

平成 26 年 3 月初版
(平成 29 年 5 月改正)

$D \geq 3$ 共形場理論の最近の発展¹

浜田賢二

高エネルギー加速器研究機構 (KEK)
素粒子原子核研究所

<http://research.kek.jp/people/hamada/>

1 Minkowski 共形場理論

共形場理論 (conformal field theory, CFT) が現れる場所として、ベータ関数が消える場の量子論の固定点、量子重力理論の紫外極限、そして統計モデルの臨界点が挙げられる。

はじめに Minkowski 時空での共形場理論の基本的な事柄についてまとめる。Minkowski 時空では量子化の処方箋、Hamilton 演算子、Hermite 性などの場の演算子の性質、公理などが Euclid 空間での場の量子論より明瞭だからである。Euclid 空間での共形場理論は基本的には Minkowski 時空から解析接続して得られるものとする。

一方で、作用関数や(非摂動的)量子化が明確でないような場合、Euclid 空間での議論の方が Minkowski 時空固有の発散等を回避できて扱いやすい。また、相関関数の性質や状態の定義等が明確になり、統計力学との対応が分かりやすくなるなどの利点がある。Euclid 空間での共形場理論については次の章で議論する。

以下、共形場理論の基本的な性質を述べる際は一般的に D 次元で記述し、具体例を示す際は簡単のため次元を 4 として計算する。

¹本解説書の内容はさらに加筆、修正して著書「共形場理論を基礎にもつ 量子重力理論と宇宙論」(プレアデス出版, 2016)に掲載している。

1.1 共形変換

共形変換とは角度を変えない座標変換で、座標を $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ と変換したとき、線素が

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \Omega(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

と変換するものである。ここで、 Ω は任意の関数である。Minkowski 計量は $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, \dots, 1)$ を採用する。右辺を書き換えると共形変換は関係式

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \Omega(x) \eta_{\lambda\sigma}$$

で表される。 $\Omega = 1$ は Poincaré 変換に相当する。

ここで、共形変換はあくまでも背景計量 $\eta_{\mu\nu}$ 上で定義されるもので、この変換の下でこの計量自体は変化しない。一方、一般座標変換は、計量テンソル場を導入して線素を定義し、スカラー量である線素が不変に保たれるように計量も場として変換する座標変換で、共形変換とは区別しなければならない。以下、テンソル場の足の上げ下げはすべて背景計量 $\eta_{\mu\nu}$ で行う。

無限小の共形変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$ を考えると、上の条件式から ζ^μ は方程式

$$\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \zeta^\lambda = 0$$

を満たさなければならないことが分かる。この式のことを共形 Killing 方程式と呼び、 ζ^λ を共形 Killing ベクトルと呼ぶ。このとき、任意関数は

$$\Omega = 1 + \frac{2}{D} \partial_\lambda \zeta^\lambda \quad (1.2)$$

と決まる。

共形 Killing 方程式を変形すると $(\eta_{\mu\nu} \partial^2 + (D-2) \partial_\mu \partial_\nu) \partial_\lambda \zeta^\lambda = 0$ を得る。この式と元の式から ζ^μ を三回微分したものはゼロになることが分かる。そのことに注意して方程式を解くと $(D+1)(D+2)/2$ 個の解が求まる。そ

れらは自由度が D 個の並進 (translation)、 $D(D-1)/2$ 個の Lorentz 変換、1 個の dilatation、 D 個の特殊共形変換 (special conformal transformation) に対応して、それぞれ $\zeta_{T,L,D,S}^\lambda$ と表すと、

$$\begin{aligned} (\zeta_T^\lambda)_\mu &= \delta^\lambda_\mu, & (\zeta_L^\lambda)_{\mu\nu} &= x_\mu \delta^\lambda_\nu - x_\nu \delta^\lambda_\mu, \\ \zeta_D^\lambda &= x^\lambda, & (\zeta_S^\lambda)_\mu &= x^2 \delta^\lambda_\mu - 2x_\mu x^\lambda \end{aligned} \quad (1.3)$$

で与えられる。最初の二つが Killing 方程式 $\partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu = 0$ を満たす等長変換、すなわち Poincaré 変換に対応する。

有限の共形変換は、dilatation と特殊共形変換の場合、それぞれ

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu, \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a_\mu x^\mu + a^2 x^2}$$

で与えられる。これらに加えて、特殊共形変換の代わりとなる重要な変換として、共形反転 (conformal inversion)

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2}$$

を導入する。この変換と並進を組み合わせると、

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu \rightarrow \frac{\frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu}{\left(\frac{x^\mu}{x^2} + a^\mu\right)^2} = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a_\mu x^\mu + a^2 x^2}$$

のように特殊共形変換が導ける。

1.2 共形代数と場の変換性

並進、Lorentz 変換、dilatation、特殊共形変換の生成子をそれぞれ P_μ 、 $M_{\mu\nu}$ 、 D 、 K_μ と書くことにする。² これら $(D+1)(D+2)/2$ 個の無限小共形変換の生成子は $SO(D, 2)$ 代数

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, P_\lambda] = -i(\eta_{\mu\lambda} P_\nu - \eta_{\nu\lambda} P_\mu),$$

²本書では時空の次元と dilatation 生成子と同じ記号 D を使う。それらは文脈から用意に区別できる。

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}] &= -i(\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\sigma}), \\
[D, P_\mu] &= -iP_\mu, \quad [D, M_{\mu\nu}] = 0, \quad [D, K_\mu] = iK_\mu, \\
[M_{\mu\nu}, K_\lambda] &= -i(\eta_{\mu\lambda}K_\nu - \eta_{\nu\lambda}K_\mu), \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \\
[K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{1.4}$$

を成す。並進と Lorentz 変換の生成子から構成される $SO(D-1, 1)$ の代数は特に Poincaré 代数と呼ばれる。生成子の Hermite 性は

$$P_\mu^\dagger = P_\mu, \quad M_{\mu\nu}^\dagger = M_{\mu\nu}, \quad D^\dagger = D, \quad K_\mu^\dagger = K_\mu$$

で与えられる。

この共形代数は一つにまとめて書くことが出来る。 $SO(D, 2)$ 変換の生成子を J_{ab} として、その代数

$$[J_{ab}, J_{cd}] = -i(\eta_{ac}J_{bd} + \eta_{bd}J_{ac} - \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ad}J_{bc})$$

を考える。ここで、生成子は Hermite 性 $J_{ab}^\dagger = J_{ab}$ 及び反対称性 $J_{ab} = -J_{ba}$ を満たす。計量は $\eta_{ab} = (-1, 1, \dots, 1, -1)$ で与えられ、 $a, b = 0, 1, 2, \dots, D, D+1$ と番号付けする。時空の足を $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$ と選んで、

$$M_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}, \quad D = J_{D+1D}, \quad P_\mu = J_{\mu D+1} - J_{\mu D}, \quad K_\mu = J_{\mu D+1} + J_{\mu D}$$

と書くと、それぞれ Lorentz 変換、dilatation、並進、特殊共形変換の生成子となり、共形代数 (1.4) が得られる。

共形変換の下で性質の良い変換をする場を特にプライマリー (primary) 場と呼ぶ。ここでは整数スピン l の場を表す対称トレースレステンソル場 $O_{\mu_1 \dots \mu_l}$ を考える。³ 場の演算子は Hermite 性

$$O_{\mu_1 \dots \mu_l}^\dagger(x) = O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x)$$

³ $D = 4$ の場合、これは Lorentz 群 $SO(3, 1)$ の (j, \tilde{j}) 表現の $j = \tilde{j} = l/2$ に属するテンソル場で、 $O_{\mu_1 \dots \mu_l} = (\sigma_{\mu_1})^{\alpha_1 \dot{\alpha}_1} \dots (\sigma_{\mu_l})^{\alpha_l \dot{\alpha}_l} O_{\alpha_1 \dots \alpha_l \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_l}$ と表示することが出来る。トレースレスの条件は $\eta^{\mu\nu}(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}(\sigma_\nu)^{\beta\dot{\beta}} \propto \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ を用いて示すことが出来る。また、 $j \neq \tilde{j}$ の場として、 $(1/2, 0)$ と $(0, 1/2)$ のスピノル場、 $(1, 1/2)$ と $(1/2, 1)$ の Rarita-Schwinger 場、 $(1, 0)$ と $(0, 1)$ の二階反対称テンソル場、などがよく知られている。

を満すものとし、その共形次元を Δ とする。このとき、プライマリースカラー場の共形変換の下で

$$O'(x') = \Omega(x)^{-\Delta/2} O(x)$$

と変換する。プライマリーテンソル場の変換則は、 $O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_l}$ が共形次元 $\Delta - l$ のスカラー量として変換することから、

$$O'_{\mu_1 \dots \mu_l}(x') = \Omega(x)^{-\frac{\Delta-l}{2}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\mu_l}} O_{\nu_1 \dots \nu_l}(x) \quad (1.5)$$

で与えられる。

ここで、直交群 $SO(D-1, 1)$ のベクトル表現を $D_{\mu\nu}$ と書くと、座標変換の Jacobian は $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Omega(x)^{-1/2} D_\mu^\nu(x)$ と分解できる。このことから、任意のスピンのプライマリー場を $O_j(x)$ と簡略し、それに作用する表現行列を $R[D]_{jk}$ と書くと、共形変換は局所的に回転とスケール変換の組み合わせで書くことができ、 $O'_j(x') = \Omega(x)^{-\Delta/2} R[D(x)]_j^k O_k(x)$ と表すことができる。それらの相関関数は

$$\langle 0 | O_1(x_1) \dots O_n(x_n) | 0 \rangle = \langle 0 | O'_1(x_1) \dots O'_n(x_n) | 0 \rangle \quad (1.6)$$

を満たす。ここで、 $|0\rangle$ は共形不変な真空である。右辺の場の引数が左辺と同じ x_j であることに注意する。

無限小変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$ の下での共形変換則は、同じ引数 x をもつ O_j と O'_j の差 $\delta_\zeta O_j(x) = O_j(x) - O'_j(x)$ を ζ^μ で展開してその二次の項を無視すると得られる。プライマリーテンソル場の無限小共形変換は、 $O'_j(x') = O'_j(x) + \zeta^\mu \partial_\mu O_j(x)$ 、 $D_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - (\partial_\nu \zeta^\mu - \partial^\mu \zeta_\nu)/2$ 、 Ω の式 (1.2) に注意すると、変換則 (1.5) より、

$$\begin{aligned} \delta_\zeta O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) &= \left(\zeta^\nu \partial_\nu + \frac{\Delta}{D} \partial_\nu \zeta^\nu \right) O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \left(\partial_{\mu_j} \zeta^\nu - \partial^\nu \zeta_{\mu_j} \right) O_{\mu_1 \dots \mu_{j-1} \nu \mu_{j+1} \dots \mu_l}(x) \end{aligned}$$

で与えられる。

無限小変換は共形変換の生成子と場の演算子との交換子として

$$\delta_\zeta O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) = i [Q_\zeta, O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x)]$$

と表される。ここで、 Q_ζ は共形 Killing ベクトル ζ^μ に対する $(D+1)(D+2)/2$ 個の生成子の総称である。共形 Killing ベクトルの具体形 $\zeta_{T,L,D,S}^\lambda$ (1.3) を代入すると、変換則はそれぞれ

$$\begin{aligned} i [P_\mu, O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x)] &= \partial_\mu O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x), \\ i [M_{\mu\nu}, O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x)] &= (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu - i \Sigma_{\mu\nu}) O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x), \\ i [D, O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x)] &= (x^\mu \partial_\mu + \Delta) O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x), \\ i [K_\mu, O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x)] &= (x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - 2\Delta x_\mu + 2ix^\nu \Sigma_{\mu\nu}) O_{\lambda_1 \dots \lambda_l}(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

となる。このときスピン項は

$$\Sigma_{\mu\nu} O_{\lambda_1 \dots \lambda_l} = i \sum_{j=1}^l (\eta_{\mu\lambda_j} \delta_\nu^\sigma - \eta_{\nu\lambda_j} \delta_\mu^\sigma) O_{\lambda_1 \dots \lambda_{j-1} \sigma \lambda_{j+1} \dots \lambda_l}$$

と定義される。

スピン行列を $\Sigma_{\mu\nu} O_{\lambda_1 \dots \lambda_l} = (\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda_1 \dots \lambda_l}^{\sigma_1 \dots \sigma_l} O_{\sigma_1 \dots \sigma_l}$ と表すと、それは Lorentz 生成子 $M_{\mu\nu}$ と同じ代数を満たす行列である。ベクトル場の場合は $(\Sigma_{\mu\nu})_\lambda^\sigma = i(\eta_{\mu\lambda} \delta_\nu^\sigma - \eta_{\nu\lambda} \delta_\mu^\sigma)$ で与えられ、一般の l の式はこれを用いて

$$(\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda_1 \dots \lambda_l}^{\sigma_1 \dots \sigma_l} = \sum_{j=1}^l \delta_{\lambda_1}^{\sigma_1} \dots \delta_{\lambda_{j-1}}^{\sigma_{j-1}} (\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda_j}^{\sigma_j} \delta_{\lambda_{j+1}}^{\sigma_{j+1}} \dots \delta_{\lambda_l}^{\sigma_l}$$

