ と P はすでに (2.7) 式で定義

⁸光子の密度変数としばしば使われる変数 Θ の関係は共形 Newton ゲージで $D^\gamma/4 = \Theta + \Phi$ となる。

されている。摂動変数 D 、 \mathcal{D} 、 V は

$$\rho D = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} D^{\alpha}, \quad (3.39)$$

$$\rho \mathcal{D} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathcal{D}^{\alpha}, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} (1+w)\rho V &= (\rho+P)V = \sum_{\alpha} (\rho_{\alpha} + P_{\alpha})V^{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} (1+w_{\alpha})\rho_{\alpha}V^{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$P\Pi_{ij} = \sum_{\alpha} P_{\alpha}\Pi_{ij}^{\alpha} \quad (3.42)$$

で定義される。状態方程式パラメータは

$$w = \frac{P}{\rho} = \frac{\sum_{\alpha} P_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \rho_{\alpha}}, \quad (3.43)$$

で定義される。ここで、 $D \neq \sum_{\alpha} D^{\alpha}$ 、 $\mathcal{D} \neq \sum_{\alpha} \mathcal{D}^{\alpha}$ 、 $V \neq \sum_{\alpha} V^{\alpha}$ 、 $w \neq \sum_{\alpha} w_{\alpha}$ であることに注意しなければならない。これは、 D^{α} などの変数は ρ_{α} で割って定義しているため、和を取ることが出来る量はストレステンソルに現れる $\rho_{\alpha} D_{\alpha} \sim \delta\rho_{\alpha}$ の形でなければならないことによる。同様に速度変数は $(\rho_{\alpha} + P_{\alpha})V^{\alpha}$ の形でストレステンソルに現れるため V は上式のように定義される。

最後にエントロピーに関係する変数を導入する。圧力とエネルギー密度の摂動の間には熱力学的関係

$$\delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \delta \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{\rho} \delta S = c_s^2 \delta \rho + T \delta S \quad (3.44)$$

が成り立つ。宇宙は断熱膨張しているので断熱流体近似 ($\delta S = 0$) を考えると、 $\delta\rho$ と δP は比例関係になり、その係数が音速 (sound speed) の自乗 $c_s^2 = \partial P / \partial \rho$ で与えられる。この関係式と関連したゲージ不変量として各状態のエントロピーに比例する変数

$$\Gamma^{\alpha} = \frac{1}{P_{\alpha}} (\delta P_{\alpha} - c_{\alpha}^2 \delta \rho_{\alpha}) = \frac{\delta P_{\alpha}}{P_{\alpha}} - \frac{c_{\alpha}^2}{w_{\alpha}} \frac{\delta \rho_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \quad (3.45)$$

を導入する。

また、系全体のエントロピーを表す不変量 Γ を

$$P\Gamma = \delta P - c_s^2 \delta \rho \quad (3.46)$$

と定義する。ここで、 δP 及び $\delta \rho$ は単純に状態の和を取ったもので、音速は

$$c_s^2 = \frac{\partial_\eta P}{\partial_\eta \rho} = \frac{\sum_\alpha \partial_\eta P_\alpha}{\sum_\alpha \partial_\eta \rho_\alpha} \quad (3.47)$$

で定義される。ここで、 $c_s^2 \neq \sum_\alpha c_\alpha^2$ であることに注意。

4 ゆらぎ (摂動) の発展方程式

4.1 Einstein 方程式

共形モードを特別に扱う扱うために、作用の変分を

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \{ 2\bar{T}^\lambda_\lambda \delta\phi + \bar{T}^{\mu\nu} \delta\bar{g}_{\mu\nu} \} \\ &= \int d^4x \left\{ \mathbf{T}^\lambda_\lambda \delta\phi + \frac{1}{2} \mathbf{T}^\mu_\nu \delta h^\nu_\mu \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

と定義して、 $T_{\mu\nu}$ 、 $\bar{T}_{\mu\nu}$ 、 $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ の三種類のストレストンソルを導入する。これらは共形平坦な時空のまわりの摂動を考えるとときに便利である。二行目の等式は計量 $g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu}$ の変分をモードで分解した式

$$\delta g_{\mu\nu} = 2e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu} \delta\phi + e^{2\phi} \delta\bar{g}_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

を使っている。それぞれ、どの計量で縮約するのが注意しなければならない。最初の等式で定義されている通常のスートレストンソル $T_{\mu\nu}(g)$ は物理的計量 $g_{\mu\nu}$ で縮約を取る。二行目の $\bar{T}_{\mu\nu}(\phi, \bar{g})$ は共形モードを除いたバー付の計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ で、最後に導入した $\mathbf{T}_{\mu\nu}(\phi, h)$ は平坦なミンコースキー背景時空 $\eta_{\mu\nu}$ で縮約を取る。

通常のスเตรステンソルとバー付のスเตรステンソルの関係は共形モード依存性として現れて、

$$T^{\mu\nu} = e^{-6\hat{\phi}}\bar{T}^{\mu\nu} = e^{-6\hat{\phi}}(1-6\varphi)\bar{T}^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

$$T^\mu{}_\nu = e^{-4\hat{\phi}}\bar{T}^\mu{}_\nu = e^{-4\hat{\phi}}(1-4\varphi)\bar{T}^\mu{}_\nu \quad (4.4)$$

で与えられる。さらに、バー付と太字のスเตรステンソルの関係は、トレーススเตรステンソルモード $h^\mu{}_\nu$ の線形近似の範囲内では

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \eta_{\lambda(\mu}\bar{T}^{\lambda)}_{\nu)} \quad (4.5)$$

$$= \bar{T}_{\mu\nu} - h^\lambda{}_{(\mu}\hat{T}^{\lambda)}_{\nu)} \quad (4.6)$$

となる。ここで、 $\hat{T}_{\mu\nu}$ は背景時空のスเตรステンソルである。 $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ は対称化されていて、定義式より $\mathbf{T}^\lambda{}_\lambda (= \eta^{\mu\nu}\mathbf{T}_{\mu\nu}) = \bar{T}^\lambda{}_\lambda$ である。

Einstein 方程式は

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = \mathbf{T}_{\mu\nu}^{\text{EH}} + \mathbf{T}_{\mu\nu}^\Lambda + \mathbf{T}_{\mu\nu}^{\text{M}} = 0 \quad (4.7)$$

と書くことが出来る。物質場のスเตรステンソルはすべての状態の和 $\mathbf{T}_{\mu\nu}^{\text{M}} = \sum_\alpha \mathbf{T}_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ で与えられる。この式をゲージ変換すれば $\delta_\xi \mathbf{T}_{\mu\nu} = 0$ は自明であるから、すべての項を加えたスเตรステンソルはゲージ不変な変数で書くことができる。

Einstein 方程式に現れる物質場のスเตรステンソルはすべての状態を足し合わせたものである。スเตรステンソル (3.8) を太字のスเตรステンソルに書き換へ、状態についての和をとると

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{M}\lambda}{}_\lambda &= e^{4\hat{\phi}} \{-\rho + 3P - \delta\rho + 3\delta P + 4(-\rho + 3P)\varphi\}, \\ \mathbf{T}_{00}^{\text{M}} &= e^{4\hat{\phi}}(\rho + \delta\rho + 4\rho\varphi), \\ \mathbf{T}_{0i}^{\text{M}} &= -e^{4\hat{\phi}}(\rho + P) \left(v_i + \frac{1}{2}h_{0i} \right), \\ \mathbf{T}_{ij}^{\text{M}} &= e^{4\hat{\phi}} \{(P + \delta P + 4P\varphi)\delta_{ij} + P\Pi_{ij}\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

と表される。ここで $\delta\rho$ と δP は (2.7) 式と同様に状態の和を取ったものである。 v_i は (3.42) の中の V の定義式と同様に定義されている。

非等方空間ストレステンソルはトレースレスであることから

$$\Pi_{ij} = \left(-\frac{\partial_i \partial_j}{\partial^2} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \Pi^S + \partial_{(i} \Pi_{j)}^V + \Pi_{ij}^T \quad (4.9)$$

のように分解する。ここで、 Π_i^V は横波の条件を、 Π_{ij}^T は横波トレースレスの条件を満たす。各状態にたいする変数 Π_{ij}^α の分解も同様である。

Einstein 作用から導かれるストレステンソルは、トレースレステンソルモード $h_{\mu\nu}$ の一次のオーダーまで展開すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mu\nu}^{\text{EH}} = & M_{\text{P}}^2 e^{2\phi} \left\{ 2\partial_\mu \partial_\nu \phi - 2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \eta_{\mu\nu} \left(-2\Box\phi - \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi \right) \right. \\ & - \partial_{(\mu} \chi_{\nu)} + \frac{1}{2} \Box h_{\mu\nu} - 2h_{(\mu}^\lambda \partial_{\nu)} \partial_\lambda \phi + 2h_{(\mu}^\lambda \partial_{\nu)} \phi \partial_\lambda \phi \\ & - 2\partial_{(\mu} h_{\nu)}^\lambda \partial_\lambda \phi + \partial^\lambda h_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \\ & \left. + \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\lambda \chi^\lambda + 2h^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \partial_\sigma \phi + h^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \phi \partial_\sigma \phi + 2\chi^\lambda \partial_\lambda \phi \right) \right\} \quad (4.10) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\chi_\mu = \partial_\lambda h_{\mu}^\lambda$ 、 $\Box = \partial^\lambda \partial_\lambda = -\partial_\eta^2 + \partial^2$ である。共形モード ϕ についてはまだ摂動展開していない。この式のトレースを取ると

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{EH}\lambda}_\lambda = & M_{\text{P}}^2 e^{2\phi} \left\{ -6\Box\phi - 6\partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi + \partial_\lambda \chi^\lambda + 6h^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \partial_\sigma \phi \right. \\ & \left. + 6\chi^\lambda \partial_\lambda \phi + 6h^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \phi \partial_\sigma \phi \right\} \quad (4.11) \end{aligned}$$

を得る。

共形モード ϕ を背景共形場 $\hat{\phi}$ と摂動 φ に分解して φ の一次までさらに展開する。ここでは簡単のため四つのゲージ自由度を使って $h' = h'' = h_i^{\text{T}'} = 0$ のゲージを取って考える。このとき、Einstein 作用のストレステンソルの成分は

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{EH}\lambda}_\lambda = & M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left\{ 6\partial_\eta^2 \hat{\phi} + 6\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} + 12(\partial_\eta^2 \hat{\phi} + \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi}) \varphi \right. \\ & + 6\partial_\eta^2 \varphi - 6\partial^2 \varphi + 12\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \varphi + \partial_\eta^2 h + \frac{1}{3} \partial^2 h \\ & \left. + 6\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta h + 6(\partial_\eta^2 \hat{\phi} + \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi}) h \right\} \quad (4.12) \\ \mathbf{T}_{00}^{\text{EH}} = & M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left\{ -3\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} - 6\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \hat{\phi} \varphi - 6\partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta \varphi + 2\partial^2 \varphi \right. \end{aligned}$$

$$-3\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi}h - \partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta h + \frac{1}{3}\partial^2 h \} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{0i}^{\text{EH}} = & M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left\{ 2\partial_\eta\partial_i\varphi - 2\partial_\eta\hat{\phi}\partial_i\varphi + \frac{1}{3}\partial_\eta\partial_i h + \partial_\eta\hat{\phi}\partial_i h \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\partial^2 h_i^{\text{T}} + (\partial_\eta^2\hat{\phi} - \partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi})h_i^{\text{T}} \right\} \quad (4.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ij}^{\text{EH}} = & M_{\text{P}}^2 e^{2\hat{\phi}} \left\{ 2\partial_i\partial_j\varphi + \delta_{ij} \left[2\partial_\eta^2\hat{\phi} + \partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi} + 2\partial_\eta^2\varphi - 2\partial^2\varphi \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\varphi + (4\partial_\eta^2\hat{\phi} + 2\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi})\varphi \right] - \frac{1}{3}\partial_i\partial_j h \right. \\ & \left. + \delta_{ij} \left[\frac{1}{3}\partial_\eta^2 h + \frac{1}{3}\partial^2 h + \frac{5}{3}\partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta h + (2\partial_\eta^2\hat{\phi} + \partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta\hat{\phi})h \right] \right. \\ & \left. + \partial_\eta\partial_{(i}h_{j)}^{\text{T}} + 2\partial_\eta\hat{\phi}\partial_{(i}h_{j)}^{\text{T}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} + \frac{1}{2}\partial^2 h_{ij}^{\text{TT}} - \partial_\eta\hat{\phi}\partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} \right\} \quad (4.15) \end{aligned}$$

と展開される。ゲージ不変な方程式を求めるには変数を最後に $\varphi = (3\Phi + \Psi)/4$ や $h = 3(\Phi - \Psi)/2$ の関係を使ってゲージ不変な変数に置き換えればよい。

最後に宇宙項のストレステンソルは

$$\mathbf{T}_{\mu\nu}^\Lambda = -\Lambda e^{4\hat{\phi}}(1 + 4\varphi)\eta_{\mu\nu} \quad (4.16)$$