と表される。

プライマリー場 O が半整数のスピン $1/2$ をもつフェルミオン場なら

$$\Sigma_{\mu\nu} \psi = i \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \psi$$

で与えられる。ここで、ガンマ行列は $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}$ で定義する。

トレースレスの条件を満たすストレステンソルが存在するとき、共形変換の生成子は共形 Killing ベクトルを用いて

$$Q_\zeta = \int d^{D-1} \mathbf{x} \zeta^\lambda T_{\lambda 0}$$

と表される。ここで、 $d^{D-1}\mathbf{x}$ は空間の体積要素である。実際、共形 Killing 方程式と保存則 $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ を使うと $\partial_\eta Q_\zeta = -(1/D) \times \int d^{D-1}\mathbf{x} \partial_\lambda \zeta^\lambda T_\mu^\mu$ が示せて、トレースレスのとき時間依存性が消えて生成子が保存すること分かる。 ζ^λ に $\zeta_{T,L,D,S}^\lambda(1.3)$ を代入すると具体的な式

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int d^{D-1}\mathbf{x} T_{\mu 0}, & M_{\mu\nu} &= \int d^{D-1}\mathbf{x} (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}), \\ D &= \int d^{D-1}\mathbf{x} x^\lambda T_{\lambda 0}, & K_\mu &= \int d^{D-1}\mathbf{x} (x^2 T_{\mu 0} - 2x_\mu x^\lambda T_{\lambda 0}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

を得る。簡単な例として付録 C に自由スカラー場の場合の共形代数と場の変換則を導出した。

最後に相関関数が満たす微分方程式を与える。共形場理論は真空 $|0\rangle$ が共形不変な理論である。すなわち、すべての生成子 $Q_\zeta (= Q_\zeta^\dagger)$ に対して

$$Q_\zeta |0\rangle = 0, \quad \langle 0|Q_\zeta = 0$$

が成り立つ。したがって、任意の n 個の共形場を簡略して O_j ($j = 1, \dots, n$) と表すと、それらの相関関数は $\langle 0|[Q_\zeta, O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)]|0\rangle = 0$ を満たす。これより、

$$\delta_\zeta \langle 0|O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)|0\rangle = i \sum_{j=1}^n \langle 0|O_1(x_1) \cdots [Q_\zeta, O_j(x_j)] \cdots O_n(x_n)|0\rangle = 0$$

が成り立つ。これは関係式 (1.6) の無限小版である。例えば、 O_j を共形次元 Δ_j のプライマリースカラー場とし、 Q_ζ として D と K_μ の場合を考えると、それぞれ変換則 (1.7) より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(x_j^\mu \frac{\partial}{\partial x_j^\mu} + \Delta_j \right) \langle 0|O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)|0\rangle &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \left(x_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j^\mu} - 2x_{j\mu} x_j^\nu \frac{\partial}{\partial x_j^\nu} - 2\Delta_j x_{j\mu} \right) \langle 0|O_1(x_1) \cdots O_n(x_n)|0\rangle &= 0 \end{aligned}$$

を得る。

1.3 Wightman 関数と正定値性

整数スピン l のトレースレス対称プライマリーテンソル場の二点 Wight-

man 関数

$$W_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}(x-y) = \langle 0 | O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) O_{\nu_1 \dots \nu_l}(y) | 0 \rangle \quad (1.9)$$

を考える。場の共形次元を Δ とすると、それは一般的に

$$W_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}(x) = c P_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}(x) \frac{1}{(x^2)^\Delta} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon}$$

と表される。ここで、 ϵ は無限小の UV カットオフである。関数 $P_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}$ はプライマリーの条件から決まる [付録 A を参照]。

例えばプライマリースカラー場の 2 点 Wightman 関数は、

$$\langle 0 | O(x) O(0) | 0 \rangle = c \frac{1}{(x^2)^\Delta} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon} = c \frac{1}{(x^2 + 2i\epsilon x^0)^\Delta}$$

で与えられる。ここでは $x^0 \neq 0$ として、 ϵ^2 は無視している。スピン 1 のプライマリーベクトル場、スピン 2 のトレースレス対称プライマリーテンソル場の Wightman 関数は

$$\begin{aligned} \langle 0 | O_\mu(x) O_\nu(0) | 0 \rangle &= c I_{\mu\nu} \frac{1}{(x^2)^\Delta} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon} \\ \langle 0 | O_{\mu\nu}(x) O_{\lambda\sigma}(0) | 0 \rangle &= c \frac{1}{2} \left(I_{\mu\lambda} I_{\nu\sigma} + I_{\mu\sigma} I_{\nu\lambda} - \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\sigma} \right) \frac{1}{(x^2)^\Delta} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon} \end{aligned}$$

と表される。ここで、座標 x^μ の関数 $I_{\mu\nu}$ は

$$I_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2 \frac{x^\mu x^\nu}{x^2}$$

と定義され、関係式 $I_\mu^\lambda I_{\lambda\nu} = \eta_{\mu\nu}$ と $I_\mu^\mu = D - 2$ を満たす。一般の整数スピン l の場合は

$$P_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} = \frac{1}{l!} (I_{\mu_1 \nu_1} \dots I_{\mu_l \nu_l} + \text{perms}) - \text{traces}$$

で与えられる。ここで、perms 及び traces はテンソル場が持つ対称トレースレスの性質を反映している。

全体にかかる定数 c は物理的 (ユニタリ性) 条件から $c > 0$ となる。以下では $c = 1$ とする。

Wightman 関数 (1.9) を使って内積を定義する。任意の関数 $f_{1,2}(x)$ を導入して次の量を定義する:

$$(f_1, f_2) = \int d^D x d^D y f_1^{\mu_1 \dots \mu_l} (x) W_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} (x - y) f_2^{\nu_1 \dots \nu_l} (y).$$

さらに、Wightman 関数の Fourier 変換

$$W_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} (k) = \int d^D x W_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} (x) e^{-ik_\mu x^\mu}$$

を導入して、内積を運動量空間で表すと

$$(f_1, f_2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f_1^{\mu_1 \dots \mu_l} (k) f_2^{\nu_1 \dots \nu_l} (k) W_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} (k)$$

となる。ここで、 $f_{1,2}(k)$ は対応する関数の Fourier 変換で、 $-k^2 \rightarrow \infty$ ですばやく減少するものとする。ユニタリ性を満たす物理的な理論では内積が

$$(f, f) > 0$$

のように正になる。これを Wightman 正定値性と呼ぶ。

正定値性からスピン s のプライマリー場の共形次元 Δ に制限がついて、

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \frac{D}{2} - 1 \quad \text{for } s = 0, \\ \Delta &\geq D - 2 + s \quad \text{for } s \neq 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

となる。この条件をユニタリ性バウンド (unitarity bound) と呼ぶ。以下、具体例を挙げてこの条件を考察する。

1.4 Fourier 表示と正定値条件の具体例

これ以後の三節では簡単のため $D = 4$ と置いてユニタリ性の条件を考察する。

はじめに任意の共形次元 Δ を持つプライマリースカラー場を考える。その Wightman 関数 $W(x)$ の Fourier 変換 [付録 B を参照] は

$$W(k) = (2\pi)^2 \frac{2\pi(\Delta - 1)}{4^{\Delta-1} \Gamma(\Delta)^2} \theta(k^0) \theta(-k^2) (-k^2)^{\Delta-2}$$

で与えられる。これより内積 $(f, f) = \int d^4k |f(k)|^2 W(k) / (2\pi)^4$ が正になる条件は

$$\Delta \geq 1$$

となる。下限の $\Delta = 1$ は自由場の場合で、 $\lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta - 1) \theta(-k^2)^{\Delta-2} = \delta(-k^2)$ より、

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\Delta \rightarrow 1} (f, f) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |f(k)|^2 2\pi \theta(k^0) \delta(-k^2) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} |f(\mathbf{k})|^2$$

と表され、正準量子化された自由場から直接計算したものと一致する。

次にベクトル場の場合の正定値条件を考える。ここでは、より一般的な実ベクトル場 A_μ の2点関数

$$\begin{aligned} & \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(0) | 0 \rangle \\ &= \left(\eta_{\mu\nu} - 2\alpha \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \right) \frac{1}{(x^2)^\Delta} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{2\Delta} \left\{ \frac{\Delta - \alpha}{2(\Delta - 1)(\Delta - 2)} \eta_{\mu\nu} \partial^2 - \frac{\alpha}{\Delta - 1} \partial_\mu \partial_\nu \right\} \frac{1}{(x^2)^{\Delta-1}} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon} \end{aligned}$$

を考える。スカラー場の Fourier 変換の式を最後の項に代入するとベクトル場の Fourier 変換が得られ、それを $W_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ と書くと、

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{(\alpha)}(k) &= (2\pi)^2 \frac{2\pi(\Delta - 1)}{4^{\Delta-1} \Gamma(\Delta) \Gamma(\Delta + 1)} \theta(k^0) \theta(-k^2) (-k^2)^{\Delta-2} \\ &\quad \times \left\{ (\Delta - \alpha) \eta_{\mu\nu} - 2\alpha(\Delta - 2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。

プライマリー場 O_μ は $\alpha = 1$ の場合に相当して、 $W_{\mu\nu}^{(1)} = W_{\mu\nu}$ である。一方、 $\alpha = \Delta$ と選ぶと A_μ は次節で導入するプライマリースカラー場 O' のデッセンダント場 $\partial_\mu O'$ とみなすことができる。このとき O' の共形次元は $\Delta' = \Delta - 1$ である。

Wightman 正定値条件は任意の関数 f_μ に対して $f^{\mu*}(k) f^\nu(k) W_{\mu\nu}^{(\alpha)}(k)$ が正であることを要求する。重心系 $k^\mu = (K, 0, 0, 0)$ を選んでも任意性は失われないので、この場合について評価すると

$$f^{\mu*} f^\nu W_{\mu\nu}^{(\alpha)} = C \theta(K) \theta(K^2) \left\{ [(2\Delta - 3)\alpha - \Delta] |f_0|^2 + (\Delta - \alpha) |f_j|^2 \right\} K^{2(\Delta-2)}$$

ここで、係数 $C = 4(2\pi)^3(\Delta - 1)/4^\Delta\Gamma(\Delta)\Gamma(\Delta + 1)$ は正の数とする。したがって、正定値条件は $(2\Delta - 3)\alpha - \Delta \geq 0$ かつ $\Delta - \alpha \geq 0$ で与えられる。 Δ について解くと

$$\Delta \geq \frac{3\alpha}{2\alpha - 1}, \quad \Delta \geq \alpha$$

を得る。プライマリーベクトル場の場合、 $\alpha = 1$ を代入するとよく知られたユニタリ性の条件

$$\Delta \geq 3$$

を得る。⁴ 下限の $\Delta = 3$ をもつプライマリーベクトル場は $\partial^\mu O_\mu = 0$ の条件を満たす保存カレントに相当する。実際、上の式に微分を作用させると $\partial^\mu W_{\mu\nu}(x) = 0$ ($x \neq 0$) を得る。

1.5 デッセンダント場と正定値性

プライマリー場 O に並進の生成子 P_μ を作用させて生成される場

$$\partial_\mu \cdots \partial_\nu O$$

をプライマリー場 O のデッセンダント (descendant) と呼ぶ。共形場理論では、通常、プライマリー場 O が物理的場であるならばそのデッセンダントもまた物理的でなければならない。すなわち、デッセンダントの2点関数もまた正でなければならない。ここではその条件が前節で示した条件と一致することを具体例を挙げて示す。

はじめに、 $D = 4$ でのプライマリースカラー場 O の第一デッセンダント $\partial_\mu O$ 及び第二デッセンダント $\partial^2 O$ の2点相関について議論する。先ず後者の例では

$$\langle 0 | \partial^2 O(x) \partial^2 O(0) | 0 \rangle = 16\Delta^2(\Delta + 1)(\Delta - 1) \frac{1}{(x^2)^{\Delta+2}} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon}$$

⁴通常ゲージ場は次元1なので、ユニタリ性の条件を満たさないが、ゲージ場自身はゲージ不変な物理量ではないので問題ない。一方、ゲージ不変な光子の場 $F_{\mu\nu}$ は反対称場に対するユニタリ性条件 $\Delta \geq 2$ (ここでは議論しない) を満たす。

を得る。 $\partial^2 O$ はスカラー量なのでユニタリ性の条件は簡単に 2 点相関関数の係数の符号が正であれば良く、 $\Delta > 1$ が出てくる。 $\Delta = 1$ は自由スカラー場の場合で、右辺が消えるのは運動方程式 $\partial^2 O = 0$ が成り立つことを表している。

第一デッセンダントの場合は

$$\langle 0 | \partial_\mu O(x) \partial_\nu O(0) | 0 \rangle = 2\Delta \left\{ \eta_{\mu\nu} - 2(\Delta + 1) \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \right\} \frac{1}{(x^2)^{\Delta+1}} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon}$$

を得る。この式に対して前節で議論した Wightman 正定値の条件を課すと、やはり $\Delta \geq 1$ の条件が出てくる。

次にプライマリーベクトル場 O_μ の場合を考えると、その第一デッセンダントの中でスカラー量 $\partial^\mu O_\mu$ を考えると

$$\langle 0 | \partial^\mu O_\mu(x) \partial^\nu O_\nu(0) | 0 \rangle = 4(\Delta - 1)(\Delta - 3) \frac{1}{(x^2)^{\Delta+1}} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon}$$

を得る。 $\Delta > 3$ のとき係数が正になることが分かる。 $\Delta = 3$ は O_μ が保存するカレントの場合で、右辺が消えて $\partial^\mu O_\mu = 0$ が成り立っていることが分かる。

プライマリーテンソル場の場合も同様に、第一デッセンダント $\partial^\mu O_{\mu\nu}$ の 2 点相関は

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \partial^\mu O_{\mu\nu}(x) \partial^\lambda O_{\lambda\sigma}(0) | 0 \rangle \\ &= (\Delta - 4)(4\Delta - 7) \left\{ \eta_{\nu\sigma} - 2 \frac{5\Delta - 11}{4\Delta - 7} \frac{x_\nu x_\sigma}{x^2} \right\} \frac{1}{(x^2)^{\Delta+1}} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon} \end{aligned}$$

で与えられ、スカラー量になる第二デッセンダント $\partial^\mu \partial^\nu O_{\mu\nu}$ の場合は

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \partial^\mu \partial^\nu O_{\mu\nu}(x) \partial^\lambda \partial^\sigma O_{\lambda\sigma}(0) | 0 \rangle \\ &= 24\Delta(\Delta - 1)(\Delta - 3)(\Delta - 4) \frac{1}{(x^2)^{\Delta+2}} \Big|_{x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon} \end{aligned}$$

となる。後者の式からすぐに $\Delta \geq 4$ の条件が見て取れる。また、前者の式に前節で求めた Wightman 正定値条件を課すとやはりこの条件が出てくる。 $\Delta = 4$ は $O_{\mu\nu}$ が保存するトレースレステンソルの場合で、右辺が消えて保存の式 $\partial^\mu \partial^\nu O_{\mu\nu} = 0$ が成り立っていることが分かる。

1.6 Feynman 伝播関数とユニタリ性

ここでは、前節で考察してきた共形次元 Δ に対するユニタリ性バウンドを少し異なる見方で説明する。

Feynman 伝播関数は Wightman 関数を用いて

$$\begin{aligned} & \langle 0|T[O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x)O_{\nu_1 \dots \nu_l}(0)]|0\rangle \\ &= \theta(x^0)\langle 0|O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x)O_{\nu_1 \dots \nu_l}(0)|0\rangle + \theta(-x^0)\langle 0|O_{\nu_1 \dots \nu_l}(0)O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x)|0\rangle \end{aligned}$$

と定義される。その Fourier 変換を

$$\langle 0|T[O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x)O_{\nu_1 \dots \nu_l}(0)]|0\rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} D_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}(k)$$

で定義する。

スカラー場の場合

$$\begin{aligned} \langle 0|T[O(x)O(0)]|0\rangle &= \theta(x^0)\frac{1}{(x^2 + 2i\epsilon x^0)^\Delta} + \theta(-x^0)\frac{1}{(x^2 - 2i\epsilon x^0)^\Delta} \\ &= \frac{1}{(x^2 + i\epsilon)^\Delta} \end{aligned}$$

となる。このとき、最後の式で $2\epsilon|x^0|$ を単に ϵ と書き換えている。この式の Fourier 変換は

$$D(k) = -i(2\pi)^2 \frac{\Gamma(2-\Delta)}{4^{\Delta-1}\Gamma(\Delta)} (k^2 - i\epsilon)^{\Delta-2}$$

で与えられる。

同様にプライマリーベクトル場の場合は

$$\langle 0|T[O_\mu(x)O_\nu(0)]|0\rangle = \frac{1}{2\Delta} \left\{ \frac{1}{2(\Delta-2)} \eta_{\mu\nu} \partial^2 - \frac{1}{\Delta-1} \partial_\mu \partial_\nu \right\} \frac{1}{(x^2 + i\epsilon)^{\Delta-1}}$$

で与えられ、その Fourier 変換はスカラー場の結果を代入するとすぐに求まって

$$D_{\mu,\nu}(k) = -i \frac{(2\pi)^2 \Gamma(2-\Delta)}{4^{\Delta-1} \Gamma(\Delta+1)} \left\{ (\Delta-1) \eta_{\mu\nu} k^2 - 2(\Delta-2) k_\mu k_\nu \right\} (k^2 - i\epsilon)^{\Delta-3}$$

となる。

プライマリースカラー場 O と外場 f との相互作用

$$I_{\text{int}} = g \int d^4x (fO + \text{H.c.})$$

を考えてみる。この相互作用による S 行列を考え、 $S = 1 + iT$ とすると、 f^\dagger から f への遷移振幅は

$$\begin{aligned} i\langle f|T|f\rangle &= -g^2 \int d^4x f^\dagger(x) \int d^4y f(y) \langle 0|T[O(x)O(y)]|0\rangle \\ &= -g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f^\dagger(k) f(k) D(k) \end{aligned}$$

で与えられる。

ユニタリ性は $S^\dagger S = 1$ より $2\text{Im}(T) = |T|^2 \geq 0$ を要求するので、

$$\text{Im}\langle f|T|f\rangle = g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} |f(k)|^2 \text{Im}\{iD(k)\} \geq 0$$

の条件が出てくる。ここで、公式 $(x+i\epsilon)^\lambda - (x-i\epsilon)^\lambda = 2i \sin(\pi\lambda)\theta(-x)(-x)^\lambda$ 及び $\sin(\pi\lambda) = \pi/\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)$ を使うと、

$$\text{Im}\{iD(k)\} = (2\pi)^2 \frac{\pi(\Delta-1)}{4^{\Delta-1}\Gamma(\Delta)^2} \theta(-k^2)(-k^2)^{\Delta-2}$$

が出てくる。右辺は Wightman 関数の Fourier 変換と同じ形をしている [$\theta(k^0)$ が無いが、全体は $1/2$ になっている]。これが正であることからユニタリ性の条件 $\Delta \geq 1$ が得られる。

2 Euclid 共形場理論

この章では Euclid 空間上での共形場理論を考える。Minkowski 時空と違って相関関数が扱いやすく、状態やその内積を場の演算子を用いて定義することが出来る。以下、Euclid 空間では時空の足はすべて下付きで書き、同一の足はクロネッカーデルタ $\delta_{\mu\nu}$ で縮約するものとする。

2.1 臨界現象と共形場理論

Ising モデルのような D 次元の古典統計系を臨界点直上で連続極限をとると D 次元 Euclid 空間上の共形場理論になる。⁵ ここでは、Euclid 共形場理論の基本的な構造について解説する前に、臨界現象との関係について簡単に触れることにする。

温度などの統計系の臨界現象を決める変数を T として、その臨界点を T_c とする。一般に、物理的な相関関数は非臨界点 $T \neq T_c$ のとき

$$\langle O(x)O(0) \rangle \sim e^{-|x|/\xi}$$

のように指数関数的に減衰する。ここで、 ξ は相関距離である。臨界点 $T = T_c$ では $\xi \rightarrow \infty$ となり、相関関数が

$$\langle O(x)O(0) \rangle = \frac{1}{|x|^{2\Delta}}$$

のように冪の振る舞いをするようになる。これは共形不変性が現れたことを示している。臨界点直上に現れた共形場理論を表す作用を S_{CFT} と書くことにする。通常、それは不明な場合がほとんどである。共形場理論は、作用に頼らず、共形不変性とユニタリ性の条件から臨界現象を理解する学問でもある。

臨界現象は、臨界点からの小さな摂動を考えたとき、臨界点への近づき方を表す指数によって分類される。例えば、共形次元が $\Delta < D$ の relevant

⁵ D 次元 Minkowski 時空上の共形場理論は $D - 1$ 次元の量子統計系が対応する。

な演算子 O による摂動を考えてみる。臨界点からのズレを無次元パラメータ $t (\ll 1)$ で表すと、作用は

$$S_{\text{CFT}} \rightarrow S_{\text{CFT}} - ta^{\Delta-D} \int d^D x O(x)$$

と変形される。ここで、 a は紫外カットオフ長さで、統計モデルに於ける格子間隔に相当する。このとき相関距離は、次元解析 $\xi^{\Delta-D} \sim ta^{\Delta-D}$ より、

$$\xi \sim at^{-1/(D-\Delta)}$$

で与えられる。⁶ 例えば、 O としてエネルギー演算子 ε を考えると、それは温度 $t = (T - T_c)/T_c$ による摂動を表す。その共形次元を Δ_ε とすると、対応する臨界指数 ν は $\xi \sim at^{-\nu}$ で定義されることから、 $\nu = 1/(D - \Delta_\varepsilon)$ の関係式が得られる。このように、共形場理論の場の演算子の次元を分類すると臨界指数、すなわち臨界現象が分類できる。種々の臨界指数の導出は付録 D を参照。

2.2 Euclid 共形場理論の基本構造

Euclid 空間 R^D での共形代数は $SO(D+1, 1)$ で与えられ、計量を $\eta_{\mu\nu}$ から $\delta_{\mu\nu}$ に置き換えれば M^D 上の場合の (1.4) と同じ形になる。共形変換則も同様に (1.7) と同じ形になる。異なる点は生成子 P_μ と D の Hermite 性が

$$P_\mu^\dagger = K_\mu, \quad D^\dagger = -D$$

に変わることである。

このことは $SO(D, 2)$ 代数の生成子 J_{ab} を用いて次のように共形代数を導出すると分かりやすい。計量 $\eta_{ab} = (-1, 1, \dots, 1, -1)$ を持つ $D+2$ 次

⁶相関距離 ξ は物理的スケールで、任意のスケール a に依らない、すなわち $d\xi/da = 0$ とすると、結合定数 t についてのベータ関数の最低次の項 $\beta = -adt/da = -(D - \Delta)t$ が得られる。

元の足 $a, b = 0, 1, \dots, D, D+1$ の内、ここでは D 次元 Euclid 空間部分を $\mu, \nu = 1, \dots, D$ と選ぶ。さらに、 $SO(D+1, 1)$ にするために 0 成分を含む生成子に虚数単位をつけて、

$$M_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}, \quad D = iJ_{D+10}, \quad P_\mu = J_{\mu D+1} - iJ_{\mu 0}, \quad K_\mu = J_{\mu D+1} + iJ_{\mu 0}$$

と固定すると、 J_{ab} の代数 (1.5) 及びその Hermite 性から上述の Euclid 空間での共形代数及び Hermite 性が得られる。

整数スピン l の共形次元 Δ を持つ対称トレースレスプライマリーテンソル場の二点相関関数を

$$\langle O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) O_{\nu_1 \dots \nu_l}(0) \rangle = c P_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} \frac{1}{(x^2)^\Delta}$$

と書く。 $P_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}$ はプライマリーの条件から決まる座標 x の関数で、 M^D のときと同様に Euclid 空間での $I_{\mu\nu}$ 関数

$$I_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2 \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}$$

を用いると、

$$P_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l} = \frac{1}{l!} (I_{\mu_1 \nu_1} \dots I_{\mu_l \nu_l} + \text{perms}) - \text{traces}$$

のように決まる。物理的な相関関数では係数 c は正の数でなければならない。以下では $c = 1$ と置く。

実プライマリーテンソル場の Hermite 性は共形反転

$$x_\mu \rightarrow Rx_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}$$

を用いて

$$O_{\mu_1 \dots \mu_l}^\dagger(x) = \frac{1}{(x^2)^\Delta} I_{\mu_1 \nu_1}(x) \dots I_{\mu_l \nu_l}(x) O_{\nu_1 \dots \nu_l}(Rx) \quad (2.1)$$

と定義される。

ここで、実際に、この Hermite 性が生成子の Hermite 性と矛盾しないことを見る。例えばプライマリースカラー場の共形変換 $i[P_\mu, O(x)] = \partial_\mu O(x)$

を考えると、その Hermite 共役は $i[P_\mu^\dagger, O^\dagger(x)] = \partial_\mu O^\dagger(x)$ となる。Hermite 共役場は、新しい座標 $y_\mu = x_\mu/x^2$ を導入すると、 $O^\dagger(x) = (y^2)^\Delta O(y)$ と書けるので、共形変換の Hermite 共役は $P_\mu^\dagger = K_\mu$ を代入すると

$$\begin{aligned} i(y^2)^\Delta [K_\mu, O(y)] &= \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \left\{ (y^2)^\Delta O(y) \right\} \\ &= (y^2)^\Delta \left(y^2 \partial_\mu - 2y_\mu y_\nu \partial_\nu - 2\Delta y_\mu \right) O(y) \end{aligned}$$

となる。両辺の $(y^2)^\Delta$ を除くとこれはプライマリースカラー場 O の特殊共形変換である。同様に共形変換 $i[D, O(x)] = (x_\mu \partial_\mu + \Delta)O(x)$ の Hermite 共役を考えると、Hermite 性 $D^\dagger = -D$ と矛盾しないことが分かる。