で与えられる。

線形スカラー方程式 スカラー変数が満たす方程式として

$$\begin{aligned} e^{-4\hat{\phi}}\mathbf{T}^\lambda{}_\lambda &= 0, \\ e^{-4\hat{\phi}}\left(\mathbf{T}^i{}_i - 3\frac{\partial^i\partial^j}{\partial^2}\mathbf{T}_{ij}\right) &= 0, \\ e^{-4\hat{\phi}}\left(\mathbf{T}_{00} + 3\partial_\eta\hat{\phi}\frac{\partial^i}{\partial^2}\mathbf{T}_{i0}\right) &= 0, \\ e^{-4\hat{\phi}}\frac{\partial^i}{\partial^2}\mathbf{T}_{i0} &= 0 \quad (4.17) \end{aligned}$$

の四つの型を考える。ここでは、上式の左辺の組み合わせがそのまま求めた方程式の左辺になるように規格化している。

最初のトレースの方程式は

$$\begin{aligned}
M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} \{ & 6\partial_{\eta}^2 \Phi + 18\partial_{\eta} \hat{\phi} \partial_{\eta} \Phi - 4\partial^2 \Phi - 6\partial_{\eta} \hat{\phi} \partial_{\eta} \Psi \\
& + (12\partial_{\eta}^2 \hat{\phi} + 12\partial_{\eta} \hat{\phi} \partial_{\eta} \hat{\phi} - 2\partial^2) \Psi \} \\
+ (3c_s^2 - 1)\rho \{ & D + 3(1+w)\partial_{\eta} \hat{\phi} V \} + 3w\rho\Gamma \\
+ (3w - 1)\rho(3\Phi + \Psi) - & 4\Lambda(3\Phi + \Psi) = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。ここで、物質項は (3.46) 式を用いて δP を $P\Gamma + c_s^2 \delta\rho$ と置き換えてから不変変数に書き換えている。二番目の式から Φ と Ψ の関係式

$$M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} (-2\partial^2) (\Phi + \Psi) + 2P\Pi^S = 0 \tag{4.19}$$

を得る。三番目の方程式から Poisson 方程式

$$M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} 2\partial^2 \Phi + \rho D = 0 \tag{4.20}$$

を得る。四番目の方程式は速度変数を含む式

$$M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} \{ 2\partial_{\eta} \Phi - 2\partial_{\eta} \hat{\phi} \Psi \} - (1+w)\rho V = 0 \tag{4.21}$$

となる。これらの式を求めるのに背景時空の Einstein 方程式 (2.5) と (2.6) を使っている。

ここで、 $\Pi^S = 0$ としてみる。実際、比較的大きいサイズのゆらぎに対しては完全流体の近似が成り立つので、非等方性ストレステンソルはゼロとしてしても観測と矛盾しない。この場合これらの方程式系は四つの変数に対して四つの式があるので解くことが出来る。ただここで注意しなければならないのは、解くことが出来る変数はあくまでもすべての状態の和を取った変数 Φ 、 Ψ 、 D 、 V だけである。ビッグバン直後のように一つの放射状態として近似できる場合は良いけれども、いろいろな物質状態が共存している場合は各状態に対して以下の 4.2 節で求める保存則をそれぞれ解かなければならない。

線形ベクトル方程式 ベクトル変数が満たす方程式として

$$e^{-4\hat{\phi}} \frac{\partial^j}{\partial^2} \mathbf{T}_{ij} = 0, \quad (4.22)$$

$$e^{-4\hat{\phi}} \mathbf{T}_{0i} = 0 \quad (4.23)$$

の二つの型を考える。それぞれの式からベクトル成分を取り出すと

$$M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\eta \Upsilon_i + \partial_\eta \hat{\phi} \Upsilon_i \right\} + \frac{1}{2} P \Pi_i^V = 0 \quad (4.24)$$

と Ω_i を含んだ式

$$\frac{1}{2} M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} \partial^2 \Upsilon_i - (1+w) \rho \Omega_i = 0. \quad (4.25)$$

を得る。これらの式を求める際にも背景時空の Einstein 方程式 (2.5) と (2.6) を使っている。スカラー方程式系と同様にこの方程式系も $\Pi_i^V = 0$ ならば (4.24) 式は容易に解くことができる。また、その解を (4.25) 式に代入すると Ω_i を求めることができる。

線形テンソル方程式 テンソル変数の方程式は $e^{-4\hat{\phi}} \mathbf{T}_{ij} = 0$ より

$$M_{\text{P}}^2 e^{-2\hat{\phi}} \left\{ -\frac{1}{2} \partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} - \partial_\eta \hat{\phi} \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} + \frac{1}{2} \partial^2 h_{ij}^{\text{TT}} \right\} + P \Pi_{ij}^T = 0 \quad (4.26)$$

で与えられる。この方程式も $\Pi_{ij}^T = 0$ ならば容易に解くことができる。

4.2 物質場の保存則

先に述べたように Einstein 方程式に現れる状態変数は各状態 α の和の形で現れるため、Einstein 方程式だけでは各状態の変化を求めることは出来ない。一方、物質場の保存則は源泉項がなければ各状態に対して

$$\nabla_\mu T_{(\alpha)\nu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} T_{(\alpha)\nu}^\mu \right) + \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\mu\lambda}) g^{\lambda\sigma} T_{(\alpha)\sigma}^\mu = 0 \quad (4.27)$$

が成り立つ。状態が一つではない場合は Einstein 方程式と保存則を組み合わせで解くことになる。

これまでと同様に、ここでも煩雑ではあるが物質の状態をはっきりと記すことにする。物質場のストレステンソルを代入すると容易にゲージ変数 \mathcal{D}^α 、 V^α 、 Ω_i^α の満たす式を求めることが出来る。保存則の各成分にたいして

$$-\frac{1}{\rho_\alpha} \nabla_\mu T_{(\alpha)0}^\mu = 0, \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{(1+w_\alpha)\rho_\alpha} \nabla_\mu T_{(\alpha)i}^\mu = 0 \quad (4.29)$$

のように規格化された式を考える。最初の 0 成分の式から

$$\begin{aligned} \partial_\eta \mathcal{D}^\alpha + 3(c_\alpha^2 - w_\alpha) \partial_\eta \hat{\phi} \mathcal{D}^\alpha \\ + (1+w_\alpha) \partial^2 V^\alpha + 3w_\alpha \partial_\eta \hat{\phi} \Gamma^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

を得る。 i 成分の式にさらに ∂^i / ∂^2 を作用させて横波成分を取り除き、スカラー成分を取り出すと

$$\begin{aligned} \partial_\eta V^\alpha + (1-3c_\alpha^2) \partial_\eta \hat{\phi} V^\alpha + \Psi - 3c_\alpha^2 \Phi \\ + \frac{c_\alpha^2}{1+w_\alpha} \mathcal{D}^\alpha + \frac{w_\alpha}{1+w_\alpha} \left[\Gamma^\alpha - \frac{2}{3} \Pi^{S\alpha} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

を得る。また、 i 成分の式から横波成分を抜き出すと、ベクトル変数が満たす方程式

$$\partial_\eta \Omega_i^\alpha + (1-3c_\alpha^2) \partial_\eta \hat{\phi} \Omega_i^\alpha + \frac{w_\alpha}{2(1+w_\alpha)} \partial^2 \Pi_i^{V\alpha} = 0 \quad (4.32)$$

を得る。これらの式を導くのに背景場の保存則 (2.4) と計算に役立つ状態方程式パラメータの微分の式

$$\partial_\eta w_\alpha = -3(1+w_\alpha) (c_\alpha^2 - w_\alpha) \partial_\eta \hat{\phi} \quad (4.33)$$

を使った。ここで注意すべきことは、式を変形する際に各状態の保存則は用いているが Einstein 方程式は使っていないので、式が各状態について成り立っていることである。

これらの式は指標 α を含んだ変数を状態の和を表す変数 \mathcal{D} 、 V 、 w 、 c_s^2 などに置き換えても成り立つ。それは方程式 $-\rho^{-1}\nabla_\mu T^{\text{M}\mu}_0 = 0$ と $(1+w)^{-1}\rho^{-1}\nabla_\mu T^{\text{M}\mu}_i = 0$ を考えればすぐに導ける。

最後に、ゲージ不変変数 D^α が満たすスカラー方程式を求める。二つの変数の間の関係式

$$D^\alpha = \mathcal{D}^\alpha + 3(1+w_\alpha)\left(\Phi + \partial_\eta \hat{\phi} V^\alpha\right) \quad (4.34)$$

を使うと、 V^α の微分を含んだ式 (4.31) は各状態について

$$\begin{aligned} \partial_\eta V^\alpha + \partial_\eta \hat{\phi} V^\alpha + \Psi + \frac{c_\alpha^2}{1+w_\alpha} D^\alpha \\ + \frac{w_\alpha}{1+w_\alpha} \left[\Gamma^\alpha - \frac{2}{3} \Pi^{\text{S}\alpha} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

と書き換えることが出来る。一方、 \mathcal{D}^α の微分を含んだ式 (4.30) は変形の途中で Einstein 方程式 (2.5)、(2.6) と (4.21) を使うので

$$\begin{aligned} \partial_\eta \mathcal{D}^\alpha - 3w_\alpha \partial_\eta \hat{\phi} \mathcal{D}^\alpha + (1+w_\alpha) \partial^2 V^\alpha + 2w_\alpha \partial_\eta \hat{\phi} \Gamma^\alpha \\ + \frac{3}{2M_{\text{P}}^2} (1+w_\alpha) (1+w) \rho a^2 (V - V^\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

のように、状態の和の変数 ρ 、 w と V が最後の項に現れる。そのため、以下では、計算の際は摂動変数 \mathcal{D}^α を使うことにする。

5 発展方程式のフーリエ変換

発展方程式は共動運動量空間で解かれる。いま 3 次元空間の曲率をゼロとしているので通常のフーリエ変換を考えればよい⁹。無次元のスカラー変数 Ψ 、 Φ 、 \mathcal{D} 、 \mathcal{D}^α 、 Γ 、 Π^{S} のフーリエ変換は

$$\Psi(\eta, \mathbf{x}) = \int [d^3\mathbf{k}] \Psi(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.1)$$

のように定義する。ここでは変換された変数を無次元にするために無次元化された測度

$$[d^3\mathbf{k}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \quad (5.2)$$

⁹空間曲率がある場合はその空間上の調和関数で展開する。

を使うことにする。ここで、 $k = |\mathbf{k}|$ である。次元を持ったスカラー変数 V に対しては

$$V(\eta, \mathbf{x}) = \int [d^3\mathbf{k}] \left(-\frac{1}{k}\right) V(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.3)$$

と定義して運動量変数 $V(\eta, \mathbf{k})$ を無次元化する。

無次元の横波ベクトル変数 V_i 、 Ω_i 、 Υ_i 及び横波トレースレステンソル変数 h_{ij}^{TT} のフーリエ変換は

$$V_i(\eta, \mathbf{x}) = \int [d^3\mathbf{k}] V_i(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (5.4)$$

$$h_{ij}^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{x}) = \int [d^3\mathbf{k}] h_{ij}^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.5)$$

で定義する。

以下の議論では、簡単のため宇宙項 Λ 及び非等方ストレステンソル Π_{ij} はゼロとする。実際、宇宙項は宇宙が中性化する以前ではその効果は無視できる。現在に近くなってからその効果が大きくなり、CMB のスペクトラムでは Integrated Sachs-Wolfe 効果として大角度成分のスペクトラムを持ち上げる効果があるがここでは議論しない。また、 Π_{ij} についてもゼロとして計算する。また、物質は断熱流体 ($\Gamma^\alpha = 0$) であるとする。

以下の議論では $\Lambda = \Pi_{ij}^\alpha = \Gamma^\alpha = 0$ の場合のみを考える。このとき運動量表示されたスカラー方程式は

$$\begin{aligned} k^2\Phi &= \frac{a^2}{2M_{\text{P}}^2} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} D^{\alpha} \\ &= \frac{a^2}{2M_{\text{P}}^2} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \left\{ D^{\alpha} + 3(1+w_{\alpha}) \left(\Psi + aH \frac{V^{\alpha}}{k} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\Phi = -\Psi, \quad (5.7)$$

$$\partial_{\eta} D^{\alpha} + 3(c_{\alpha}^2 - w_{\alpha}) aH D^{\alpha} = -(1+w_{\alpha}) kV^{\alpha}, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\eta} V^{\alpha} + (1-3c_{\alpha}^2) aH V^{\alpha} &= k \left(\Psi - 3c_{\alpha}^2 \Phi \right) \\ &\quad + \frac{c_{\alpha}^2}{1+w_{\alpha}} k D^{\alpha} \end{aligned} \quad (5.9)$$

のように簡単になる。ベクトル方程式は

$$\partial_{\eta} \Upsilon_i + 2aH \Upsilon_i = 0, \quad (5.10)$$

$$\partial_{\eta} \Omega_i^{\alpha} + (1-3c_{\alpha}^2) aH \Omega_i^{\alpha} = 0, \quad (5.11)$$

テンソル方程式は

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{\text{TT}} + 2aH\partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} + k^2 h_{ij}^{\text{TT}} = 0 \quad (5.12)$$

で与えられる。

6 断熱条件

初期宇宙は熱平衡状態にあり、閉じた系なので外部からの熱の出入りもない断熱状態にあったと考えられる。それは宇宙マイクロ波背景放射のスペクトルが黒体放射の Planck 分布を示すことから分かる。このことから以下では発展方程式を解くために必要な初期条件として断熱条件を課すことにする。