プライマリーベクトル場の場合はもう少し複雑になるが同じである。 $I_{\mu\nu}(x) = I_{\mu\nu}(y)$ に注意して、 $i[P_\mu, O_\nu(x)] = \partial_\mu O_\nu(x)$ の Hermite 共役を考えると

$$\begin{aligned} i(y^2)^\Delta I_{\nu\lambda} [K_\mu, O_\lambda(y)] &= \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \left\{ (y^2)^\Delta I_{\nu\lambda} O_\lambda(y) \right\} \\ &= (y^2)^\Delta \left\{ I_{\nu\lambda} \left(y^2 \partial_\mu - 2y_\mu y_\sigma \partial_\sigma - 2\Delta y_\mu \right) O_\lambda(y) \right. \\ &\quad \left. + \left(-2\delta_{\mu\nu} y_\lambda - 2\delta_{\mu\lambda} y_\nu + 4 \frac{y_\mu y_\nu y_\lambda}{y^2} \right) O_\lambda(y) \right\} \end{aligned}$$

を得る。 $I_{\mu\lambda} I_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}$ に注意して両辺の余分な関数を取り除くとプライマリーベクトル場に対する特殊共形変換 $i[K_\mu, O_\lambda(y)] = (y^2 \partial_\mu - 2y_\mu y_\sigma \partial_\sigma - 2\Delta y_\mu + 2iy_\sigma \Sigma_{\mu\sigma}) O_\lambda(y)$ が得られる。ここで、スピン項は $i\Sigma_{\mu\sigma} O_\lambda = -\delta_{\mu\lambda} O_\sigma + \delta_{\lambda\sigma} O_\mu$ で与えられる。

共形反転を使って $O_{\mu_1 \dots \mu_l}$ とその共役演算子 $O_{\mu_1 \dots \mu_l}^\dagger$ との相関関数を考える。例えばプライマリースカラー場の場合は $Rx^2 = 1/x^2$ から

$$\langle O^\dagger(x) O(0) \rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta} \langle O(Rx) O(0) \rangle = 1$$

となって、座標 x に依らず正定値となる ($c = 1$ としている)。プライマリーベクトル場、テンソル場のときも同様に $I_{\mu\lambda} I_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}$ を用いると

$$\begin{aligned} \langle O_\mu^\dagger(x) O_\nu(0) \rangle &= \delta_{\mu\nu}, \\ \langle O_{\mu\nu}^\dagger(x) O_{\lambda\sigma}(0) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda} - \frac{2}{D} \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma} \right) \end{aligned}$$

となる。これらの性質により Euclid 空間では場の演算子を用いて状態を定義することが出来る。

プライマリー状態は共形変換の生成子に対して条件式

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}|\{\mu_1 \cdots \mu_l\}, \Delta\rangle &= (\Sigma_{\mu\nu})_{\nu_1 \cdots \nu_l, \mu_1 \cdots \mu_l} |\{\nu_1 \cdots \nu_l\}, \Delta\rangle, \\ iD|\{\mu_1 \cdots \mu_l\}, \Delta\rangle &= \Delta|\{\mu_1 \cdots \mu_l\}, \Delta\rangle, \\ K_\mu|\{\mu_1 \cdots \mu_l\}, \Delta\rangle &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものである。この状態は場の演算子を用いて⁷

$$|\{\mu_1 \cdots \mu_l\}, \Delta\rangle = O_{\mu_1 \cdots \mu_l}(0)|0\rangle \quad (2.2)$$

と定義することができる。この関係を状態演算子対応 (state-operator correspondence) と呼ぶ。ここで、真空 $|0\rangle$ は共形変換の生成子を用いて作用させるとすべて消える状態として定義される。この状態に P_μ を作用させて得られる状態をそのデッセンダントと呼ぶ。

この状態の Hermite 共役は、 $y_\mu = Rx_\mu$ として、 $I_{\mu\nu}(x) = I_{\mu\nu}(y)$ に注意すると原点での演算子の Hermite 共役が

$$\begin{aligned} O_{\mu_1 \cdots \mu_l}^\dagger(0) &= \lim_{x^2 \rightarrow 0} (x^2)^{-\Delta} I_{\mu_1 \nu_1} \cdots I_{\mu_l \nu_l} O_{\nu_1 \cdots \nu_l}(Rx) \\ &= \lim_{y^2 \rightarrow \infty} (y^2)^\Delta I_{\mu_1 \nu_1} \cdots I_{\mu_l \nu_l} O_{\nu_1 \cdots \nu_l}(y) \end{aligned}$$

と書けることから、プライマリー状態 (2.2) の共役状態は

$$\begin{aligned} \langle \{\mu_1 \cdots \mu_l\}, \Delta | &= \langle 0 | O_{\mu_1 \cdots \mu_l}^\dagger(0) \\ &= \lim_{x^2 \rightarrow \infty} (x^2)^\Delta I_{\mu_1 \nu_1} \cdots I_{\mu_l \nu_l} \langle 0 | O_{\nu_1 \cdots \nu_l}(x) \end{aligned}$$

と定義される。このときノルムの正定値性は任意の対称トレースレステンソル $f_{\mu_1 \cdots \mu_l}$ を用いて

$$\begin{aligned} (f, f) &= f_{\mu_1 \cdots \mu_l}^\dagger f_{\nu_1 \cdots \nu_l} \langle \{\mu_1 \cdots \mu_l\}, \Delta | \{\nu_1 \cdots \nu_l\}, \Delta \rangle \\ &= |f_{\mu_1 \cdots \mu_l}|^2 > 0 \end{aligned}$$

と表される。

⁷Minkowski 時空上ではこの対応は使えない。なぜならノルムが定義できないからである。実際、スカラー状態 $|\Delta\rangle = O(0)|0\rangle$ のノルムを考えると、 M^D 上では $O^\dagger(x) = O(x)$ なので、 $\langle \Delta | \Delta \rangle = \langle 0 | O^\dagger(0) O(0) | 0 \rangle = \langle 0 | O(0) O(0) | 0 \rangle$ となって、これは発散する。

2.3 二点相関関数の再導出

この節では共形代数と Hermite 性を用いてプライマリースカラー場の R^D 上での二点相関関数を再導出してみる。スカラー場の座標依存性は並進の生成子を用いて

$$O(x) = e^{iP_\mu x_\mu} O(0) e^{-iP_\mu x_\mu}$$

と表される。この Hermite 共役は $P_\mu^\dagger = K_\mu$ より、

$$O^\dagger(x) = e^{iK_\mu x_\mu} O(\infty) e^{-iK_\mu x_\mu}$$

で与えられる。ここで、 $O(\infty) = O^\dagger(0) = \lim_{x^2 \rightarrow \infty} (x^2)^\Delta O(x)$ である。

相関関数はこれらの式と場の Hermite 性 (2.1) を用いると

$$\langle O(x)O(x') \rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta} \langle O^\dagger(Rx)O(x') \rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta} \langle \Delta | e^{-iK_\mu(Rx)_\mu} e^{iP_\nu x'_\nu} | \Delta \rangle$$

と表すことができる。プライマリー状態はそれぞれ $|\Delta\rangle = O(0)|0\rangle$ と $\langle \Delta| = \langle 0|O(\infty)$ である。指数関数を展開して評価すると、 K_μ と P_ν の数が等しいときにのみ値を持つことが分かるので、上の式は

$$\langle O(x)O(x') \rangle = \frac{1}{(x^2)^\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\Delta(x, x') \left(\frac{x'^2}{x^2} \right)^{n/2}$$

と表すことができる。展開の係数 C_n^Δ は

$$C_n^\Delta = \frac{1}{(n!)^2} \frac{x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_n} x'_{\nu_1} \cdots x'_{\nu_n}}{(x^2 x'^2)^{n/2}} \langle \Delta | K_{\mu_1} \cdots K_{\mu_n} P_{\nu_1} \cdots P_{\nu_n} | \Delta \rangle$$

で定義される。共形代数を用いて生成子の数を減らしていくと、Gegenbauer の多項式が満たす漸化式

$$nC_n^\Delta = 2(\Delta + n - 1)zC_{n-1}^\Delta - (2\Delta + n - 2)C_{n-2}^\Delta$$

が得られる。ここで、 $z = x \cdot x' / \sqrt{x^2 x'^2}$ である。これより C_n^Δ は変数 z を持つ Gegenbauer の多項式 ($\Delta = 1/2$ は Legendre の多項式) であることが分かる。母関数の公式

$$\frac{1}{(1 - 2zt + t^2)^\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\Delta(z) t^n$$

を使って、 z と $t = \sqrt{x'^2/x^2}$ を代入すると、良く知られた相関関数の式 $\langle O(x)O(x') \rangle = 1/(x - x')^{2\Delta}$ が得られる。

2.4 演算子積 (OPE) と三点相関関数

この節ではプライマリースカラー場 ϕ の演算子積 (operator product expansion, OPE) について考える。積の右辺に現れる場は $\phi \times \phi \sim I + T_{\mu\nu} + \sum_{l=0,2,4,\dots} O_{\mu_1 \dots \mu_l}$ と表すことができる。ここで、 I は単位演算子、 $T_{\mu\nu}$ はストレステンソル (スピン 2、共形次元 D のプライマリー場) である。 $O_{\mu_1 \dots \mu_l}$ は整数スピン l を持ったプライマリー場で、スカラー場の OPE には偶数スピンの場しか現れない。これらプライマリー場のほかにそのデッセンダント (プライマリー場の微分) も現れる。

プライマリースカラー場 ϕ とスピン l のプライマリーテンソル場の共形次元をそれぞれ d と Δ とし、それらの 2 点相関関数を

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle &= \frac{1}{|x_{12}|^{2d}}, \\ \langle O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x_1) O_{\nu_1 \dots \nu_l}(x_2) \rangle &= \frac{1}{|x_{12}|^{2\Delta}} \left[\frac{1}{l!} (I_{\mu_1 \nu_1} \cdots I_{\mu_l \nu_l} + \text{perms}) - \text{traces} \right] \end{aligned}$$

と規格化する。ここで、 $(x_{12})_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu}$ 、 $I_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}(x_{12})$ である。また、三点相関関数の形は共形不変性より、全体の係数を除いて決まる。それを $f_{\Delta,l}$ として、

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1) \phi(x_2) O_{\mu_1 \dots \mu_l}(x_3) \rangle &= \frac{f_{\Delta,l}}{|x_{12}|^{2d-\Delta+l} |x_{13}|^{\Delta-l} |x_{23}|^{\Delta-l}} (Z_{\mu_1} \cdots Z_{\mu_l} - \text{traces}), \\ Z_\mu &= \frac{(x_{13})_\mu}{x_{13}^2} - \frac{(x_{23})_\mu}{x_{23}^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

と規格化する。 $f_{\Delta,l}$ のことを構造係数又は OPE 係数と呼ぶ。

プライマリースカラー場 ϕ 同士の OPE は

$$\begin{aligned} \phi(x) \phi(y) &= \frac{1}{|x-y|^{2d}} + \sum_{\Delta, l(=2n)} f_{\Delta,l} \left[\frac{(x-y)_{\mu_1} \cdots (x-y)_{\mu_l}}{|x-y|^{2d-\Delta+l}} O_{\mu_1 \dots \mu_l}(y) + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{|x-y|^{2d}} + \sum_{\Delta, l(=2n)} \frac{f_{\Delta,l}}{|x-y|^{2d-\Delta}} C_{\Delta,l}(x-y, \partial_y) O_{\Delta,l}(y) \end{aligned}$$

と表される。二列目の式では、スピン l のプライマリーテンソル場を $O_{\Delta,l}(y)$ と簡略化した。一列目のドット及び係数 $C_{\Delta,l}(x-y, \partial_y)$ の中の微分演算子はそのデッセンダントからの寄与を表す。

ここでは、 $l = 0$ の場合の係数 $C_{\Delta,0}$ を求める。OPE の両辺に $O = O_{\Delta,0}$ を作用させて期待値を取ると、

$$\langle \phi(x)\phi(y)O(z) \rangle = \frac{f_{\Delta,0}}{|x-y|^{2d-\Delta}} C_{\Delta,0}(x-y, \partial_y) \langle O(y)O(z) \rangle$$

を得る。これより、関係式

$$C_{\Delta,0}(x-y, \partial_y) \frac{1}{|y-z|^{2\Delta}} = \frac{1}{|x-z|^\Delta |y-z|^\Delta}$$

が導かれる。この式の右辺を Feynmann パラメータ積分公式を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\frac{\Delta}{2})\Gamma(\frac{\Delta}{2})} \int_0^1 dt \frac{[t(1-t)]^{\frac{\Delta}{2}-1}}{[t(x-z)^2 + (1-t)(y-z)^2]^\Delta} \\ &= \frac{1}{B(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})} \int_0^1 dt [t(1-t)]^{\frac{\Delta}{2}-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta)_n}{n!} \frac{[-t(1-t)(x-y)^2]^n}{([y-z+t(x-y)]^2)^{\Delta+n}} \end{aligned}$$

と書ける。 $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号である。さらに、

$$\begin{aligned} (\partial^2)^n \frac{1}{(x^2)^\Delta} &= 4^n (\Delta)_n (\Delta+1-D/2)_n \frac{1}{(x^2)^{\Delta+n}}, \\ \frac{1}{[(y+tx)^2]^\Delta} &= e^{tx \cdot \partial_y} \frac{1}{(y^2)^\Delta} \end{aligned}$$