ここでは放射とダストからなる混合流体の断熱条件を求める。ダストは $P_d = \delta P_d = 0$ であることから系のエネルギー密度及び圧力は

$$\rho = \rho_r + \rho_d \quad \delta\rho = \delta\rho_r + \delta\rho_d, \quad (6.1)$$

$$P = P_r = \frac{1}{3}\rho_r, \quad \delta P = \delta P_r = \frac{1}{3}\delta\rho_r \quad (6.2)$$

で与えられる。これより音速は

$$c_s^2 = \frac{\partial_\eta P}{\partial_\eta \rho} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3\rho_d}{4\rho_r}} \quad (6.3)$$

となる。ここで、放射とダストの保存則を使って微分の式を書き換えている。

系のエントロピーは

$$\begin{aligned} T\delta S &= \delta P - c_s^2 \delta\rho \\ &= \frac{1}{3}\delta\rho_r - \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3\rho_d}{4\rho_r}} (\delta\rho_r + \delta\rho_d) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\rho_d}{1 + \frac{3\rho_d}{4\rho_r}} \left(\frac{3}{4} \frac{\delta\rho_r}{\rho_r} - \frac{\delta\rho_d}{\rho_d} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

と計算される。これより、混合流体の断熱条件 $\delta S = 0$ は

$$\frac{\delta \rho_r}{\rho_r} = \frac{4}{3} \frac{\delta \rho_d}{\rho_d} \quad (6.5)$$

で与えられる。ゲージ不変な変数で書くと $D^r = (4/3)D^d$ となる。また、断熱条件として速度変数が $V^r = V^d$ となることを考慮すると $D^r = (4/3)D^d$ である。

発展方程式の初期条件としての断熱条件は放射優勢の時代に設定する。そのため、CDM やバリオンに比べて放射のエネルギー密度が圧倒的に大きいので、ダストの成分である CDM とバリオンはそれぞれ独立に放射に対して断熱条件 (6.5) を課してよく、初期条件は

$$\frac{\delta \rho_r}{\rho_r} = \frac{4}{3} \frac{\delta \rho_c}{\rho_c} = \frac{4}{3} \frac{\delta \rho_b}{\rho_b} \left(= \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \quad (6.6)$$

で与えられる。最後の括弧内の等式は放射優勢であることを表している。また、後で述べるように、放射とバリオンは宇宙が中性化するまでは強く結合しているので、それまでは良い近似でこの断熱条件が保たれた一つの流体として振舞う。

7 ベクトル、テンソル方程式の解

最初にスカラー方程式より簡単なベクトル及びテンソル方程式を解く。はじめに物理的な固有時間をつかって方程式を解き、その後扱いやすい共形時間のままの方程式を解くことにする。

7.1 固有時間を用いた解

線形方程式は各共動運動量 k について解くことになる。そのため、各 k に対する実際のゆらぎのサイズを表す物理的運動量 $p = k/a$ は宇宙膨張とともに小さくなる。現在のスケール因子を $a_0 = 1$ と規格化すると、 k は現在のゆらぎのサイズを表すことになる。たとえば、現在のホライズ

ンサイズに相当するゆらぎ $k = 0.0002\text{Mpc}^{-1}$ は宇宙が中性化した時期は $1/a = 1 + z = 1100$ より 0.2Mpc^{-1} のサイズであったことになる。

はじめにベクトル方程式の性質について調べる。固有時間 τ の定義式 $d\tau = ad\eta$ を使って方程式を書き換えると、ベクトル方程式 (5.10) は

$$\dot{\Upsilon}_i + 2H\Upsilon_i = 0 \quad (7.1)$$

となる。ここで、ドットは τ による微分を表す。もし H が正の定数ならばこの式はベクトルゆらぎが時間とともに $e^{-2H\tau}$ で減衰することを表している。実際は、 H は時間とともに減少する正の関数なので、最終的には減衰は止まる。ただ、たとえ初期宇宙で大きなベクトルゆらぎが存在したとしても、すぐに減衰して現在では観測することが出来なくなる。変数 Ω_i^α も (5.11) 式から、放射優勢の時期は $c_\alpha^2 \simeq 1/3$ なので振幅はほとんど変化しないが、次第に $c_\alpha^2 < 1/3$ となって減衰し始める。そのため、通常は CMB 異方性スペクトルの解析ではベクトルゆらぎは考えない。

テンソル方程式は物理時間を使って書くと

$$\ddot{h}_{ij}^{\text{TT}} + 3H\dot{h}_{ij}^{\text{TT}} + \frac{k^2}{a^2}h_{ij}^{\text{TT}} = 0 \quad (7.2)$$

となる。最後の項に現れる k/a は物理的運動量で、時間とともにスケール因子が大きくなるにつれて小さくなる。つまりゆらぎの物理的サイズは宇宙膨張とともに大きくなる (赤方偏移する) ことを意味する。 k/a が十分大きい領域ではテンソルゆらぎは減衰する。一方、最後の項が無視できる領域では $\dot{h}_{ij}^{\text{TT}} = 0$ を満たす解が安定になり、テンソルゆらぎはある一定値を保つ。

減衰するかしないかの境目は Hubble 変数 H に比べて物理的運動量 k/a が大きいかわりに小さいかによる。それは、実空間でのゆらぎのサイズ a/k を考えると、宇宙初期ではホライズンサイズ $1/H$ より大きかったテンソルゆらぎが、宇宙膨張にともなってホライズンの中に入って来ると減衰することを意味している。すなわち、 a/k も $1/H$ も宇宙膨張にともなって増大するが、途中でホライズンサイズの方がゆらぎのサイズを追い抜いてしまう時期があり、それ以後にテンソルゆらぎの減衰が始まる。サイズが

ホライズンサイズより大きいことをスーパーホライズン (super-horizon)、小さいことをサブホライズン (sub-horizon) と呼ぶ。

現在、CMB 温度ゆらぎスペクトルとして観測している波長 ($1/k$) は 10 ~ 5000Mpc の大きさであり、Hubble 距離 $1/H_0 = 4164\text{Mpc}$ と同程度からそれより小さい領域にある。一方、これらのゆらぎは過去に遡ればすべて $a/k > 1/H$ であることから、一番大きいサイズのゆらぎは宇宙初期からホライズンの内側に入ることなし現在まで伝播していることになる。すなわち、宇宙初期にテンソルゆらぎが存在すれば、それは CMB スペクトルの大角度成分に減衰することなく残っていることを示している。逆に小角度成分ではテンソルゆらぎはホライズンの内側に入った段階で減衰し始め、現在ではほとんど観測できないほど小さくなっている。

7.2 共形時間を用いた解

同じ方程式を共形時間のままで解くことにする。その際、時間変数として

$$x = k\eta \quad (0 < x < \infty) \quad (7.3)$$

を導入すると便利である。この変数を使ってゆらぎのサイズがスーパーホライズンになる点を表すと、放射優勢 (物質優勢) の時代では $a \propto \eta$ (η^2) より $aH = \partial_\eta a/a = 1/\eta$ ($2/\eta$) となるので

$$\frac{a}{k} > \frac{1}{H} \implies x < 1 \quad (x < 2) \quad (7.4)$$

となる。すなわち、 x が 1 (2) より小さければスーパーホライズンゆらぎで、時間が経って 1 (2) より小さくなればゆらぎのサイズがホライズンの内側に入ってサブホライズンゆらぎになったことを表す。1 か 2 の違いはそれが放射優勢の時代に入ったか物質優勢の時代に入ったかの違いである。

ここで注意しなければならないのは時間変数 x は非常に大きいサイズのゆらぎに対しては現在でも $x \ll 1$ の値をとる場合があるということである。そのようなゆらぎは生成されたときから現在までずっとスーパー

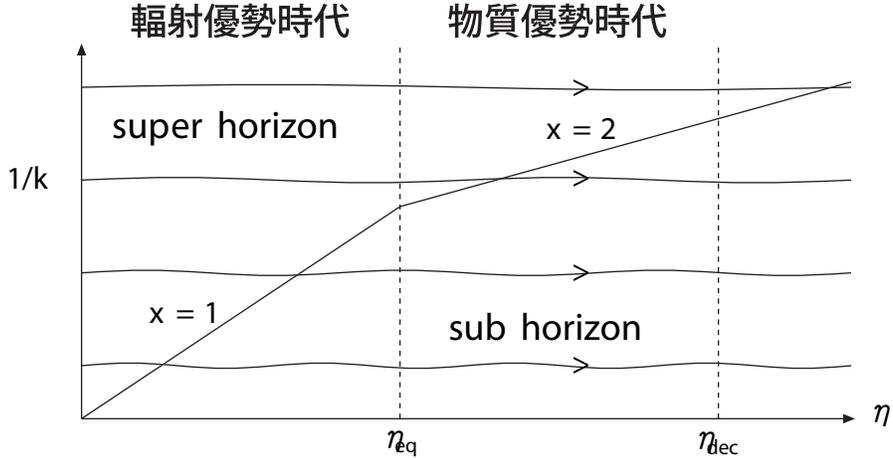


図 5: 典型的なゆらぎサイズ $1/k$ とホライズン内に入る時期。斜めの実線はホライズンの位置 ($k = aH$) を表す。

ホライズンサイズであったことになる。CMB スペクトルでは低多重極の $l = 2, 3$ がそのようなゆらぎに相当する。

図 5 に典型的なゆらぎのサイズ $1/k$ とホライズン内に入る時期を示した。上から $k = 0.002\text{Mpc}^{-1}$ ($l \simeq 30$)、 $k = 0.005\text{Mpc}^{-1}$ ($l \simeq 70$)、 $k = 0.015\text{Mpc}^{-1}$ ($l \simeq 210$)、 $k = 0.05\text{Mpc}^{-1}$ ($l \simeq 700$) に相当する。ここで $l \simeq \pi/\theta = kd_{\text{dec}}$ で与えられる。現在 CMB 温度ゆらぎとして観測された大角度のゆらぎ ($l \simeq 30$) は宇宙が中性化したあとでサブホライズンサイズのゆらぎになったことが分かる。これに対して最初の音波ピーク付近の $l \simeq 210$ のゆらぎは放射優勢の時代にサブホライズンサイズになったことが分かる。

共形時間のベクトル方程式は $aH = \partial_\eta a/a$ を用いると

$$\partial_\eta \Upsilon_i + 2aH\Upsilon_i = \partial_\eta(a^2\Upsilon_i) = 0, \quad (7.5)$$

$$\partial_\eta \Omega_i^\alpha + (1 - 3c_\alpha^2)aH\Omega_i^\alpha \simeq \partial_\eta(a^{1-3c_\alpha^2}\Omega_i^\alpha) = 0 \quad (7.6)$$

とかける。ここで簡単のため音速 c_α は定数とした。これより

$$\Upsilon_i \propto a^{-2}, \quad \Omega_i^\alpha \propto a^{3c_\alpha^2-1} \quad (7.7)$$

のように Υ_i は宇宙の膨張とともにすばやく減衰し、 Ω_i^α も $c_\alpha^2 < 1/3$ になると減衰する。

テンソル方程式は変数 x を使って書き換え、放射優勢 ($q = 1$) と物質優勢 ($q = 2$) の時期ではそれぞれ $aH = q/x$ であることを用いると

$$\partial_x^2 h_{ij}^{\text{TT}} + 2\frac{q}{x}\partial_x h_{ij}^{\text{TT}} + h_{ij}^{\text{TT}} = 0 \quad (7.8)$$

を得る。この方程式の解はベッセル関数を使うと $h_{ij}^{\text{TT}} = e_{ij}x^{1/2-q}J_{1/2-q}(x)$ で与えられる。ここで、 e_{ij} は横波トレースレス分極テンソルである。これよりテンソルゆらぎは

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \begin{cases} \text{const.} & \text{for } x \ll 1 \text{ (super-horizon)} \\ \frac{1}{a} & \text{for } x > 1 \text{ (sub-horizon)} \end{cases} \quad (7.9)$$

のように変化する。すなわち、ゆらぎのサイズがホライズンの内側に入ると減衰する解が得られた。

8 スカラー方程式の簡単な解 - バリオンなし -

この節では方程式の性質を理解するために簡単に解けるような状態を考えることにする。物質は放射と冷たい暗黒物質 (CDM) だけで、非等方ストレステンソル及び宇宙項はゼロとする。また、時間変数として前の節で導入した $x = k\eta$ を使う。

8.1 放射優勢時代

はじめに、放射優勢時代に CDM と放射が存在する系を考える。放射優勢であることから

$$\rho_r \gg \rho_c \quad (8.1)$$

である。そのため Friedmann 方程式は $3M_{\text{P}}^2 H^2 = \rho \simeq \rho_r$ と近似できる。Poisson 方程式 (5.6) も同様に右辺の和の中から ρ_c を無視すると、

$$-\Psi \simeq \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} \left\{ \mathcal{D}^r + 4 \left(\Psi + \frac{1}{x} V^r \right) \right\} \quad (8.2)$$

を得る。ここで、式 (5.7) を使った。また、放射優勢の時代は $a \propto \eta$ であることから $aH = \partial_\eta a/a = 1/\eta$ 及び $a^2 \rho_r/2M_{\text{P}}^2 = (3/2)(aH)^2 = 3/2\eta^2$ を使って変形した。

放射に対する保存則は $w_r = c_r^2 = 1/3$ より

$$\partial_x \mathcal{D}^r + \frac{4}{3} V^r = 0, \quad (8.3)$$

$$\partial_x V^r = 2\Psi + \frac{1}{4} \mathcal{D}^r \quad (8.4)$$

となる。CDM の保存則は $w_c = c_c^2 = 0$ より

$$\partial_x \mathcal{D}^c + V^c = 0, \quad (8.5)$$

$$\partial_x V^c + \frac{1}{x} V^c = \Psi \quad (8.6)$$

で与えられる。

微分方程式 (8.2)、(8.3)、(8.4) を組み合わせると

$$(x^2 + 6)\partial_x^2 \mathcal{D}^r + \frac{12}{x} \partial_x \mathcal{D}^r + \frac{1}{3}(x^2 - 6)\mathcal{D}^r = 0 \quad (8.7)$$

を得る。この微分方程式の一般解は

$$\mathcal{D}^r = A \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{x} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \right\} + B \left\{ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{x} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \right\} \quad (8.8)$$

で与えられる。初期条件として $x \rightarrow 0$ で正則性を課すと $B = 0$ となり、

$$\mathcal{D}^r = A \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{x} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \right\}, \quad (8.9)$$

$$V^r = -\frac{3}{4} \partial_x \mathcal{D}^r = A \frac{3}{4} \left\{ \frac{x^2 - 6}{\sqrt{3}x^2} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{x} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \right\}, \quad (8.10)$$

$$\Psi = -\frac{1}{12 + 2x^2} \left(3\mathcal{D}^r + \frac{12}{x} V^r \right) \quad (8.11)$$

を得る。

スーパーホライズン極限 ($x \ll 1$) での解の振る舞いを見てみると

$$\Psi = \Psi_i - \frac{1}{30} \Psi_i x^2 + \dots, \quad (8.12)$$

$$\mathcal{D}^r = -6\Psi_i - \frac{1}{3} \Psi_i x^2 + \dots, \quad (8.13)$$

$$V^r = \frac{1}{2} \Psi_i x + \dots \quad (8.14)$$

となる。ここで、Bardeen ポテンシャルの初期値 $\Psi_i = A/6$ は波数 k だけの関数である。スーパーホライズン領域では x^2 項は無視できるので Ψ と D^r はほとんど変化しないことがわかる。ただし、ポアソン方程式の右辺に現れるエネルギー密度ゆらぎ D^r は

$$D^r = -\frac{2}{3}\Psi_i x^2 \quad (8.15)$$

となり、初期値はほとんどゼロになる。平坦性問題を解くために初期のゆらぎが非常に小さくなくてはならないというのは、エネルギー密度ゆらぎではこの D 変数が小さいことを指す。

CDM の速度ゆらぎ V^c は Ψ の解を微分方程式 (8.6) に代入するとで求めることが出来る。エネルギー密度ゆらぎ D^c は V^c の解を (8.5) 式に代入することで求めることが出来る。その際、初期条件として断熱条件

$$\begin{aligned} D^c(x=0) &= \frac{3}{4}D^r(x=0), \\ V^c(x=0) &= V^r(x=0) \end{aligned} \quad (8.16)$$

を課す。 $\Psi = \Psi_i + \dots$ を CDM の微分方程式に代入して、断熱条件のもとで解くと

$$D^c = -\frac{9}{8}\Psi_i - \frac{1}{4}\Psi_i x^2 + \dots, \quad (8.17)$$

$$V^c = \frac{1}{2}\Psi_i x + \dots. \quad (8.18)$$

を得る。 D^c もスーパーホライズン領域では変化しないことが分かる。

ゆらぎがホライズンの内側に入ってくるサブホライズン領域 ($x \gg 1$) では D^r と V^r は振動を始める。Bardeen ポテンシャルの解は

$$\Psi = -\frac{3}{2x^2}D^r \quad (8.19)$$

のように $1/x^2$ で減衰する。そこで、 $\Psi \simeq 0$ として CDM のゆらぎを解くと

$$D^c \propto \log x, \quad (8.20)$$

$$V^c \propto -\frac{1}{x} \quad (8.21)$$

を得る。したがって、 D^c の成長はサブホライズン領域でもゆっくりである (Mezardos 効果)。

8.2 物質優勢時代

物質優勢の時代は $\rho_r \ll \rho_c$ なので、Friedmann 方程式は $3M_{\text{P}}^2 H^2 = \rho_c$ で近似できる。スケール因子 $a \propto \eta^2$ より $aH = 2/\eta$ となるので、Poisson 方程式 (5.6) は $-k^2 \Psi = (a^2/2M_{\text{P}}^2)\rho_c D^c = (6/\eta^2)D^c$ と書けて、Bardeen ポテンシャルが CDM のゆらぎから決まる。CDM の状態を表すパラメータ $w_c = c_c^2 = 0$ を代入すると、CDM ゆらぎが満たす微分方程式は

$$-(x^2 + 18)\Psi = 6\mathcal{D}^c + \frac{36}{x}V^c, \quad (8.22)$$

$$\partial_x \mathcal{D}^c + V^c = 0, \quad (8.23)$$

$$\partial_x V^c + \frac{2}{x}V^c = \Psi \quad (8.24)$$

で与えられる。これらを組み合わせると

$$(x^2 + 18)\partial_x^2 V^c + \left(4x + \frac{72}{x}\right)\partial_x V^c - \left(4 + \frac{72}{x^2}\right)V^c = 0 \quad (8.25)$$

を得る。この微分方程式の一般解は

$$V^c = V_0 x + \frac{V_1}{x} \quad (8.26)$$

で与えられ、初期条件として $x \rightarrow 0$ で有限であることを要求すると $V_1 = 0$ となる。この解を上記の微分方程式に代入するとその他のゆらぎも計算できて、

$$\Psi = \Psi_i, \quad (8.27)$$

$$\mathcal{D}^c = -5\Psi_i - \frac{1}{6}\Psi_i x^2, \quad (8.28)$$

$$V^c = \frac{1}{3}\Psi_i x, \quad (8.29)$$

という解を得る。ここで、 $\Psi_i = 3V_0$ である。

放射ゆらぎが満たす微分方程式は、状態変数 $w_r = c_r^2 = 1/3$ を代入すると、

$$\partial_x \mathcal{D}^r + \frac{4}{3}V^r = 0, \quad (8.30)$$

$$\partial_x V^r = 2\Psi + \frac{1}{4}\mathcal{D}^r \quad (8.31)$$

で与えられる。これらを組み合わせると

$$\partial_x^2 V^r + \frac{1}{3} V^r = 2\partial_x \Psi \quad (8.32)$$

を得る。Bardeen ポテンシャルは定数なので右辺はゼロになり、この式は容易に解くことが出来る。また、その解を \mathcal{D}^r の式に代入することで一般解

$$V^r = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + B \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right), \quad (8.33)$$

$$\mathcal{D}^r = \frac{4A}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{4B}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - 8\Psi_i \quad (8.34)$$

を得る。係数 A と B を断熱条件で決める。 $x \rightarrow 0$ で $V^r = V^c$ 及び $\mathcal{D}^r = (4/3)\mathcal{D}^c$ が成り立つとすると、 $B = 0$ 及び $A = \Psi_i/\sqrt{3}$ と決まる。したがって、解は

$$\mathcal{D}^r = -8\Psi_i + \frac{4}{3}\Psi_i \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right), \quad (8.35)$$

$$V^r = \frac{\Psi_i}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \quad (8.36)$$

となる。スーパーホライズンゆらぎ ($x \simeq 0$) では $\mathcal{D}^r \simeq (-20/3)\Psi_i$ となる。

物質優勢の時代では Bardeen ポテンシャルはまったく変化しないことが分かる。放射優勢の時代でもスーパーホライズンサイズのゆらぎに対しては Bardeen ポテンシャルは変化しないことはすでに述べた。あとで示すように、大きいサイズの CMB 温度ゆらぎの振幅は脱結合時の Bardeen ポテンシャルの大きさで決まる Sachs-Wolfe 関係 (11.15) があるので、現在のゆらぎの大きさ $\Delta T/T \simeq 10^{-5}$ は宇宙初期のビックバン当時の Bardeen ポテンシャルの振幅の大きさをそのまま伝えていると考えることができる。

エネルギー密度ゆらぎはホライズンの内側に入ると大きく変化する。スーパーホライズン領域 ($x \ll 2$) では \mathcal{D}^c と \mathcal{D}^r は定数であるが、ホライズンの内側 ($x \gg 2$) にはいると CDM ゆらぎ \mathcal{D}^c は x^2 で急速に大きくなる。放射ゆらぎ \mathcal{D}^r は振動を始める。

CDM の速度ゆらぎ V^c は x の一次で単調に成長する。これに対して、放射の速度ゆらぎ V^r はスーパーホライズンでは x の一次で成長するが、サブホライズン領域に入ると \mathcal{D}^r と同様に振動し始める。

ここで注意しなければならないのは、いま物質優勢の条件で解いているので $x \rightarrow 0$ としても放射優勢の時代にはつながらない。初期条件をスーパーホライズン領域 ($x \simeq 0$) で与えたので、このゆらぎは物質優勢の時代に入ってもまだホライズンの内側に入っていないことを仮定したことになる。すなわち、多重極で $l < 200$ くらいの比較的大きなサイズのゆらぎを考えたことになる。また、物質優勢の時代に入ってもずっとスーパーホライズン領域にあるような十分に大きなサイズのゆらぎでも、 Ψ は変化しないが、 \mathcal{D}^r は時代の変わり目 ($\eta = \eta_{\text{eq}}$) で $\mathcal{D}^r = -6\Psi_i$ から $\mathcal{D}^r = (-20/3)\Psi_i$ へ変化して振幅が少し大きくなるのが分かる。

最後に第1音波ピーク (first acoustic peak) の位置について簡単に述べておく。この領域の CMB 温度ゆらぎスペクトルは宇宙が中性化した時のゆらぎの値からほとんど決まってしまう。第11節でもとめる Sachs-Wolfe 関係 (11.12) を使うと CMB 温度ゆらぎは

$$\frac{\Delta T}{T}(\eta_0) \simeq \frac{1}{4}\mathcal{D}^r(\eta_{\text{dec}}) + 2\Psi(\eta_{\text{dec}}) = \frac{1}{3}\Psi_i \cos(c_s x_{\text{dec}}) \quad (8.37)$$

で与えられる。ここで、(8.27) と (8.35) を使った。また $c_s = c_r = 1/\sqrt{3}$ は音速である。この式から極値は $c_s x_{\text{dec}} = c_s k \eta_{\text{dec}} = 0, \pi, 2\pi, \dots$ で与えられる。ゼロを除くと最初の極値は $k_{1\text{peak}} = \pi/r_s$ で与えられる。ここで $r_s = c_s \eta_{\text{dec}}$ は脱結合時での音波の地平線と呼ばれる。(2.28) 式を使って多重極の位置を求めると

$$l_{1\text{peak}} \simeq k_{1\text{peak}} d_{\text{dec}} = \frac{\pi(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})}{c_s \eta_{\text{dec}}} = \frac{\pi}{c_s} \left(\sqrt{z_{\text{dec}} + 1} - 1 \right). \quad (8.38)$$

音速の値と $z_{\text{dec}} = 1100$ を代入すると $l \simeq 174$ を得る。この値は観測値よりも小さいがそれは音速にバリオンの効果が入っていないためである。以下の節で述べるようにバリオンと放射からなる流体では音速は $c_s < 1/\sqrt{3}$ となり、ピークの位置が l の大きいほうに移動する。

9 スカラー方程式の解 - バリオンを含む -

宇宙が中性化する前のバリオンを含む状態を考える。中性化以前では電子とバリオンは強く相互作用しているので一体とみなせる。そのため、ここでバリオンと呼ぶものは電子とバリオンが一体になったものを表す。

バリオンと光子の相互作用はトムソン散乱によるもので、その散乱断面積は $\sigma_T = (8\pi/3)\alpha^2/m_e^2$ ($\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$) で与えられる。トムソン散乱の効果を入れた方程式を求めるためには相互作用がある場合の Boltzmann 方程式を扱う必要がある。ここでは導出の議論はせずに天下りの的に式を書き下して、その性質をみることにする。

バリオンの状態方程式パラメータ及び音速は $w_b, c_b^2 \ll 1$ である¹⁰。ここでは簡単のためそれらをゼロとする。また、放射の成分として光とニュートリノは分けて考えて

$$\begin{aligned} w_\gamma = w_\nu = c_\gamma^2 = c_\nu^2 &= 1/3, \\ w_c = w_b = c_c^2 = c_b^2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

とする。すなわち $P_\gamma = \rho_\gamma/3$ 、 $P_\nu = \rho_\nu/3$ 、 $P_c = P_b = 0$ とする。このとき Poisson 方程式は

$$\begin{aligned} -2M_{\text{P}}^2 \frac{k^2}{a^2} \Psi &= \rho_c \left\{ \mathcal{D}^c + 3 \left(\Psi + aH \frac{V^c}{k} \right) \right\} + \rho_\nu \left\{ \mathcal{D}^\nu + 4 \left(\Psi + aH \frac{V^\nu}{k} \right) \right\} \\ &+ \rho_\gamma \left\{ \mathcal{D}^\gamma + 4 \left(\Psi + aH \frac{V^\gamma}{k} \right) \right\} + \rho_b \left\{ \mathcal{D}^b + 3 \left(\Psi + aH \frac{V^b}{k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9.2)$$