を使って、 $1/|y-z|^{2\Delta}$ を y で微分する形に書き換える。それが左辺のように表されることから

$$\begin{aligned} C_{\Delta,0}(x-y, \partial_y) &= \frac{1}{B(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})} \int_0^1 dt [t(1-t)]^{\frac{\Delta}{2}-1} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} \frac{[t(1-t)a^2]^n}{(\Delta+1-D/2)_n} (\partial_y^2)^n e^{ta \cdot \partial_y} \Big|_{a=x-y} \end{aligned}$$

を得る。最初の数項を書き出すと

$$\begin{aligned} C_{\Delta,0}(x-y, \partial_y) &= 1 + \frac{1}{2}(x-y)_\mu \partial_\mu^y + \frac{\Delta+2}{8(\Delta+1)}(x-y)_\mu (x-y)_\nu \partial_\mu^y \partial_\nu^y \\ &\quad - \frac{\Delta}{16(\Delta+1)(\Delta+1-D/2)}(x-y)^2 \partial_y^2 + \dots \end{aligned}$$

となる。

同様にして三点相関関数の式 (2.3) から $l \neq 0$ の場合も計算することができる。

2.5 四点相関関数と Conformal Blocks

この節ではスカラー場の四点相関関数の性質について議論する。共形次元 Δ_j をもつプライマリースカラー場 ϕ_j の四点相関関数は共形対称性より

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4) \rangle = \left(\frac{|x_{24}|}{|x_{14}|} \right)^{\Delta_{12}} \left(\frac{|x_{14}|}{|x_{13}|} \right)^{\Delta_{34}} \frac{G(u, v)}{|x_{12}|^{\Delta_1+\Delta_2}|x_{34}|^{\Delta_3+\Delta_4}}$$

の形まで簡単化することができる。ここで、 $\Delta_{ij} = \Delta_i - \Delta_j$ 、変数 u と v は

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}$$

で定義されている。

この式は ϕ_1 と ϕ_2 の間で OPE を取った形をしている。一方で、 ϕ_1 と ϕ_4 の間で OPE を取っても答えは変わらないはずである。このことから右辺は (x_2, Δ_2) と (x_4, Δ_4) を入れ替えても結果は変わらない。同様に、 (x_2, Δ_2) と (x_3, Δ_3) を入れ替えても結果は変わらない。この性質を交差対称性 (crossing symmetry) と呼ぶ。これより、 $G(u, v)$ は $G(v, u)$ や $G(1/u, v/u)$ で表すことができる。

簡単のため以下では $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$ の場合を考える。OPE の単位演算子に比例する部分を抜き出して $G(u, v) = 1 + \sum_{\Delta, l} f_{\Delta, l}^2 g_{\Delta, l}(u, v)$ と書くと、共形次元 d をもつプライマリースカラー場 ϕ_d 同士の四点相関関数は

$$\langle \phi_d(x_1)\phi_d(x_2)\phi_d(x_3)\phi_d(x_4) \rangle = \frac{1}{|x_{12}|^{2d}|x_{34}|^{2d}} \left[1 + \sum_{\Delta, l} f_{\Delta, l}^2 g_{\Delta, l}(u, v) \right]$$

と書ける。ここで、 $g_{\Delta, l}(u, v)$ は conformal block と呼ばれる関数である。 x_2 と x_4 の入れ替えからくる交差関係式 $v^d G(u, v) = u^d G(v, u)$ より、conformal block は

$$u^d - v^d = \sum_{\Delta, l} f_{\Delta, l}^2 \left[v^d g_{\Delta, l}(u, v) - u^d g_{\Delta, l}(v, u) \right] \quad (2.4)$$

を満たす。

Conformal block $g_{\Delta,l}$ を OPE から計算する。中間状態としてスカラー ($l = 0$) が飛ぶ場合からの寄与は前節で計算した OPE を使って

$$g_{\Delta,0}(u, v) = |x_{12}|^\Delta |x_{34}|^\Delta C_{\Delta,0}(x_{12}, \partial_2) C_{\Delta,0}(x_{34}, \partial_4) \frac{1}{|x_{24}|^{2\Delta}}$$

と表すことができる。右辺を計算すると

$$\begin{aligned} C_{\Delta,0}(x_{12}, \partial_2) C_{\Delta,0}(x_{34}, \partial_4) \frac{1}{|x_{24}|^{2\Delta}} &= \frac{1}{B(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})^2} \int_0^1 dt ds [t(1-t)s(1-s)]^{\frac{\Delta}{2}-1} \\ &\times \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!m!} \frac{(\Delta)_{n+m} (\tilde{\Delta})_{n+m}}{(\tilde{\Delta})_n (\tilde{\Delta})_m} \frac{[t(1-t)x_{12}^2]^n [s(1-s)x_{34}^2]^m}{[(x_{24} + tx_{12} - sx_{34})^2]^{\Delta+n+m}} \end{aligned}$$

となる。ここでは $\tilde{\Delta} = \Delta + 1 - D/2$ と書くことにする。さらに、 $A^2 = t(1-t)x_{12}^2$ 、 $B^2 = s(1-s)x_{34}^2$ とすると、

$$\begin{aligned} (x_{24} + tx_{12} - sx_{34})^2 &= \Lambda^2 - A^2 - B^2, \\ \Lambda^2 &= tsx_{13}^2 + t(1-s)x_{14}^2 + s(1-t)x_{23}^2 + (1-t)(1-s)x_{24}^2 \end{aligned}$$

と書けるので、これらの変数を使って右辺を書き換えると

$$\frac{1}{B(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})^2} \int_0^1 dt ds \frac{[t(1-t)s(1-s)]^{\frac{\Delta}{2}-1}}{(\Lambda^2 - A^2 - B^2)^\Delta} F_4(\Delta, \tilde{\Delta}; \tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}; X, Y)$$

となる。ここで $X = -A^2/(\Lambda^2 - A^2 - B^2)$ 、 $Y = -B^2/(\Lambda^2 - A^2 - B^2)$ である。 F_4 は Appell 関数と呼ばれる変数を二つ持つ超幾何級数 (double series) で、

$$F_4(a, b; c, d; x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{(a)_{n+m} (b)_{n+m}}{(c)_n (d)_m} x^n y^m$$

と定義される。この関数は Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ と

$$F_4(a, b; b, b; x, y) = (1-x-y)^{-a} {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}; b; \frac{4xy}{(1-x-y)^2}\right)$$

ように関係しているので、これを使うと

$$\frac{1}{B(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})^2} \int_0^1 dt ds \frac{[t(1-t)s(1-s)]^{\frac{\Delta}{2}-1}}{(\Lambda^2)^\Delta} {}_2F_1\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta+1}{2}; \tilde{\Delta}; \frac{4A^2B^2}{\Lambda^4}\right)$$

と書くことが出来る。最後に t と s のパラメータ積分を、公式

$$\int_0^1 dt \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{[t\alpha + (1-t)\beta]^{a+b}} = \frac{1}{\alpha^a \beta^b} B(a, b),$$

$$\int_0^1 ds \frac{s^{a-1}(1-s)^{b-1}}{(1-s\alpha)^c (1-s\beta)^d} = B(a, b) F_1(a, c, d; a+b; \alpha, \beta)$$

を使って順次行う。ここで、 F_1 は変数を二つ持つ新たな超幾何級数

$$F_1(a, b, c, d; x, y) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} \frac{(a)_{n+m} (b)_n (c)_m}{(d)_{n+m}} x^n y^m$$

で、特別な場合、Gauss の超幾何級数と

$$F_1(a, b, c, b+c; x, y) = (1-y)^{-a} {}_2F_1\left(a, b; b+c; \frac{x-y}{1-y}\right)$$

の関係がある。これらを使うと

$$\frac{1}{|x_{13}| |x_{24}|^\Delta} v'^{\frac{\Delta}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u'^n}{n!} \frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)_n^4}{(\Delta)_{2n} (\Delta)_n} {}_2F_1\left(\frac{\Delta}{2} + n, \frac{\Delta}{2} + n; \Delta + 2n; 1 - v'\right)$$

を得る。ここで、 $u' = u/v$ 、 $v' = 1/v$ である。係数 $(\Delta)_{2n}$ は関係式 $4^n \left(\frac{\Delta}{2}\right)_n \left(\frac{\Delta+1}{2}\right)_n = (\Delta)_{2n}$ に由来する。

さらに新たな二変数の超幾何級数

$$G(a, b, c, d; x, y) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{(d-a)_n (d-b)_n}{n! (c)_n} \frac{(a)_{n+m} (b)_{n+m}}{m! (d)_{2n+m}} x^n y^m$$

を導入して $g_{\Delta,0}$ を書き換える。その際、 $\left(\frac{\Delta}{2} + n\right)_m = \left(\frac{\Delta}{2}\right)_{n+m} / \left(\frac{\Delta}{2}\right)_n$ 、 $(\Delta + 2n)_m = (\Delta)_{2n+m} / (\Delta)_{2n}$ を使う。四点相関関数は $x_3 \leftrightarrow x_4$ の下で不変である、すなわち $g_{\Delta,l}(u, v) = g_{\Delta,l}(u', v')$ であることから、 $g_{\Delta,0}$ を求めた後に変数を u' と v' から u と v に書き換えると最終的に

$$g_{\Delta,0}(u, v) = u^{\frac{\Delta}{2}} G\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}, \Delta + 1 - \frac{D}{2}, \Delta; u, 1 - v\right)$$

を得る。

偶数次元の場合は conformal block $g_{\Delta,l}$ を Gauss の超幾何級数の積で表すことが出来る。新しい座標変数

$$u = z\bar{z}, \quad v = (1-z)(1-\bar{z})$$

を導入して、公式

$$G(a, b, c-1, c; u, 1-v) = \frac{1}{z-\bar{z}} \left[z {}_2F_1(a, b; c; z) {}_2F_1(a-1, b-1; c-2; \bar{z}) - \bar{z} {}_2F_1(a, b; c; \bar{z}) {}_2F_1(a-1, b-1; c-2; z) \right]$$

を使う。Gauss の超幾何級数で定義された関数

$$k_\beta(x) = x^{\frac{\beta}{2}} {}_2F_1\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}, \beta; x\right) \quad (2.5)$$

を導入すると、例えば $D=4$ では

$$g_{\Delta,0}(u, v)|_{D=4} = \frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}} [k_\Delta(z)k_{\Delta-2}(\bar{z}) - (z \leftrightarrow \bar{z})]$$

と書くことができる。

スピンが $l \geq 1$ の場合も複雑ではあるが同様に OPE から求めることができる。一般の l についての conformal blocks は l についての漸化式を立てて求めることができる。結果だけを書くと、 $D=4$ の場合、

$$g_{\Delta,l}(u, v)|_{D=4} = \frac{(-1)^l}{2^l} \frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}} [k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l-2}(\bar{z}) - (z \leftrightarrow \bar{z})] \quad (2.6)$$

で与えられる。また、2次元の場合一般式は

$$g_{\Delta,l}(u, v)|_{D=2} = \frac{(-1)^l}{2^l} [k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l}(\bar{z}) + (z \leftrightarrow \bar{z})] \quad (2.7)$$

で与えられる。一方、 $D=3$ では l が小さい場合の式は求められているが、一般式はまだ $z = \bar{z}$ のような特別な場合しか知られていない。

2.6 Casimir 演算子と Conformal Blocks

この節では、conformal block が満たす微分方程式を Casimir 演算子を使って求め、その解を調べる。

共形代数 $SO(D+1, 1)$ の生成子 J_{ab} と交換する 2 次の Casimir 演算子 $C_2 = \frac{1}{2} J^{ab} J_{ab}$ を考える。共形変換の生成子を用いて書くと

$$C_2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M_{\mu\nu} - D^2 - \frac{1}{2} (K_\mu P_\mu + P_\mu K_\mu)$$

となる。プライマリー状態はこの演算子の固有状態である。スピン l 、共形次元 Δ の場合は

$$C_2|\Delta, l\rangle = C_{\Delta, l}|\Delta, l\rangle, \quad C_{\Delta, l} = \Delta(\Delta - D) + l(l + D - 2)$$

となる。

ここでは四つの異なるプライマリースカラー場の相関関数を考える。 $|\Delta, l\rangle$ の第 n デッセンダントを $|n; \Delta, l\rangle$ と表して、完全形を挟むとそれは

$$\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)\rangle = \sum_{\Delta, l, n} \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|n; \Delta, l\rangle \langle n; \Delta, l|\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)|0\rangle$$

と書ける。そこで、関係式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle 0|[J_{ab}, [J^{ab}, \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)]]|n; \Delta, l\rangle &= \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)C_2|n; \Delta, l\rangle \\ &= C_{\Delta, l}\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|n; \Delta, l\rangle \end{aligned}$$

を考えることにする。この時、 C_2 は P_μ と交換することから右辺の固有値は n に依らないことに注意する。スカラー場の共形変換の式を用いて左辺を書き換えると、左辺は

$$\begin{aligned} &\left\{ (x_{12}^2 \partial_\mu^1 \partial_\mu^2 - 2(x_{12})_\mu (x_{12})_\nu \partial_\mu^1 \partial_\nu^2 - 2\Delta_1 (x_{12})_\mu \partial_\mu^2 + 2\Delta_2 (x_{12})_\mu \partial_\mu^1 \right. \\ &\quad \left. + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 + \Delta_2 - D) \right\} \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|n; \Delta, l\rangle \end{aligned}$$