となる。物質の保存則をあらわす方程式は、バリオンは光子と相互作用をするがニュートリノとはしないことを考慮に入れて、

$$\partial_\eta \mathcal{D}^c = -kV^c, \quad (9.3)$$

$$\partial_\eta V^c + aHV^c = k\Psi, \quad (9.4)$$

¹⁰詳しくは $\rho_b = nm$ 、 $P_b = nT_b$ で与えられる。ここで、 $m \simeq 1\text{GeV}$ はバリオンの平均的な質量、 n ($\propto 1/a^3$) 及び T_b ($\propto 1/a$) は数密度及び温度である。これより $w_b = P_b/\rho_b = T_b/m$ と $c_b^2 = \partial_\eta P_b/\partial_\eta \rho_b = 4T_b/3m$ を得る。いま考えている放射優勢から物質優勢に変わる z_{eq} 付近から中性化する z_{dec} までの時期は十分に非相対論的な $T_b \ll m$ で与えられるので $w_b = c_b^2 = 0$ と近似できる。

$$\partial_\eta \mathcal{D}^\nu = -\frac{4}{3}kV^\nu, \quad (9.5)$$

$$\partial_\eta V^\nu = 2k\Psi + \frac{1}{4}k\mathcal{D}^\nu, \quad (9.6)$$

$$\partial_\eta \mathcal{D}^\gamma = -\frac{4}{3}kV^\gamma, \quad (9.7)$$

$$\partial_\eta V^\gamma = 2k\Psi + \frac{1}{4}k\mathcal{D}^\gamma - \frac{1}{\eta_T} (V^\gamma - V^b), \quad (9.8)$$

$$\partial_\eta \mathcal{D}^b = -kV^b, \quad (9.9)$$

$$\partial_\eta V^b + aHV^b = k\Psi + \frac{1}{\eta_T} \frac{4}{3} \frac{\rho_\gamma}{\rho_b} (V^\gamma - V^b) \quad (9.10)$$

で与えられる。ここで、トムソン散乱の強さを表す変数として

$$\eta_T = \frac{1}{a\sigma_T n_e} \sim \begin{cases} \frac{10}{\Omega_b h} \frac{1}{(1+z_{\text{eq}})^{1/2}} \frac{1}{1+z} \eta & (z > z_{\text{eq}}) \\ \frac{10}{\Omega_b h} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \eta & (z_{\text{eq}} > z > z_{\text{dec}}) \end{cases} \quad (9.11)$$

を導入した。 $n_e \simeq \rho_b/m$ ($m \simeq 1\text{GeV}$) は電子の数密度である。 $\Omega_b \simeq 0.04$ 、Hubbleパラメータ $h = 0.72$ 、赤方偏移の値 $z_{\text{eq}} = 3333$ と $z_{\text{dec}} = 1100$ を代入すると $\eta_T \ll \eta$ であることが分かる。これは光とバリオンが強く結合していることを表している。方程式から $\eta_T \rightarrow 0$ の極限は断熱条件 $V^r = V^b$ を意味することがわかる。

これらの方程式をとくための断熱初期条件は放射優勢の時期に

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^c(0) = \mathcal{D}^b(0) &= \frac{3}{4}\mathcal{D}^\gamma(0) = \frac{3}{4}\mathcal{D}^\nu(0), \\ V^c(0) = V^b(0) &= V^\gamma(0) = V^\nu(0) \end{aligned} \quad (9.12)$$

と設定される。

放射とバリオンが強く結びついているときは一つの流体として記述することができる。そのため、宇宙が中性化するまでバリオンと放射の間の断熱条件

$$\mathcal{D}^b(x) \simeq \frac{3}{4}\mathcal{D}^\gamma(x) \quad (9.13)$$

が良い近似で成り立つ。宇宙が中性化して結合が外れるとこの条件は成り立たなくなる。実際、保存則 (9.7) と (9.9) を組み合わせると $\partial_\eta(\mathcal{D}^b - 3\mathcal{D}^\gamma/4) = -k(V^b - V^\gamma)$ が導けるので放射とバリオンが強く結合している

極限では $V^b = V^r$ であることからこの式は初期の断熱条件が良い近似で維持されることを意味している。

一つの流体であることを強調するために新しい変数を導入する。二つの状態の和を表す変数として

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_b, \quad P = P_\gamma + P_b = \frac{1}{3}\rho_\gamma \quad (9.14)$$

を導入すると、この流体の状態方程式パラメータ及び音速は

$$w = \frac{P}{\rho} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{\rho_b}{\rho_\gamma}}, \quad (9.15)$$

$$c_s^2 = \frac{\partial_\eta P}{\partial_\eta \rho} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma}} \quad (9.16)$$

になる。また、このプラズマ流体の摂動変数は

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\rho} (\rho_\gamma \mathcal{D}^\gamma + \rho_b \mathcal{D}^b), \quad (9.17)$$

$$V = \frac{1}{\rho + P} \{(\rho_\gamma + P_\gamma) V^\gamma + \rho_b V^b\} \quad (9.18)$$

で与えられる。この状態を $\alpha = b\gamma$ と表すことにする。

これらの変数に対する Poisson 方程式は (5.6) 式に三つの状態 $\alpha = c, \nu, b\gamma$ を代入すると

$$\begin{aligned} -2M_P^2 \frac{k^2}{a^2} \Psi &= \rho_c \left\{ \mathcal{D}^c + 3 \left(\Psi + aH \frac{V^c}{k} \right) \right\} + \rho_\nu \left\{ \mathcal{D}^\nu + 4 \left(\Psi + aH \frac{V^\nu}{k} \right) \right\} \\ &+ \rho \left\{ \mathcal{D} + 3(1+w) \left(\Psi + aH \frac{V}{k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (9.19)$$

となる。この式は (9.2) 式とまったく同じである。保存則は、(5.7)、(5.8)、(5.9) 式から

$$\partial_\eta \mathcal{D} + 3(c_s^2 - w) aH \mathcal{D} = -(1+w)kV, \quad (9.20)$$

$$\partial_\eta V + (1 - 3c_s^2) aHV = k(1 + 3c_s^2) \Psi + \frac{c_s^2}{1+w} k \mathcal{D} \quad (9.21)$$

で与えられる。

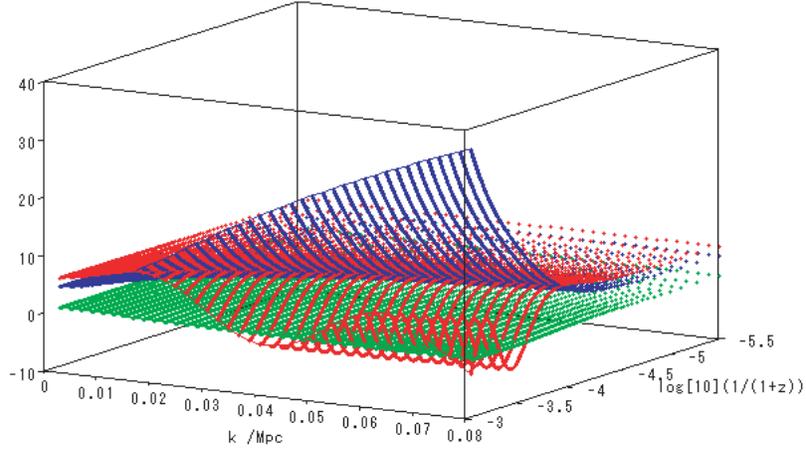


図 6: 光子密度ゆらぎ D^γ (赤)、CDM 密度ゆらぎ D^c (青) と Bardeen ポテンシャル Φ (緑) の時間発展。時間を赤方偏移 z の対数を用いて表している。放射優勢の時代から脱結合時 ($z \simeq 10^3$) までを、Harrison-Zel'dovich スペクトルを仮定して Φ の初期値を波数 k によらず 1 として計算。 D^c は z_{eq} 以後ホライズン内に先に入る波長の短いゆらぎから単調に増大していくが、 D^γ は振動する。 Φ の変化は図 7 の方が分かりやすい。

これらの保存則はもとの式と次のように関係している。保存則 (9.7) と (9.9) 式を組み合わせると $\partial_\eta D$ を計算すると

$$\rho \partial_\eta D = -(1+w)\rho k V + 3waH\rho D - aH\rho_r D^\gamma \quad (9.22)$$

が得られる。上でも述べたように、 $V^b \sim V^\gamma$ ならば二つの密度ゆらぎの微分が $\partial_\eta(D^b - 3D^\gamma/4) \sim 0$ を満たすことから断熱条件は良い近似で維持されており、 $D^b \simeq 3D^\gamma/4$ と置くことができる。そこで、最後の微分を含まない項に対して断熱条件から得られる関係式 $D = 3(1+w)D^\gamma/4$ を使って $\rho^\gamma D^\gamma$ を $3c_s^2 \rho D$ に書き換えると保存則 (9.20) を得ることができる。同様にして、保存則 (9.8) と (9.10) 式から $(1+w)\rho \partial_\eta V$ を計算すると、トム

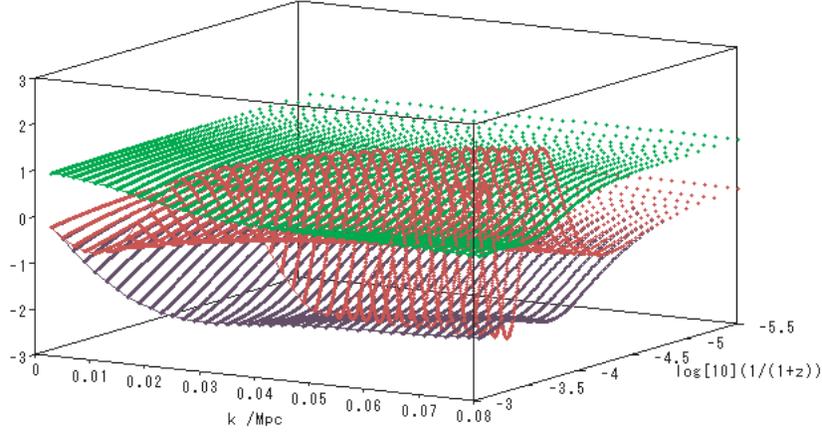


図 7: バリオン速度ゆらぎ V^b (橙) と CDM 速度ゆらぎ V^c (紫) の計算結果。図 6 と同じ条件の下で計算し、 Φ (緑) の結果と併せて記す。 Φ の振幅は z_{eq} 以前の高波数領域で振幅が少し減衰するが z_{eq} 以後はまた変化しなくなる。

ソン散乱の項は相殺して

$$(1+w)\rho\partial_\eta V = (1+w)\rho\left\{-\left(1-3c_s^2\right)aHV + \left(1+3c_s^2\right)k\Psi\right\} + \frac{1}{3}k\rho_r\mathcal{D}^\gamma \quad (9.23)$$

を得る。最後の項を上と同様書き換えると保存則 (9.21) を得る。

バリオンと光子が強く結合した系の数値計算の結果を図 6 ~ 図 9 に示した。CDM 変数 \mathcal{D}^c と V^c 、ニュートリノ変数 \mathcal{D}^ν と V^ν 、放射バリオン流体変数 \mathcal{D} と V の方程式 (9.3)、(9.4)、(9.5)、(9.6)、(9.20)、(9.21) 及び Bardeen ポテンシャル $\Phi(= -\Psi)$ を決める Poisson 方程式 (9.19) を Friedman 背景時空の方程式とともに連立して解いた。宇宙論パラメータは第 2 章で与えた $\Omega_b = 0.042$ 、 $\Omega_d = 0.27$ 、 $\Omega_r = 8.1 \times 10^{-5}$ 、 $\Omega_\gamma = 4.8 \times 10^{-5}$ 、 $\Omega_\Lambda = 0.73$ 、 $h = 0.72$ を用いて計算した。初期値は放射優勢の時期に与え、Harrison-Zel'dovich スペクトルを表す $\Psi_i = -1$ とした (8.1 節の解を参照)。このとき、光子密度ゆらぎとバリオン速度ゆらぎは断熱近似の関係式 $\mathcal{D}^\gamma = 4(1+w)\mathcal{D}/4$ と $V^b = V$ を用いて求めている。また、Sachs-Wolfe