と書ける。

一方、中間状態が $O_{\Delta, l}$ で与えられる四点相関関数の conformal block を前節と同じように $g_{\Delta, l}$ と書くと、その部分は

$$\begin{aligned} &\sum_n \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|n; \Delta, l\rangle \langle n; \Delta, l|\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)|0\rangle \\ &= \left(\frac{x_{24}^2}{x_{14}^2} \right)^{\Delta_{12}/2} \left(\frac{x_{14}^2}{x_{13}^2} \right)^{\Delta_{34}/2} \frac{f_{\Delta, l}^2 g_{\Delta, l}(u, v)}{(x_{12}^2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2} (x_{34}^2)^{(\Delta_3 + \Delta_4)/2}} \end{aligned}$$

と表される。このことを使うと、最終的に conformal block が満たす微分方程式は

$$\mathcal{D}g_{\Delta, l}(u, v) = \frac{1}{2}C_{\Delta, l}g_{\Delta, l}(u, v),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= (1-u+v)u \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial}{\partial u} \right) + [(1-v)^2 - u(1+v)] \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
&\quad - 2(1+u-v)uv \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - Du \frac{\partial}{\partial u} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\Delta_{12} - \Delta_{34}) \left[(1+u-v) \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right) - (1-u-v) \frac{\partial}{\partial v} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \Delta_{12} \Delta_{34} (1+u-v)
\end{aligned}$$

で与えられる。

さらに、座標変数を z と \bar{z} に変換すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= z^2(1-z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \bar{z}^2(1-\bar{z}) \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + \frac{1}{2} (\Delta_{12} - \Delta_{34} - 2) \left(z^2 \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \Delta_{12} \Delta_{34} (z + \bar{z}) + (D-2) \frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}} \left((1-z) \frac{\partial}{\partial z} - (1-\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)
\end{aligned}$$

と書ける。この微分方程式の $D = 4, 2$ の解はそれぞれ (2.6) と (2.7) で、関数 (2.5) を

$$k_\beta(x) = x^{\frac{\beta}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\Delta_{12}}{2}, \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta_{34}}{2}; \beta; x \right)$$

と置き換えたものになる。

2.7 ユニタリ性バウンドの再考

先に定義した状態を用いて、ユニタリ性の条件 (1.10) について再考する。ここでは、具体的に $D = 4$ の場合を考える。

例えば、プライマリーベクトル状態 $|\mu, \Delta\rangle$ を考える。ユニタリ性からその内積は正定値でなければならない。それを $\langle \Delta', \mu | \nu, \Delta \rangle = \delta_{\Delta' \Delta} \delta_{\mu \nu}$ と規格化する。ユニタリ性はさらにそのデッセンダントもまた正定値であることを要求する。第一デッセンダント状態 $|\mu; \nu, \Delta\rangle = P_\mu |\nu, \Delta\rangle$ を考えると、その内積は共形代数を使って計算すると

$$\begin{aligned}
\langle \mu; \lambda, \Delta' | \nu; \sigma, \Delta \rangle &= \langle \lambda, \Delta' | [K_\mu, P_\nu] | \sigma, \Delta \rangle \\
&= \langle \lambda, \Delta' | 2i (D\delta_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}) | \sigma, \Delta \rangle \\
&= 2\delta_{\Delta' \Delta} (\Delta\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\lambda}\delta_{\mu\sigma})
\end{aligned}$$

となる。ここで、Hermiticity $P_\mu^\dagger = K_\mu$ 、プライマリーの条件 $K_\mu|\nu, \Delta\rangle = \langle\nu, \Delta|P_\mu = 0$ 及び $\langle\lambda, \Delta|M_{\mu\nu}|\sigma, \Delta\rangle = (\Sigma_{\mu\nu})_{\lambda\sigma}$ を使った。これは、足の組を $a = (\mu, \lambda)$ 、 $b = (\nu, \sigma)$ とすると、 16×16 の行列 $\langle a|b\rangle$ と表され、その固有値は3種類で、 $2(\Delta - 3)$ が一つ、 $2(\Delta - 1)$ が六つ、 $2(\Delta + 1)$ が九つ出てくる。これらがすべて正であることから $\Delta \geq 3$ が出てくる。

ここではより一般的に回転群 $SO(4)$ の表現を $\{r\}$ とし議論を進める。その表現に属するプライマリー状態を $|\{r\}, \Delta\rangle$ と表すと、プライマリーの条件は

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}|\{r\}, \Delta\rangle &= (\Sigma_{\mu\nu})_{\{r'\}, \{r\}} |\{r'\}, \Delta\rangle, \\ iD|\{r\}, \Delta\rangle &= \Delta|\{r\}, \Delta\rangle, \\ K_\mu|\{r\}, \Delta\rangle &= 0 \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $SO(4)$ は $SU(2) \times SU(2)$ と表されることから左右の $SU(2)$ のスピンを j_1, j_2 とすると、表現 $\{r\}$ はその組み合わせ (j_1, j_2) で表すことが出来て、その次元は $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ となる。例えば、整数スピン l のトレースレス対称テンソル場 $O_{\mu_1 \dots \mu_l}$ は $j_1 = j_2 = l/2$ で与えられる。

プライマリー状態に P_μ を n 回作用させて生成される状態を第 n デッセンダントと呼び、

$$|\mu_1 \dots \mu_n; \{r\}, \Delta\rangle = P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} |\{r\}, \Delta\rangle$$

と表す。プライマリー状態の内積が正定値で $\langle\{r'\}, \Delta'|\{r\}, \Delta\rangle = \delta_{\{r'\}\{r\}} \delta_{\Delta'\Delta}$ と規格化されているとすると、ユニタリ性はそのデッセンダントもすべて正定値であることを要求する。

前と同様に第一デッセンダント状態 $|\mu; \{r\}, \Delta\rangle = P_\mu |\{r\}, \Delta\rangle$ の内積を計算すると

$$\langle\mu; \{r'\}, \Delta'|\nu; \{r\}, \Delta\rangle = \delta_{\Delta'\Delta} \left(2\Delta \delta_{\{r'\}\{r\}} + 2\langle\{r'\}, \Delta|iM_{\mu\nu}|\{r\}, \Delta\rangle \right) \quad (2.8)$$

を得る。ここで、Lorentz 生成子が

$$iM_{\mu\nu} = i\frac{1}{2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}$$

と書けることを使うと、前々式の最後の項は、 $\Sigma_{\alpha\beta}$ 行列をベクトル状態 $|\mu\rangle$ を導入して $\langle\mu|M_{\alpha\beta}^{\{v\}}|\nu\rangle = (\Sigma_{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ と表すと、

$$2\langle\{r'\}, \Delta|iM_{\mu\nu}|\{r\}, \Delta\rangle = \langle\mu|\otimes\langle\{r'\}, \Delta|M_{\alpha\beta}^{\{v\}}\cdot M_{\alpha\beta}^{\{r\}}|\{r\}, \Delta\rangle\otimes|\nu\rangle \quad (2.9)$$

と書ける。これは、角運動量の合成のときと同じように解くことが出来る。 $M_{\alpha\beta}^{\{R\}} = M_{\alpha\beta}^{\{v\}} + M_{\alpha\beta}^{\{r\}}$ とすると

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^{\{v\}}\cdot M_{\alpha\beta}^{\{r\}} &= \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}^{\{R\}}\cdot M_{\alpha\beta}^{\{R\}} - \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}^{\{v\}}\cdot M_{\alpha\beta}^{\{v\}} - \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}^{\{r\}}\cdot M_{\alpha\beta}^{\{r\}} \\ &= c_2(\{R\}) - c_2(\{v\}) - c_2(\{r\}) \end{aligned}$$

ここで、 c_2 は $SO(4)$ 回転群の二次 Casimir 演算子である。任意の表現 $\{r\}$ を $SU(2) \times SU(2)$ の表示を使って (j_1, j_2) と表すと、ベクトル表現 $\{v\}$ は $(1/2, 1/2)$ となる。合成された状態の表現 $\{R\}$ は (J_1, J_2) で表される。ここで、 $J_{1,2}$ は $j_{1,2} \pm 1/2$ の値を取る。これより、行列 (2.9) の固有値は二次 Casimir の値をそれぞれ代入すると $2J_1(J_1+1) + 2J_2(J_2+1) - 3 - 2j_1(j_1+1) - 2j_2(j_2+1)$ となる。この結果を使って第一デッセンダント状態の内積 (2.8) の固有値を求めることが出来る。

ここで知りたいのは内積 (2.8) の最小の固有値である。それが正であることがユニタリ性の条件になる。以下、場合分けしてそれを調べることにする。 $j_1, j_2 \neq 0$ の場合、内積 (2.8) は $J_1 = j_1 - 1/2, J_2 = j_2 - 1/2$ のときに最小の固有値 $2\Delta - 2(j_1 + j_2 + 2)$ をもつ。これより、ユニタリ性の条件は

$$\Delta \geq j_1 + j_2 + 2 \quad \text{for } j_1, j_2 \neq 0$$

となる。ここで、 $j_1 = j_2 = l/2$ を代入すると前節で議論したスピン l 対称トレースレスプライマリーテンソル状態の場合のユニタリ性の条件 $\Delta \geq l + 2$ が得られる。 $j_1 = 0, j_2 \neq 0$ の場合は $J_1 = 1/2, J_2 = j_2 - 1/2$ の

とき最小値 $2\Delta - 2(j_2 + 1)$ となる。これより、

$$\Delta \geq j_2 + 1 \quad \text{for } j_1 = 0, j_2 \neq 0$$

を得る。 j_1 と j_2 をひっくり返しても同様である。

$j_1 = j_2 = 0$ のプライマリースカラー状態の場合は最小固有値が 2Δ となり、 $\Delta \geq 0$ となって前節の結果とは異なる結果を得る。スカラー状態の場合はさらに第二デッセンダント状態 $P^\mu P_\mu |\Delta\rangle$ を考える必要がある。その内積を計算すると $\langle \Delta' | K^\mu K_\mu P^\nu P_\nu | \Delta \rangle = 32\Delta(\Delta - 1)\delta_{\Delta'\Delta}$ となるので、これが正であることを要求すると、

$$\Delta \geq 1 \quad \text{for } j_1 = j_2 = 0$$

を得る。

2.8 Conformal Bootstrap からの制限

内積の正定値性に由来するユニタリ性バウンドは共形次元の下限しか与えない。ここでは、四点相関関数に新たなユニタリ性の条件を加えて共形次元を制限する話を紹介する。

3.5 節で議論した同じスカラー場の四点相関関数の場合を考える。交差関係式 (2.4) より conformal block $g_{\Delta,l}$ は

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} F_{d,\Delta,l}(z, \bar{z}) &= 1, \\ F_{d,\Delta,l}(z, \bar{z}) &= \frac{v^d g_{\Delta,l}(u, v) - u^d g_{\Delta,l}(v, u)}{u^d - v^d} \end{aligned} \quad (2.10)$$

を満たす。ここで、 $p_{\Delta,l} = f_{\Delta,l}^2$ である。例えば自由スカラー場 ($d = 1$) の場合、 l は偶数のみ非ゼロになって、 $p_{\Delta,l} = \delta_{\Delta,l+2} \delta_{l,2n} 2^{l+1} (l!)^2 / (2l)!$ で与えられる。

いま実数の場の相関関数を考えているので、物理的に怪しげな事をしていなければ、OPE 係数 $f_{\Delta,l}$ は実数になるはずである。すなわち、その二乗が正であることから

$$p_{\Delta,l} \geq 0$$

となる。この正定値条件を新たに課すと OPE の右辺に現れる場の共形次元に制限が付く。以下、具体的な結果を述べた後、その計算方法を簡単に紹介する。

例えば、 $D = 4$ で共形次元 d のスカラー場同士の OPE $\phi_d \times \phi_d \sim 1 + O_\Delta + \dots$ を考えると、その右辺に現れる最も低い共形次元をもったスカラー場にたいして

$$\Delta \leq 2 + 0.7(d-1)^{1/2} + 2.1(d-1) + 0.43(d-1)^{3/2} + o((d-1)^2) \quad (2.11)$$

のように上限が求められている。この条件はこの上限より高い共形次元をもったスカラー場が存在しないといっているのではない。連続的、離散的に関わらず右辺に現れるスカラー場は幾つあってもよいが、そのうちの最低次元をもつスカラー場がこの範囲に入っていないなければならない事を示している。

同様の事を $D = 2$ で行くと、二次元共形場理論の厳密解と無矛盾な結果が得られる。例えば Ising 模型では ϕ_d はスピン演算子 σ 、 O_Δ はエネルギー演算子 ε で、それらの厳密な共形次元は離散的で、それぞれ $d = \Delta_\sigma = 1/8$ と $\Delta = \Delta_\varepsilon = 1$ で与えられる。そこで $d = 1/8$ と置いて OPE の右辺に最初に現れるスカラー場の共形次元の上限値を調べると $\Delta \leq 1$ の条件が出てくる。厳密解の値 $\Delta = 1$ はまさに許される上限値の際に現れる。さらに、その事実を使って $D = 3$ の Ising 模型の解析を行うと、格子上のモンテカルロ計算と無矛盾な結果が得られる。