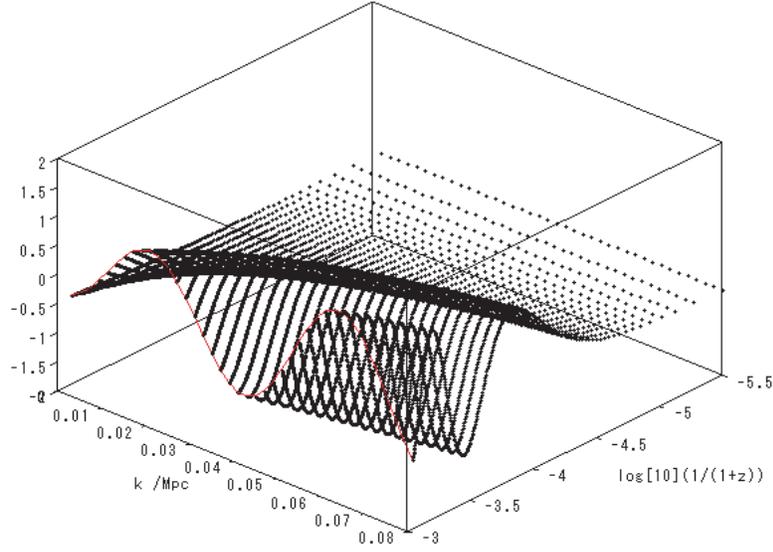


図 8: Sachs-Wolfe 関係式に現れる組み合わせ $D^\gamma/4 + 2\Psi$ の時間発展。図 6 と同じ条件の下で計算している。赤線は脱結合時 ($z \simeq 10^3$) のスペクトルで、 \cos 関数が現れている [(8.37) を参照]。波数 0.02Mpc^{-1} 付近の最初の極値が CMB の第 1 音波ピークに相当する。

関係式に現れる組み合わせ $D^\gamma/4 + 2\Psi$ の時間発展を図 8 に示した¹¹。

ここで再び第 1 音波ピークの位置について考える。保存則 (9.20) と (9.21) 式は放射とバリオンが一つの流体として音速 (9.16) で振動することを表している。脱結合時の音速を求めると

$$c_s(\eta_{\text{dec}}) = \frac{1}{\sqrt{3 \left(1 + \frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma} \frac{a_{\text{dec}}}{a_0}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3 \left(1 + \frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma} \frac{1}{z_{\text{dec}}+1}\right)}} \quad (9.24)$$

となる。第 2 節で与えた数値を代入すると $c_s = 0.456$ を得るので、この値を第 1 音波ピークの位置を決める (8.38) 式に代入すると、観測値と良

¹¹この組み合わせは Hu-Sugiyam, ApJ, 444 (1995) 489 の $k^{3/2}(\Theta_0 + \Psi)$ に相当する。本書では無次元量になるように Fourier 変換を定義しているので $k^{3/2}$ の因子は必要ない。

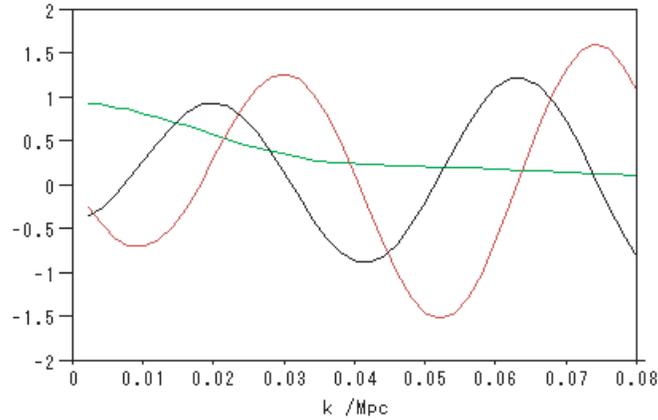


図 9: Bardeen ポテンシャル Φ (緑)、Sachs-Wolfe 関係式に現れる組み合わせ $D^2\gamma/4 + 2\Psi$ (黒)、バリオン速度ゆらぎ V^b (橙) の脱結合時 ($z \simeq 10^3$) のスペクトル。

く合う

$$l_{1\text{peak}} \simeq \frac{\pi}{c_s(\eta_{\text{dec}})} \left(\sqrt{z_{\text{dec}} + 1} - 1 \right) = 220 \quad (9.25)$$

という値を得る。

10 中性化以後の物質ゆらぎの発展

宇宙が中性化した後は光のスペクトルは宇宙の進化の影響をあまり受けなくなり現在までそのスペクトルを保つ (Sachs-Wolfe 関係)。一方、CDM やバリオンのようなダストのゆらぎは成長を続け、銀河や銀河団などの宇宙構造を造る。ここでは脱結合以後のダストのゆらぎを考える。

CDM と中性化したバリオンのゆらぎの方程式は

$$\partial_\eta \mathcal{D}^{c,b} = -kV^{c,b}, \quad (10.1)$$

$$\partial_\eta V^{c,b} + aHV^{c,b} = k\Psi \quad (10.2)$$

のように同じ式で与えられる。これより $V^{c,b}$ を消去すると

$$\partial_\eta^2 \mathcal{D}^{c,b} + aH\partial_\eta \mathcal{D}^{c,b} = k^2\Psi \quad (10.3)$$

を得る。

CDM とバリオンは同じ式をみたすことから二つの変数の差は

$$\partial_\eta^2 (\mathcal{D}^c - \mathcal{D}^b) + aH\partial_\eta (\mathcal{D}^c - \mathcal{D}^b) = 0 \quad (10.4)$$

をみたす。この方程式の安定解は $\partial_\eta \mathcal{D}^c = \partial_\eta \mathcal{D}^b$ である。CDM の密度ゆらぎは物質優勢の時代に入ったころから成長を始めるのに対して、バリオンは光との相互作用のため脱結合時までその成長が抑えられる。微分係数が同じになる安定解の意味はすでに成長過程に入って急速にゆらぎが成長している CDM、すなわち $\partial_\eta \mathcal{D}^c(\eta_{\text{dec}}) > 0$ に対してまだゆらぎの成長が抑えられてい $\partial_\eta \mathcal{D}^b(\eta_{\text{dec}}) \simeq 0$ のバリオンが CDM に引っ張られる形で成長を加速させることを意味する。

このことは逆に CDM がなければバリオンのゆらぎの成長が抑えられ、バリオンによって構成される銀河分布が現在とは異なるものになることを意味する。これは銀河の回転曲線の問題とともに CDM が存在することの間接的な証拠とされている。

11 Sachs-Wolfe 関係式

発信者 i からでた光が受信者 f によって観測された際の重力による光のエネルギー偏移を計算する。電磁波 $F_{\mu\nu}$ は一般に振幅 $A_{\mu\nu}$ と位相 ψ とで $F_{\mu\nu} = \text{Re}(A_{\mu\nu}e^{i\psi})$ とかける。 $A_{\mu\nu}$ は $e^{i\psi}$ にくらべてゆっくり変化する部分である。このような位相と振幅の分離は一般的には可能ではないが、重

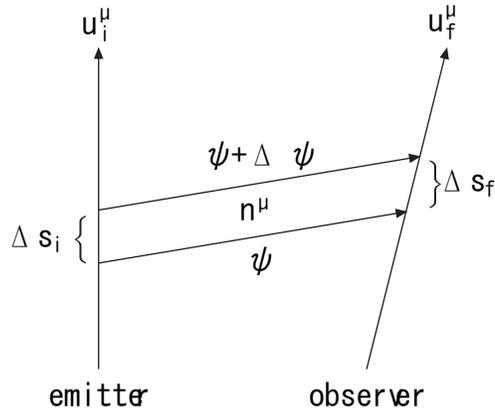


図 10: 発信者 i から受信者 f への光の経路。

力場が変動する長さにくらべて考えている波の波長が小さければ近似的に可能である。この場合、位相一定の面の伝播が光の伝播を記述する。

光の測地線は共形不変なので計量を $ds^2 = a^2 d\sigma^2$ としてスケール因子の二乗を除いた部分を¹²

$$d\sigma^2 = \mathcal{G}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + \mathcal{H}_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \quad (11.1)$$

と定義する。計量 $d\sigma^2$ に対するアフィンパラメータ (affine parameter) を λ とすると光の伝播方向のヌルベクトルと測地線方程式は

$$\begin{aligned} n^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\lambda}, & \mathcal{G}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu &= 0, \\ \frac{dn^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(\mathcal{G}) n^\alpha n^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

で与えられる。このとき位相一定の面は

$$\psi(x^\mu + n^\mu \Delta\lambda) = \psi(x^\mu) \quad \Rightarrow \quad n^\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} = 0 \quad (11.3)$$

と記述できる。一方、ヌルの条件より K を比例定数として

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} = K \mathcal{G}_{\mu\nu} n^\nu \quad (11.4)$$

¹²トレースレスモードだけの計量 $\bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ とは異なる。 $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ には共形モードの摂動も含まれる ($g_{\mu\nu} = a^2 \mathcal{G}_{\mu\nu}$)。

と書ける。

次に図 (10) のように少し遅れて発信された位相一定の面を考える。固有時を s と書くと位相の差は

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \Delta s = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} u^\mu \Delta s \quad (11.5)$$

となる。ここで、 $u^\mu = dx^\mu/ds$ は発信者又は受信者の4元速度で $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ を満たす。これより発信者と受信者の間のエネルギー偏移は

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{\nu_f}{\nu_i} = \frac{\frac{\Delta\psi}{\Delta s_f}}{\frac{\Delta\psi}{\Delta s_i}} = \frac{(\mathcal{G}_{\mu\nu}n^\mu u^\nu)_f}{(\mathcal{G}_{\mu\nu}n^\mu u^\nu)_i} \quad (11.6)$$

で与えられる。摂動がない場合、ヌルベクトルは $n^0 = 1$ と $n^i n_i = 1$ 、4元速度は $u^\mu = (1/a, 0, 0, 0)$ なので、この式は赤方偏移の式 $E_f/E_i = a_i/a_f$ になる。

以下では摂動がある場合のエネルギー偏移を考える。摂動を含んだヌルベクトルを $n^\mu = (1, \mathbf{n}) + \delta n^\mu$ と定義すると測地線方程式より

$$\frac{d\delta n^\mu}{d\lambda} = \left(-\partial_{(\alpha} \mathcal{H}_{\beta)}^\mu + \frac{1}{2} \partial^\mu \mathcal{H}_{\alpha\beta} \right) n^\alpha n^\beta \quad (11.7)$$

を得る。ここで

$$\frac{d(\mathcal{H}_{\beta}^\mu n^\beta)}{d\lambda} = \frac{d\mathcal{H}_{\beta}^\mu}{d\lambda} n^\beta = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \partial_\alpha \mathcal{H}_{\beta}^\mu n^\beta = (\partial_\alpha \mathcal{H}_{\beta}^\mu) n^\alpha n^\beta \quad (11.8)$$

を使うと最初の項は容易に積分できる。これより

$$\delta n^\mu|_i^f = -\mathcal{H}_{\beta}^\mu n^\beta|_i^f + \frac{1}{2} \int_i^f d\lambda (\partial^\mu \mathcal{H}_{\alpha\beta}) n^\alpha n^\beta \quad (11.9)$$

を得る。

観測可能な温度を T_0 を現在の温度として $T = T_0/a + \delta T$ と書くと

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{a_i}{a_f} \left(1 + \frac{\delta T_f}{T_f} - \frac{\delta T_i}{T_i} \right) = \frac{a_i}{a_f} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \Big|_i^f \right) \quad (11.10)$$

が成り立つ。最後の等式は $\rho_\gamma \propto T^4$ を使っている。(11.9) 式の0成分と (11.10) 式をエネルギー偏移の式 (11.6) に代入すると

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{a_i}{a_f} \left\{ 1 + \left[\varphi - \frac{1}{2} h_{00} - (v_i + h_{0i}) n^i + \delta n^0 \right]_i^f \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T_f}{T_i} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} - \varphi + \frac{1}{2} h_{00} + (v_i + h_{0i}) n^i - \delta n^0 \right]_i^f \right\} \\
&= \frac{T_f}{T_i} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} \mathcal{D}^\gamma + \partial_i V^b n^i + \Psi - \Phi + \Omega_i^b n^i \right]_i^f \right. \\
&\quad \left. + \int_i^f d\lambda \left(\partial_\eta \Psi - \partial_\eta \Phi + \partial_\eta \Upsilon_i n^i - \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}} n^i n^j \right) \right\} \quad (11.11)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、 V^b は発信者及び受信者であるバリオンの速度である。 $E_f/E_i = T_f/T_i$ よりブレース $\{ \}$ 内は 1 になる。特にスカラー成分では Bardeen ポテンシャルが時間変化しないとすれば角括弧 $[]$ 内の量は保存され初期値と最終値が同じになる。

ここで、初期値を脱結合時 $i = \eta_{\text{dec}}$ とし、最終値を現在 $f = \eta_0$ に選ぶことにする。また、観測では排除されている一重極や二重極の寄与を与える $\Psi(\eta_0)$ や $n^i \partial_i V^b(\eta_0)$ の項を除くと CMB 温度ゆらぎは $(\Delta T/T)(\eta_0) = (1/4)\mathcal{D}^\gamma(\eta_0)$ で与えられる¹³。このことから Sachs-Wolfe 関係式は次のように書ける。スカラー、ベクトル、テンソルゆらぎによる寄与に分けて書くと

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0) &= \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^S + \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^V + \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^T, \\
\left(\frac{\Delta T}{T} \right)^S &= \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{D}^\gamma + \partial_i V^b n^i + \Psi - \Phi \right\}(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{dec}}) \\
&\quad + \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta \left(\partial_\eta \Psi - \partial_\eta \Phi \right)(\eta, \mathbf{x}(\eta)), \quad (11.12)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)^V = \Omega_i^b(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{dec}}) n^i + \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta \partial_\eta \Upsilon_i(\eta, \mathbf{x}(\eta)) n^i, \quad (11.13)$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)^T = - \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{x}(\eta)) n^i n^j \quad (11.14)$$