その具体的な解析方法を以下に簡単に紹介する。新しい座標 $z = 1/2 + X + iY$ を導入して、 X と Y についての N 次までの微分演算子

$$\Lambda[F] = \sum_{\substack{m,n=\text{even} \\ 2 \leq m+n \leq N}} \lambda_{m,n} \partial_X^m \partial_Y^n F|_{X=Y=0}$$

を考える。ここで、 $X = Y = 0$ ($z = \bar{z} = 1/2$) の点で評価するのは、単に数値的に計算を実行する際にその点の収束性が良いからである。この演算子を (2.10) に作用させると

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \Lambda[F_{d,\Delta,l}] = 0 \quad (2.12)$$

となる。この式は、もしすべての Δ, l に対して不等式 $\Lambda[F_{d,\Delta,l}] \geq 0$ が満たされるなら、正定値の条件 $p_{\Delta,l} \geq 0$ に反することを表している。

はじめに OPE の構造が

$$\phi_d \times \phi_d \sim 1 + \sum_{\Delta \geq f} O_{\Delta} + \sum_{\substack{l > 0 \\ l = \text{even}}} \sum_{\Delta \geq D-2+l} O_{\Delta,l}$$

で与えられる場合を考える。ここで、右辺に現れるのスカラー場 O_{Δ} の共形次元にユニタリ性バウンドより強い制限 $\Delta \geq f$ を課している。一方、 $l > 0$ のテンソル場に対してはユニタリ性バウンド以上の制限は加えていない。このとき、 d と f を固定して、すべての $\Delta \geq f$ ($l = 0$) とすべての $\Delta \geq D - 2 + l$ ($l > 0$) に対する不等式の集合 $\Lambda[F_{d,\Delta,l}] \geq 0$ を考えたとき、もしこの無限個の不等式系を満たす有限個の解 $\lambda_{m,n}$ が存在するなら、それは $p_{\Delta,l} \geq 0$ より $\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \Lambda[F_{d,\Delta,l}] \neq 0$ となって条件式 (2.12) と矛盾する。従ってそのような d と f の組み合わせは正定値の条件を満たさないため禁止される。もし解がなければ逆にその d と f の組は許される。このようにして値が許される領域を調べて行く。 d を固定して f を次第に大きくしていくとあるところで許容領域から禁止領域に入る。その値を $f_c(d)$ とすると、それが Δ の上限となって、ユニタリ性による許容領域が $D/2 - 1 \leq \Delta \leq f_c(d)$ となる。

実際の計算では無限個の不等式を有限個にする必要がある。 l に上限を設け、各 l の Δ も離散化する。不等式系の解が有るか無いかの判定は線形計画法 (linear programming method) の応用問題である。ここでは解である $\lambda_{m,n}$ の値そのものに意味はない。このようにして得られた式が (2.11) である。

さらに、OPE の構造を詳しく見るために、スカラー場 O_{Δ} の構造を分解して考える。例えば、 Δ は連続な値をとるけれども、そのうち一点だけ許容領域内に飛び地のように選び、残りのスカラー場に対して $\Delta \geq f'$ ($\geq f_c$) の条件を課して同様の計算を行う。すなわち、ギャップの存在を想定して計算すると、許容領域がさらに制限される。特に、許容領域内の一点として臨界値 $\Delta = f_c$ を選ぶと、三次元 Ising 模型のモンテカルロ計算と無矛盾な結果 $\Delta_{\sigma} = 0.5182(3)$ と $\Delta_{\varepsilon} = 1.413(1)$ を得ることが出来る。高次

元のスカラー場、テンソル場へと制限を強めていくと、さらに詳しい構造を調べることが出来る。このようにして、離散的な OPE の構造が三次元共形場理論の場合にも (準) 解析的に見えてきている。

2.9 Wilson-Fisher のイプシロン展開

最後に場の量子論的方法として昔から良く知られている、Wilson-Fisher のイプシロン展開について簡単に述べる。⁸ $D = 4 - \epsilon$ 次元の 4 点相互作用を持つスカラー場理論

$$S = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \lambda\phi^4 \right]$$

を考え、次元正則化を用いてベータ関数を計算すると

$$\beta_\lambda = -\epsilon\lambda + \frac{9\lambda^2}{2\pi^2}$$

を得る。これは $\epsilon \neq 0$ のときベータ関数が消える固定点 $\lambda^* = \epsilon 2\pi^2/9$ を持つ。場の演算子 ϕ と複合場 ϕ^2 の異常次元はそれぞれ $\gamma = 3\lambda^2/16\pi^4$ と $\delta = 3\lambda/2\pi^2$ で与えられる。⁹ これらから固定点上での共形次元を計算すると、

$$\begin{aligned} \Delta_\phi &= \frac{D-2}{2} + \frac{3\lambda_*^2}{16\pi^4} = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{\epsilon^2}{108} \\ \Delta_{\phi^2} &= D-2 + \frac{3\lambda_*}{2\pi^2} = (2-\epsilon) + \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

を得る。右辺の第一項は正準次元である。ここで、Ising 模型の OPE $\sigma \times \sigma \sim \epsilon$ と $\phi \times \phi \sim \phi^2$ の比較から $\Delta_\sigma = \Delta_\phi$ 、 $\Delta_\epsilon = \Delta_{\phi^2}$ と同定される。三次元 Ising 模型の臨界指数は $\epsilon \rightarrow 1$ と置くと、それぞれ $\Delta_\sigma = 0.51$ と $\Delta_\epsilon = 1.33$ を得る。これは、上記の結果と良く合っている。¹⁰

⁸J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press.

⁹S. Hathrell, Ann. Phys. 139 (1982)136 [複合場のくりこみについての解説は L. Brown, Ann. Phys. 126 (1980) 135 が良い]。

¹⁰計算は $o(\epsilon^5)$ までなされていて、その結果はさら良く合って $\Delta_\sigma = 0.5180$ 、 $\Delta_\epsilon =$

3 共形異常と一般座標不変性

この章では共形異常¹¹ が一般座標不変性を保障するために現れる量であることを見る。

3.1 Wess-Zumino 積分可能条件

共系不変な作用をもつ場の理論を考えたとき、古典的には Weyl 変分 $\delta g_{\mu\nu} = 2\omega g_{\mu\nu}$ のもとで不変なのに、量子論的には不変でなくなることを共形異常と呼ぶ。量子効果を含む有効作用 Γ をとすると、

$$\delta_\omega \Gamma = \int d^4x \sqrt{-g} \omega \left\{ a C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 + b G_4 + c R^2 + d \nabla^2 R + e F_{\mu\nu}^2 \right\}$$

の右辺に現れる量が共形異常である。ここで、 $C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$ は Weyl テンソルの二乗、 G_4 は Euler 密度で、それぞれ

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 &= R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{3}R^2, \\ G_4 &= R_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

と定義される。係数を無次元なものに限ると、重力場だけで構成される可能な項は以上の 4 種類である。最後の $F_{\mu\nu}^2$ はゲージ場の場の強さの二乗で、Weyl 二乗項との比較のために導入した。

ここでは、有効作用としていわゆる Wess-Zumino 積分可能条件 (Wess-Zumino integrability condition) $[\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}] = 0$ を満たすものを考える。¹² 実際、有効作用 (3.1) をさらに変分すると

$$[\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}] \Gamma = 24c \int d^4x \sqrt{-g} R \left(\omega_1 \hat{\nabla}^2 \omega_2 - \omega_2 \hat{\nabla}^2 \omega_1 \right)$$

1.4102 となる。ただ、この方法は正しさがどこまで保障されているのか疑問が残る。この疑問を解消する最近の成果として S. Rychkov and Z. Tan, J. Phys. **A48** (2015) 29FT01 と R. Gopakumar *et al*, Phys. Rev. Lett. **118** (2017) 081601 の二つの論文を挙げておく。

¹¹M. Duff, Nucl. Phys. **B125** (1977) 334.

¹²L. Bonora, P. Cotta-Ramusino and C. Reina, Phys. Lett. **B126** (1983) 305.

を得る事から $c = 0$ の条件が出てくる。この条件は重力場の共形因子についての経路積分が経路の選び方によらずに厳密に実行できることを保障するもので、曲がった時空中の場の量子論及び量子重力理論の有効作用が存在するための条件と考えることができる。

このように R^2 以外の共形異常項は積分可能になる。以下では、実際に重力場の共形因子についての積分を実行して、有効作用を求めることを考える。

3.2 Riegert-Wess-Zumino 作用

時空の計量を共形因子とそれ以外に分解して、

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu}$$

と表し、場 ϕ について積分することを考える。

はじめに Euler 密度を積分することを考える。ここでは、通常の Euler 密度に全微分項を加えた

$$E_4 = G_4 - \frac{2}{3} \nabla^2 R$$

を考える。この拡張された Euler 密度 E_4 は関係式 $\sqrt{-g}E_4 = \sqrt{-\bar{g}}(4\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4)$ を満たすことから、すぐに積分が実行できて、

$$\begin{aligned} S_{\text{RWZ}}(\phi, \bar{g}) &= -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \int_0^\phi d\phi \sqrt{-g} E_4 \\ &= -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} (2\phi \bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4\phi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

を得る。¹³ ここで、 $\sqrt{-g}\Delta_4$ は自己随伴 (self-adjoint) 条件 $\int d^4x \sqrt{-g} A \Delta_4 B = \int d^4x \sqrt{-g} (\Delta_4 A) B$ を満たす、スカラー場に対して共形不変な 4 階微分演算子で、

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R \nabla^2 + \frac{1}{3} \nabla^\mu R \nabla_\mu$$

¹³R. Riegert, Phys. Lett. **134B** (1984) 56

と定義される。この作用のことを Riegert-Wess-Zumino 作用と呼ぶ。このことから、以下では共形モード ϕ のことを “Riegert 場” と呼ぶことにする。全体の係数 b_1 は実際に曲がった時空上量子補正を計算しなければ決まらない定数である。例えば、重力と共形不変に結合している自由場として、 N_X 個のスカラー場、 N_W 個の Weyl フェルミオン、 N_A 個のゲージ場を考えると、その値は

$$b_1 = \frac{1}{360} \left(N_X + \frac{11}{2} N_W + 62 N_A \right)$$

となる。

積分可能条件についてももう少し詳しく見てみる。曲がった時空上での共形不変な場 f の作用 I は Riegert 場 ϕ に依存しないことから、 $I(f, g) = I(f, \bar{g})$ (スカラー場の場合は場 f も変換して ϕ の依存性を除く) が成り立つ。そのため、Riegert 場 ϕ の依存性は経路積分の測度から生じる。すなわち、計量 $g_{\mu\nu} (= e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu})$ 上で定義された測度を計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ 上の測度へ書き換えたときに生じる Jacobian を考慮して、 $[df]_g = [df]_{\bar{g}} e^{iS(\phi, \bar{g})}$ と書くと、有効作用は

$$\begin{aligned} e^{i\Gamma(g)} &= \int [df]_g e^{iI(f, g)} \\ &= e^{iS(\phi, \bar{g})} \int [df]_{\bar{g}} e^{iI(f, \bar{g})} = e^{iS(\phi, \bar{g})} e^{i\Gamma(\bar{g})} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、計量 $g_{\mu\nu}$ を不変に保つ変換

$$\phi \rightarrow \phi - \omega, \quad \bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\omega} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

を上式に適用すると、左辺は不変で、右辺は

$$e^{iS(\phi - \omega, e^{2\omega} \bar{g})} e^{i\Gamma(e^{2\omega} \bar{g})} = e^{iS(\phi - \omega, e^{2\omega} \bar{g})} e^{iS(\omega, \bar{g})} e^{i\Gamma(\bar{g})}$$

となる。これが元の $e^{i\Gamma(g)}$ に戻るためには S は関係式

$$S(\phi - \omega, e^{2\omega} \hat{g}) + S(\omega, \hat{g}) = S(\phi, \hat{g})$$

を満たさなければならない。この関係式は Wess-Zumino 積分条件を別の形で表現したもので、 S_{RWZ} がこの条件を満たすことは定義式 (3.2) より、積分領域 $[0, \phi]$ を $[0, \omega]$ と $[\omega, \phi]$ に分解すれば、明らかである。

このように、同時シフト変換 (3.3) の下での不変性は一般座標不変性を保障するものであり、Riegert-Wess-Zumino 作用はまさにそれを保障するために現れる。

Riegert-Wess-Zumino 作用 S_{RWZ} 自体は一般座標不変な形をしていない。この作用に Riegert 場 ϕ に依存しない非局所的な項を加えると一般座標不変な有効作用を得ることができる。それは有効作用の関係式 (3.3) の中の $\Gamma(\bar{g})$ に相当する部分を加えることで、ここでは

$$\Gamma_{\text{Riegert}}(g) = S_{\text{RWZ}}(\phi, \bar{g}) + \Gamma_{\text{Riegert}}(\bar{g})$$

と表され、一般座標不変な有効作用は

$$\Gamma_{\text{Riegert}}(g) = -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-g} E_4 \frac{1}{\Delta_4} E_4$$

で与えられる。

Riegert-Wess-Zumino 作用 S_{RWZ} の重要性は量子論的一般座標不変性を考えるとさらに明らかになる。Wess-Zumino 積分可能条件は Riegert 場の積分が経路の選び方によらずに厳密に実行できることを保障している。