となる。ここで光の経路は $\mathbf{x}(\eta) = \mathbf{x}_0 + (\eta - \eta_0)\mathbf{n}$ で与えられる。

最後に良く使われる大角度成分に対してのみ成り立つ公式を書いておく。 $l < 10$ の多重極成分は現在までホライズンの内側に入らない大きなサイズのゆらぎをあらわす。これらのゆらぎに対する解は (8.35) と (8.36) で

¹³CMB に対する観測者の相対速度が二重極を与える。パワースペクトルは二重極が消える CMB の静止系で考えるので、多重極が本質的な異方性を表す。

スーパーホライズンの極限 $x \ll 1$ をとったものになる。すなわち、 $\mathcal{D}^\gamma = (-20/3)\Psi_i$ と $V^\gamma = (1/3)x\Psi_i \simeq 0$ になる。脱結合時ではまだ $V^b \simeq V^\gamma$ であること、Bardeen ポテンシャル $\Psi (= -\Phi)$ はほとんど定数で $\Psi(\eta_{\text{dec}}) = \Psi_i$ であることを使うと

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^S(\eta_0, \mathbf{x}_0) \simeq \frac{1}{3}\Psi(\eta_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{dec}}) \quad (11.15)$$

を得る。最初に導出されたこの関係式のことを Ordinary Sachs-Wolfe 関係式と呼ぶ。一方、(11.12) の積分の項を Integrated Sachs-Wolfe 関係式と呼ぶ。

12 CMB 温度ゆらぎスペクトル

12.1 パワースペクトル

線形の発展方程式を解くことは各共動波数 k に対してゆらぎ変数の初期値と最終値を結ぶ遷移関数 (transfer function) \mathcal{T} を計算することである。それは変数 $F = \Psi, \mathcal{D}, \dots$ に対して

$$F(\eta_f, k) = \mathcal{T}_F F(\eta_i, k) \quad (12.1)$$

と定義される。初期値は放射優勢の適当な時期に与える。CMB パワースペクトルを計算する場合は、脱結合以後は Sachs-Wolfe 関係式を使って現在の値をもとめることになるので、密度ゆらぎや速度ゆらぎの最終値は脱結合時 η_{dec} の値になる。一方、Bardeen ポテンシャルは Integrated Sachs-Wolfe 項があるので現在までの遷移関数を求める必要がある。ただ、Bardeen ポテンシャルの値はほとんど変化しないのでこの項からの寄与は小さく、現在の CMB の温度ゆらぎは脱結合時のスカラーゆらぎ分布をほぼそのまま伝えていると考えてよい。

テンソルゆらぎの寄与は積分項のみなので現在までの遷移関数を計算する必要がある。ただテンソルゆらぎはスカラーゆらぎよりも小さく、大

角度成分以外は減衰して消えてしまう。

ベクトルゆらぎ Υ_i は (7.7) 解より時間発展の途中で消えてなくなる。また、バリオンの速度ベクトル変数 Ω_i^b もバリオン光子流体では音速の二乗が $c_s^2 < 1/3$ なので (7.7) より消えてなくなることがわかる。したがって、これらのベクトルゆらぎは考えないことにする。

ゆらぎ変数 F のパワースペクトルを定義する。無次元化されたフーリエ成分 $F(\eta, \mathbf{k})$ (5.1) の 2 点相関関数

$$\langle F(\eta, \mathbf{k}) F(\eta, \mathbf{k}') \rangle = \langle |F(\eta, k)|^2 \rangle k^3 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (12.2)$$

を用いてゆらぎ F のパワースペクトルを

$$P_F(\eta, k) = \frac{1}{2\pi^2} \langle |F(\eta, k)|^2 \rangle \quad (12.3)$$

と定義する。これを用いると同一点の 2 点相関は

$$\begin{aligned} \langle F(\eta, \mathbf{x}) F(\eta, \mathbf{x}') \rangle &= \int [d^3\mathbf{k}] [d^3\mathbf{k}'] \langle f(\eta, \mathbf{k}) F(\eta, \mathbf{k}') \rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^3} \langle |F(\eta, k)|^2 \rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{k} P_F(\eta, k). \end{aligned} \quad (12.4)$$

と書ける。

具体的な解からも分かるように初期条件として断熱条件を課すと Bardeen ポテンシャルの初期値 Ψ_i が与えられるとその他のスカラー変数も決まることが分かる。このことからすべてのゆらぎのもとになるスカラー原始スペクトルは Ψ の初期スペクトルによって与えられる。また、テンソルゆらぎ原始スペクトルは h_{ij}^{TT} の初期スペクトルで与えられる。

ゆらぎのもとになる原始パワースペクトルとして観測からも支持されているスケール不変性からの帰結として現れるべき的な関数¹⁴

$$P_s(k) = \frac{1}{2\pi^2} \langle |\Psi(\eta_i, k)|^2 \rangle = A_s \left(\frac{k}{m} \right)^{n_s-1}, \quad (12.5)$$

¹⁴通常モデルでは質量スケール m のことをピボット (pivot) スケールと呼んで適当な値に設定するが、量子重力的宇宙論ではこれは力学的な共動座標での Planck スケールになる。

$$P_t(k) = \frac{1}{2\pi^2} \langle |h^{\text{TT}}(\eta_i, k)|^2 \rangle = A_t \left(\frac{k}{m} \right)^{nt} \quad (12.6)$$

を考える。ここで、 h^{TT} はのちに定義する式 (12.28) で与えられる。このスペクトルに遷移関数の二乗を掛けると任意の時間のスペクトルを得ることができる。

テンソルゆらぎとスカラーゆらぎの原始スペクトルの振幅比はテンソル・スカラー比

$$r = \frac{A_t}{A_s} \quad (12.7)$$

と呼ばれスペクトルを決める重要なパラメータである。

12.2 CMB 多重極成分

CMB 温度ゆらぎを球面調和関数を用いて

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \eta_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\mathbf{x}_0) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (12.8)$$

と展開する。多重極 a_{lm} の統計平均を考えると $\langle a_{lm} \rangle = 0$ 、標準偏差 $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$ は

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (12.9)$$

で与えられる。これより CMB ゆらぎの 2 点相関は、ルジャンドル多項式についての公式

$$\sum_{m=-l}^m Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') = \frac{1}{4\pi} (2l+1) P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \quad (12.10)$$

と $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = \cos \theta$ であることを使うと CMB 温度ゆらぎに 2 点相関は

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \eta_0) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}', \eta_0) \right\rangle \\ &= \sum_{l,l',m,m'} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{l'm'}^*(\mathbf{n}') \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (12.11)$$

と書ける。

以下では偏光のない CMB 温度ゆらぎ異方性スペクトル、通常 TT スペクトルと呼ばれる多重極成分を計算する。スカラーゆらぎからとテンソルゆらぎからの寄与があり、それらを加えたものが観測にかかる。スカラーゆらぎは TT スペクトル全体に寄与するのに対して、テンソルゆらぎは $l < 50$ の低多重極 (大角度成分) にしか寄与しない。

スカラーゆらぎ多重極成分 ここでは簡単のため CMB 温度ゆらぎスペクトルのなかで主要な寄与を与える部分、すなわち式 (11.12) 中の積分を含まない項を考える。さらに $\Psi = \Phi$ と置いて

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \eta_0) = \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{D}^\gamma + \partial_i V^b n^i + 2\Psi \right\} (\eta_{\text{dec}}, \mathbf{x}_{\text{dec}}). \quad (12.12)$$

この式のフーリエ成分は $\mathbf{x}_{\text{dec}} = \mathbf{x}_0 - (\eta_0 - \eta_{\text{dec}})\mathbf{n}$ より

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) &= \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{D}^\gamma - i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n} V^b + 2\Psi \right\} (\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})} \\ &= \left\{ \frac{1}{4} \mathcal{D}^\gamma + 2\Psi + \frac{V^b}{k} \partial_\eta \right\} (\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\eta} \Big|_{\eta=\eta_0 - \eta_{\text{dec}}} \end{aligned} \quad (12.13)$$

で与えられる。ここで、 $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k = (\theta_k, \varphi_k)$ である。

はじめに ordinary Sachs-Wolfe 関係が成り立つ比較的大きいサイズのゆらぎ ($l < 30$) について考える。この場合式 (11.15) で見たように CMB 温度ゆらぎは脱結合時の Bardeen ポテンシャルで与えられ、フーリエ成分 (12.13) は

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) \simeq \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})} \quad (12.14)$$

と簡単になる。この関係式を使って $C(\theta)$ を書くと

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{k'^3} \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{k}', \mathbf{n}', \eta_0) \right\rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_0} \\ &\simeq \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{k'^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_0} \frac{1}{9} \langle \Psi(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) \Psi(\mathbf{k}', \eta_{\text{dec}}) \rangle \\ &\quad \times e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}'(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \frac{1}{9} \langle |\Psi(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}})|^2 \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}'(\eta_0 - \eta_{\text{dec}})} \end{aligned} \quad (12.15)$$

を得る。ここで、2点相関の式 (12.2) を使っている。

右辺の位相項を球ベッセル関数による展開公式

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(ky) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{y}}) \quad (12.16)$$

を使って展開する。ここで $\hat{\mathbf{y}}$ は $\hat{\mathbf{k}}$ と同様に定義されている。これより

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \left\langle \left| \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) \right|^2 \right\rangle j_l(kd_{\text{dec}}) j_{l'}(kd_{\text{dec}}) \\ &\times \sum_{l',l=0}^{\infty} i^{l'-l} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}) \end{aligned} \quad (12.17)$$

を得る。ここで、 $d_{\text{dec}} = \eta_0 - \eta_{\text{dec}}$ は最終散乱面までの距離を表す。 \mathbf{k} 積分を動径方向と角度方向に分けて $d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega_k$ 、 $d\Omega_k = d\theta_k d\varphi_k$ と分解して、球面調和関数の公式

$$\int d\Omega_k Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (12.18)$$

とルジャンドル多項式についての公式 (12.10) を使うと

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} \frac{1}{9} \langle |\Psi(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}})|^2 \rangle j_l^2(kd_{\text{dec}}) \quad (12.19)$$

を得る。この式と定義式 (12.11) を比較すると C_l を求めることができる。球ベッセル関数の形より積分にもっとも寄与する領域として $l \simeq kd_{\text{dec}}$ (2.28) の関係式が出てくる。

Ordinary Sachs-Wolfe 関係が成り立つスーパーホライズンゆらぎでは Ψ の遷移関数はほぼ $\mathcal{T}_{\Psi} \simeq 1$ になるため、 $\langle |\Psi(\eta_{\text{dec}})|^2 \rangle \simeq \langle |\Psi_i|^2 \rangle = 2\pi^2 P_s$ として多重極成分を計算すると

$$\begin{aligned} C_l^{\text{osw}} &= 4\pi \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{1}{9} P_s(k) j_l^2(kd_{\text{dec}}) \\ &= \frac{2\pi^2 A_s}{(md_{\text{dec}})^{n_s-1}} \frac{1}{9} \frac{\Gamma(3-n_s) \Gamma(l - \frac{1}{2} + \frac{n_s}{2})}{2^{3-n_s} \Gamma^2(2 - \frac{n_s}{2}) \Gamma(l + \frac{5}{2} - \frac{n_s}{2})} \end{aligned} \quad (12.20)$$

となる。Harrison-Zel'dovich スペクトル ($n_s = 1$) の場合

$$\frac{l(l+1)C_l^{\text{osw}}}{2\pi} = \frac{A_s}{9} \quad (12.21)$$

と書ける。このように、低多重極成分では宇宙初期の原始スペクトル $P_s(k)$ がほとんど影響を受けずに現在まで伝わっていると考えられている。

音響振動が見えるもう少し小さいサイズのゆらぎまで考えたい場合はフーリエ成分 (12.13) のすべての項からの寄与を取り扱う必要がある。上と同じように計算すると

$$\begin{aligned}
C(\theta) = & \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \frac{d^3\mathbf{k}'}{k'^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}_0} \left\langle \left\{ \left(\frac{\mathcal{D}^\gamma}{4} + 2\Psi \right) (\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) + \frac{V^b(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}})}{k} \partial_\eta \right\} \right. \\
& \times \left. \left\{ \left(\frac{\mathcal{D}^\gamma}{4} + 2\Psi \right) (\mathbf{k}', \eta_{\text{dec}}) + \frac{V^b(\mathbf{k}', \eta_{\text{dec}})}{k'} \partial_{\eta'} \right\} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\eta} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{n}'\eta'} \Big|_{\substack{\eta=\eta' \\ \eta_0-\eta_{\text{dec}}}} \right\rangle
\end{aligned} \tag{12.22}$$

を得る。2点相関の式 (12.2) を使って波数の一方の \mathbf{k}' 積分を実行し、位相の項を球ベッセル関数による展開公式を使って展開すると

$$\begin{aligned}
C(\theta) = & \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \sum_{l,l'=0}^{\infty} i^{l'-l} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}') \\
& \times \left\langle \left\{ \left(\frac{\mathcal{D}^\gamma}{4} + 2\Psi \right) (\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) j_l(k\eta) + \frac{V^b(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}})}{k} \partial_\eta j_l(k\eta) \right\} \right. \\
& \left. \left\{ \left(\frac{\mathcal{D}^\gamma}{4} + 2\Psi \right) (\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) j_{l'}(k\eta) + \frac{V^b(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}})}{k} \partial_\eta j_{l'}(k\eta) \right\}^* \right\rangle \Big|_{\eta=\eta_0-\eta_{\text{dec}}}
\end{aligned} \tag{12.23}$$

を得る。 \mathbf{k} 積分を動径方向と角度方向に分けて $d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega_k$ 、 $d\Omega_k = d\theta_k d\varphi_k$ と分解して、球面調和関数の公式 (12.18) とルジャンドル多項式についての公式 (12.10) を使うと

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} \left\langle \left| \left\{ \left(\frac{\mathcal{D}^\gamma}{4} + 2\Psi \right) (\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) j_l(kd_{\text{dec}}) + V^b(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) j_l'(kd_{\text{dec}}) \right\} \right|^2 \right\rangle \tag{12.24}$$

を得る。ここで、 $j_l'(x) = \partial_x j_l(x)$ 。

考えているゆらぎは放射優勢の時期に設定された初期時間 η_i ではまだスーパーホライズンサイズであった。このゆらぎの脱結合時 η_{dec} までの

遷移関数をそれぞれ \mathcal{T}_γ 、 \mathcal{T}_b 、 \mathcal{T}_Ψ とすると脱結合時の値は初期値を使って

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathcal{D}^\gamma}{4} + 2\Psi\right)(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) &= \frac{1}{4}\mathcal{T}_\gamma\mathcal{D}^\gamma(\mathbf{k}, \eta_i) + 2\mathcal{T}_\Psi\Psi(\mathbf{k}, \eta_i) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\mathcal{T}_\gamma + 2\mathcal{T}_\Psi\right)\Psi_i(k), \\ V^b(\mathbf{k}, \eta_{\text{dec}}) &= \mathcal{T}_bV^b(\mathbf{k}, \eta_i) = \mathcal{T}_b\frac{1}{2}k\eta_i\Psi_i(k) \end{aligned} \quad (12.25)$$

と書ける。ここで、放射優勢時代の解からスーパーホライズンゆらぎ ($x = k\eta \rightarrow 0$) では $\mathcal{D}^\gamma \rightarrow -6\Psi_i$ 、 $\Psi \rightarrow \Psi_i$ 、 $V^b(=V^\gamma) \rightarrow k\eta_i\Psi_i/2$ であることを使った。

先にも述べたように、CMB 多重極成分は Ψ の初期値を表す原始パワースペクトルが与えられれば計算できる。すなわち、

$$C_l = 4\pi \int \frac{dk}{k} \left\{ \left(-\frac{3}{2}\mathcal{T}_\gamma + 2\mathcal{T}_\Psi\right) j_l(kd_{\text{dec}}) + \mathcal{T}_b\frac{1}{2}k\eta_i j_l'(kd_{\text{dec}}) \right\}^2 P_s(k) \quad (12.26)$$

と計算される。

テンソルゆらぎ多重極成分 テンソルゆらぎは式 (11.14) を使って計算される。スカラーゆらぎのときと同じようにすると

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{k^3} \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}(\eta_0-\eta)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}'(\eta_0-\eta')} \\ &\quad \times \langle \partial_\eta h_{ij}^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{k}) \partial_{\eta'} h_{lm}^{\text{TT}*}(\eta', \mathbf{k}) \rangle n^i n^j n^l n'^m \end{aligned} \quad (12.27)$$

を得る。左辺に時間の異なる 2 点スペクトル関数が現れる。横波トレスレスの条件をみたすことからこれを

$$\begin{aligned} &\langle h_{ij}^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{k}) h_{lm}^{\text{TT}*}(\eta', \mathbf{k}) \rangle \\ &= \langle h^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{k}) h^{\text{TT}*}(\eta', \mathbf{k}) \rangle \left\{ \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{lm} \right. \\ &\quad + \frac{1}{k^2} (\delta_{ij}k_l k_m + \delta_{lm}k_i k_j - \delta_{il}k_j k_m - \delta_{im}k_l k_j - \delta_{jl}k_i k_m - \delta_{jm}k_l k_i) \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^4} k_i k_j k_l k_m \right\} \end{aligned} \quad (12.28)$$

と書くと、最終的に

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} \left\langle \left| \int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta \partial_\eta h^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{k}) \frac{j_l(k(\eta_0 - \eta))}{k^2(\eta_0 - \eta)^2} \right|^2 \right\rangle \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \quad (12.29)$$

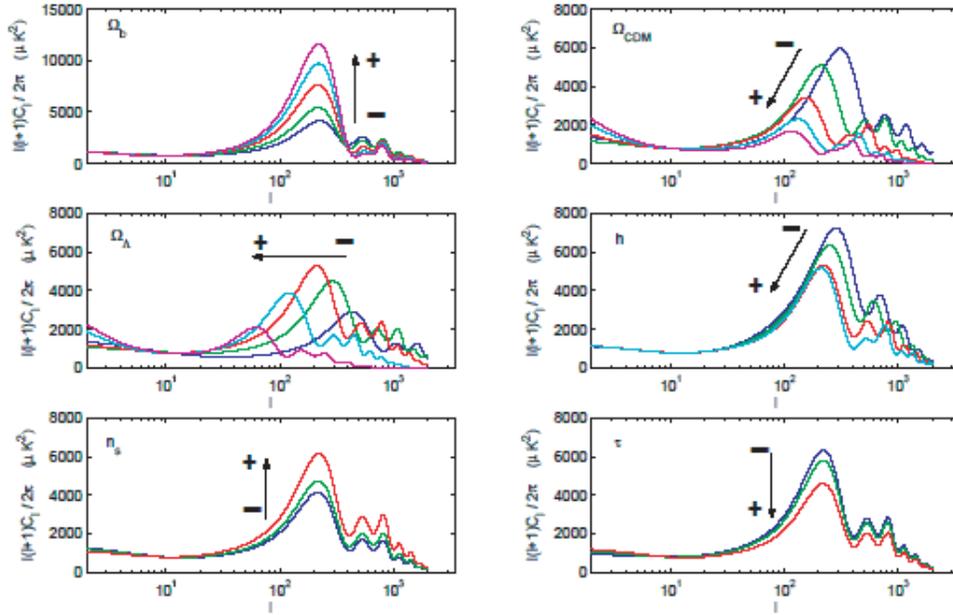


図 11: TT パワースペクトルのパラメータ依存性。上から 3 種類の密度パラメータ Ω_b 、 Ω_c 、 Ω_Λ 、Hubble 定数 h 、スペクトル指数 n_s 、光学的深さ (optical depth) τ を変えたときのスペクトルの変化を表す [E. Martinez-Gonzalez, astro-ph/0610162]。

を得る。

この式を簡単に評価してみる。テンソル方程式からゆらぎがスーパーホライズンのとき解はほとんど定数であることが分かっているので、 $\partial_\eta h^{\text{TT}} = 0$ となり多重極成分は生成されない。テンソルゆらぎが変化するのはホライズンの内側に入ってからである。そのため、積分が値を持つのは脱結合時 η_{dec} から現在 η_0 の間にホライズンの内側に入る大きなサイズの低多重極成分 ($l < 50$) のみである。

ホライズンの内側 ($x = k\eta \geq 2$) に入ると $h^{\text{TT}} \propto 1/a$ で振幅が減衰することが分かっているので、この領域では $\partial_\eta h^{\text{TT}} \simeq -aHh^{\text{TT}} = (-2/\eta)h^{\text{TT}}$ と書くことができる。最後の等式は、考えている時期が $a \propto \eta^2$ の物質優

勢の時代であることを表している。このことから

$$\int_{\eta_{\text{dec}}}^{\eta_0} d\eta \partial_\eta h^{\text{TT}} \frac{j_l(k(\eta_0 - \eta))}{k^2(\eta_0 - \eta)^2} \simeq \frac{j_l(k\eta_0)}{k^2\eta_0^2} \int_{\eta=2/k}^{\eta_0} \frac{-2d\eta}{\eta} h^{\text{TT}} \quad (12.30)$$

と書ける。さらに $h^{\text{TT}} \propto 1/\eta^2$ を考慮して積分を実行すると $\int (-2d\eta/\eta) h^{\text{TT}} = h^{\text{TT}}(\eta_0) - h^{\text{TT}}(\eta = 2/k)$ を得る。ここで、 η_0 は宇宙のサイズを表すので $h^{\text{TT}}(\eta_0)$ は無視できる。したがって、多重極は $\eta_0 = d_{\text{dec}}$ と書くと $l < 50$ に対して

$$C_l |_{l < 50} \simeq \frac{2}{\pi} \int \frac{dk}{k} \langle |h^{\text{TT}}(\eta = 2/k, \mathbf{k})|^2 \rangle \frac{j_l^2(kd_{\text{dec}})}{k^4 d_{\text{dec}}^4} \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \quad (12.31)$$

を得る。ここで、テンソルゆらぎはホライズンに入るまではほとんど変化しない、すなわちそれまでは遷移関数が 1 であることからホライズンに入る直前 ($\eta = 2/k$) のゆらぎスペクトルは原始スペクトルと同じであると考えてよい。そこで $\langle |h^{\text{TT}}(\eta = 2/k, \mathbf{k})|^2 \rangle = 2\pi^2 P_t(k)$ と置くと

$$\begin{aligned} C_l |_{l < 50} &\simeq 4\pi \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{j_l^2(kd_{\text{dec}})}{k^4 d_{\text{dec}}^4} P_t(k) \\ &= \frac{2\pi^2 A_t}{(md_{\text{dec}})^{n_t}} \frac{(l+2)!}{(l-2)!} \frac{\Gamma(6-n_t)\Gamma(l-2+\frac{n_t}{2})}{2^{6-n_t}\Gamma^2(\frac{7}{2}-n_t)\Gamma(l+4-\frac{n_t}{2})} \end{aligned} \quad (12.32)$$

を得る。 $n_t = 0$ では $l(l+1)C_l/2\pi \simeq A_t 8l(l+1)/15(l-2)(l+3)$ となる。 $l = 2$ に発散があるが、これは近似が粗いことによるものである。

このように TT スペクトルの大角度成分にはテンソルゆらぎの寄与が含まれると考えられる。そのためどれだけテンソルゆらぎが含まれているかをあらわすテンソル・スカラー比 r は TT スペクトルだけでは決まらない。

その他の多重極成分 詳細については議論しないが、ここでその他の多重極成分について簡単に述べておく。CMB はトムソン散乱によって偏光する。主な原因は宇宙が中性化するプロセスでのトムソン散乱による偏光である。 E モード、 B モードと呼ばれるその偏光のスペクトルが図 12 に載せてある。一番上は TT スペクトルである。二番目が TE、三番が EE、

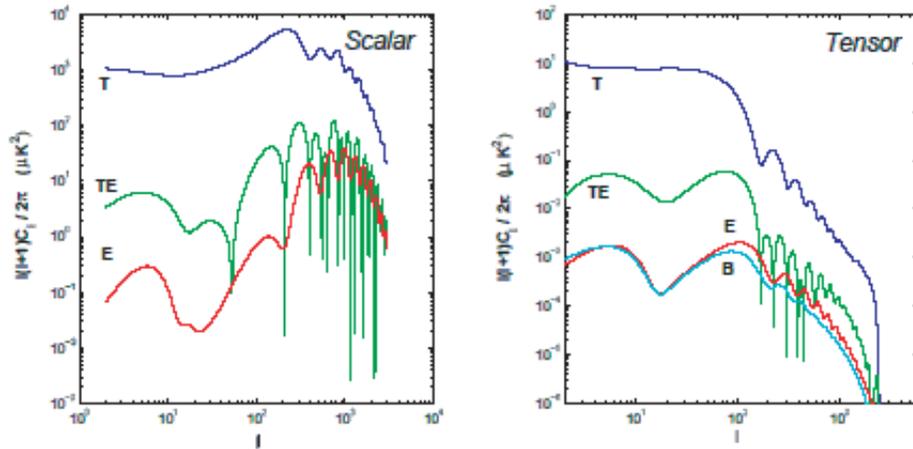


図 12: スカラー及びテンソルゆらぎパワースペクトル ($r = 0.01$)。上から TT、TE、EE、BB(右図のみ) スペクトルを表す [E. Martinez-Gonzalez, astro-ph/0610162]。二つの寄与を足し合わせたものが CMB のベクトルになる。

そして一番下が BB スペクトルと呼ばれる。BB スペクトルはテンソルゆらぎからしか生成されない。

三番目の EE スペクトルの低多重極 ($l < 10$) の盛り上がりから光学的深さ (optical depth) τ と呼ばれる量が決定され、 $\tau \simeq 0.1$ の値を得ている。この量は最初の星が誕生によって放射された光によって粒子がイオン化され、宇宙が少し不透明になった度合いを表している。そのため、 τ は最初の星がいつごろ誕生したかに関係した宇宙論パラメータである。

テンソルの寄与 r を決定することができるのはテンソルゆらぎに起源をもつ B モードのスペクトルで、図 12(右) の一番下に現れているものである。