3.3 共形異常と物理的結合定数

次にゲージ場項及び Weyl 二乗項について考える。最初に QED の $U(1)$ ゲージ場の場合について議論し、それを基に Weyl 二乗項の場合について議論する。

$U(1)$ ゲージ場の共形異常 $F_{\mu\nu}^2$ を積分すると Wess-Zumino 作用 $S_{\text{QED}}(\phi, \bar{g}) = -a\phi\sqrt{-g}F_{\mu\nu}^2/4$ が得られる。すなわち、この作用を ϕ で微分すれば共形異常が出てくる。その係数はすでに計算されていて、ベータ関数に比例する。ここではそれが一般座標不変性から決まることを見る。

QED は質量項を無視すれば共形不変なので、その作用は Riegert 場 ϕ に依存しない。 ϕ 依存性は測度から誘導される S_{QED} である。一方、有効作用の ϕ に寄らないの部分を $\Gamma_{\text{QED}}(\bar{g})$ と書くと、運動量表示で、

$$\Gamma_{\text{QED}}(\bar{g}) = -\frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{e_r^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) \right\} \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^2$$

と与えられる。ここで、 μ は繰り込みに伴う任意スケール、 $k^2 = \bar{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$ は計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ の空間での運動量の二乗である。 $\bar{g}_{\mu\nu}$ として Minkowski 計量を選ぶと通常の QED の 1 ループの有効作用になる。これよりベータ関数は $\beta_e = e_r^3/12\pi^2$ と決まる。ここで、 e_r は繰り込まれた結合定数を表す。これに Wess-Zumino 作用を加えると一般座標不変な有効作用が得られる。

有効作用が同時シフト変換 (3.3) の下で不変であることを要求すると、 $k^2 \rightarrow e^{-2\omega} k^2$ より、Wess-Zumino 作用の前の係数は $a = e_r^2/6\pi$ と決まって、

$$-\frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{e_r^2}{6\pi^2} \phi - \frac{e_r^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) \right\} \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^2$$

を得る。ここで、元々の計量 $g_{\mu\nu} (= e^{2\phi} \bar{g}_{\mu\nu})$ で定義される運動量の二乗

$$p^2 = \frac{k^2}{e^{2\phi}} \quad (3.4)$$

を導入する。これを物理的運動量と呼ぶ。これを用いると、一般座標不変な有効作用は

$$\Gamma_{\text{QED}}(g) = -\frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{e_r^2}{12\pi^2} \log \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) \right\} \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^2$$

と書ける。このように、ゲージ場の共形異常は繰り込みスケール μ に伴って現れる非局所項を一般座標不変な形に保つために表れる。物理的運動量 p に対して、主に宇宙論で、 k を共動運動量 (comoving momentum) と呼ぶ。

同様に、Weyl 二乗項の場合について考える。ここでは新しい無次元の結合定数 t を導入した Weyl 作用 $-(1/t^2) \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2$ を考える。この作用はゲージ場と同様に共形不変であることから、 $\bar{g}_{\mu\nu}$ だけで書ける。ここでは曲がった時空上の共形不変な場の量子論を考え、それによる Weyl 作用への量子補正を計算すると、有効作用は

$$\Gamma_{\text{Weyl}}(g) = - \left\{ \frac{1}{t_r^2} + \beta_0 \log \left(\frac{k^2}{\mu^2} \right) - 2\beta_0 \phi \right\} \sqrt{-g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \quad (3.5)$$

と与えられる。右辺の第二項は $\bar{g}_{\mu\nu}$ 上の場の理論として計算した量である。例えば、トレースレステンソル場 $h_{\mu\nu}$ を導入して、計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ を Minkowski

時空の回りで $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + th_{\mu\nu}$ と展開すると、重力場との相互作用は $I_{\text{int}} = t \int d^4x h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} / 2$ で与えられる。ここで、 $T^{\mu\nu}$ は共形不変な場のストレステンソルで、トレースレスの条件を満たす。この相互作用を用いて $h_{\mu\nu}$ の 2 点相関関数を計算すると第二項が得られる。その係数 β_0 は¹⁴

$$\beta_0 = \frac{1}{240(4\pi)^2} (N_X + 3N_W + 12N_A)$$

と計算されている。結合定数 t は、ベータ関数 $\beta_t = -\beta_0 t^3$ が負となることから、漸近自由性を示す。

有効作用 (3.5) の第三項が Wess-Zumino 作用で、同時シフト変換 (3.3) の下で不変になることを保障している。物理的運動量 p で表されたランニング結合定数

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\text{QG}}^2)} \quad (3.6)$$

を用いて有効作用を書き替えると、

$$\Gamma_{\text{Weyl}}(g) = -\frac{1}{\bar{t}_r^2(p)} \sqrt{-g} C_{\mu\nu\lambda\sigma}^2 \quad (3.7)$$

の形にまとめることができる。ここで、 $\Lambda_{\text{QG}} = \mu \exp(-1/2\beta_0 t_r^2)$ は新しい重力の赤外スケールである。

最後に注意すべき点として、量子重力あるいは重力と結合した量子場理論には必ず共形異常が現れるが、これは一般座標不変性を保障するために必要な項であって、ゲージ理論に於ける「量子異常」とは区別して考えなければならない。¹⁵

量子重力に現れる共形異常は結合定数に依存する部分と依存しない部分に分けて考える必要がある。先にも述べたように、結合定数 t によらない最低次の共形異常 (Riegert 作用) はむしろその名に反して共形不変性を保障するために現れる。一方、結合定数に依存した共形異常は通常共形不変性の破れを表す量で、その係数はベータ関数で与えられる。この

¹⁴ ストレステンソルの 2 点相関関数の係数は β_0 に比例する。

¹⁵ また、Adler-Bardeen 定理のような 1 ループ計算が厳密になるという定理も共形異常には存在しない。

ように、 t の高次の摂動項は $t = 0$ で与えられる共形場理論からのズレの度合いを表している。

A 二点相関関数の $P_{\mu_1 \dots \mu_l, \nu_1 \dots \nu_l}$ の構造

ここでは Euclid 空間で議論する。Minkowski 空間での表式は計量を $\eta_{\mu\nu}$ に戻して $x^0 \rightarrow x^0 - i\epsilon$ と置き換えると得られる。

ここでは共形反転

$$x'_\mu = (Rx)_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}$$

を使って二点相関関数の形を決めることにする。この変換は $\Omega(x) = 1/x^4$ を与える。二回行くと元に戻るので $R^2 = I$ である。これより逆変換は $x_\mu = (Rx')_\mu$ と書くことが出来る。

実プライマリースカラー場は共形反転の下で

$$O'(x') = \Omega(x)^{-\Delta/2} O(x) = x^{2\Delta} O(x)$$

と変換する。¹⁶ 引数を x に戻すと $O'(x) = (1/x^2)^\Delta O(Rx)$ と書くこともできる。ここでは O' の引数を x' のままで議論することにする。この変換則を用いて真空が共形不変であるための条件式 $\langle O'(x')O'(y') \rangle = \langle O(x)O(y) \rangle$ (1.6) を書き換えると関係式

$$(x^2 y^2)^\Delta \langle O(x)O(y) \rangle = \langle O(Rx)O(Ry) \rangle$$

が得られる。ここで、

$$\frac{1}{(Rx - Ry)^2} = \frac{x^2 y^2}{(x - y)^2}$$

に注意すると、この関係式の解は全体の係数は除いて

$$\langle O(x)O(y) \rangle = \frac{1}{(x - y)^{2\Delta}}$$

で与えられることが分かる。

プライマリーベクトル場は共形反転の下で

$$O'_\mu(x') = \Omega(x)^{-(\Delta-1)/2} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} O_\nu(x) = x^{2\Delta} I_{\mu\nu}(x) O_\nu(x)$$

¹⁶Euclid 空間では共形反転の O' は Hermite 共役 O^\dagger と同定されるので、この式は場が実場であることを表している。

と変換する。ここで、 $I_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu / x^2$ である。これより共形不変性の条件式 $\langle O'_\mu(x') O'_\nu(y') \rangle = \langle O_\mu(x') O_\nu(y') \rangle$ は

$$(x^2 y^2)^\Delta I_{\mu\lambda}(x) I_{\nu\sigma}(y) \langle O_\lambda(x) O_\sigma(y) \rangle = \langle O_\mu(Rx) O_\nu(Ry) \rangle$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} I_{\mu\lambda}(x) I_{\nu\sigma}(y) I_{\lambda\sigma}(x-y) &= I_{\mu\nu}(x-y) + 2 \frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2} \left(\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} - \frac{y_\mu y_\nu}{y^2} \right) \\ &= I_{\mu\nu}(Rx - Ry) \end{aligned}$$

に注意すると、解が全体の係数を除いて

$$\langle O_\mu(x) O_\nu(y) \rangle = \frac{I_{\mu\nu}(x-y)}{(x-y)^{2\Delta}}$$

で与えられることが分かる。これより $P_{\mu,\nu} = I_{\mu\nu}$ が求まる。一般のプライマリーテンソル場も場合も同様である。

B Wightman 関数の Fourier 変換

D 次元 Euclid 空間では共形次元 Δ を持つスカラー場の Wightman 2 点関数 $\langle O(x) O(0) \rangle$ 及びその Fourier 変換は

$$\frac{1}{(x^2)^\Delta} = \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2} - \Delta)}{4^{\Delta - \frac{D}{4}} \Gamma(\Delta)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik \cdot x} (k^2)^{\Delta - \frac{D}{2}} \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。

これを用いて Minkowski 時空での Wightman 関数の Fourier 変換を求める。以下では Euclid 空間での積 $k \cdot x$ は $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + k^D x^D$ と書き換え、 $k \cdot x$ は Minkowski 時空での積とする。 D 番目の座標を $x^D = ix^0 + \epsilon$ と書き換えると (B.1) 式の左辺は Minkowski 時空での Wightman 関数 $\langle 0 | O(x) O(0) | 0 \rangle$ になるので、右辺を書き換えること

$$\begin{aligned} \frac{1}{\{-(x^0 - i\epsilon)^2 + \mathbf{x}^2\}^\Delta} &= \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2} - \Delta)}{4^{\Delta - \frac{D}{4}} \Gamma(\Delta)} \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \int \frac{dk^D}{2\pi} e^{-k^D(x^0 - i\epsilon)} \{ \mathbf{k}^2 + (k^D)^2 \}^{\Delta - \frac{D}{2}} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

となる。次に k^D の積分路を複素平面に拡大する。位相因子 e^{ick^D} があるので、 k^D の虚数部が無限大になる領域はゼロになるため、積分路は複素平面の上半面に広げることが出来る。 $k^D = \pm i|\mathbf{k}|$ に極があつて、 Δ が整数でないことから、上半面の $k^D = i|\mathbf{k}|$ から $i\infty$ まで、及び下半面の $k^D = -i|\mathbf{k}|$ から $-i\infty$ まで、虚軸上にカットが生じる。そのため、 $-\infty < k^D < \infty$ の積分路はカットを避けた虚軸の上半分の左右をなぞる積分路に変更することが出来る (自由場 $\Delta = D/2 - 1$ の場合は極の留数だけを拾う)。 $k^D = ik^0$ と書くと

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^D}{2\pi} e^{-k^D(x^0 - i\epsilon)} \left\{ \mathbf{k}^2 + (k^D)^2 \right\}^{\Delta - \frac{D}{2}} \\ &= i \int_0^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} e^{-ik^0 x^0 - \epsilon k^0} \left\{ \left[\mathbf{k}^2 - (k^0 - io)^2 \right]^{\Delta - \frac{D}{2}} - \left[\mathbf{k}^2 - (k^0 + io)^2 \right]^{\Delta - \frac{D}{2}} \right\} \end{aligned}$$

と書き換えることが出来る。ここで、カットを避けるために新たな正の無限小 o を導入した。さらに公式

$$\begin{aligned} (x + io)^\lambda - (x - io)^\lambda &= \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ 2i|x|^\lambda \sin \pi\lambda & \text{for } x < 0 \end{cases} \\ &= 2i(-x)^\lambda \theta(-x) \sin \pi\lambda \end{aligned}$$

を使って被積分関数を $[\mathbf{k}^2 - (k^0 - io)^2]^{\Delta - D/2} - [\mathbf{k}^2 - (k^0 + io)^2]^{\Delta - D/2} = 2i(-k^2)^{\Delta - D/2} \theta(-k^2) \sin \pi(\Delta - D/2)$ と変形する。ここで、 $k^2 = \mathbf{k}^2 - (k^0)^2$ である。これより (B.2) 式の右辺は

$$\begin{aligned} & -2 \sin \left[\pi \left(\Delta - \frac{D}{2} \right) \right] \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2} - \Delta)}{4^{\Delta - \frac{D}{4}} \Gamma(\Delta)} \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ & \quad \times \int_0^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi} e^{-ik^0 x^0} (-k^2)^{\Delta - \frac{D}{2}} \theta(-k^2) \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2} + 1}}{4^{\Delta - \frac{D}{4}} \Gamma(\Delta) \Gamma(\Delta - \frac{D}{2} + 1)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik \cdot x} \theta(k^0) \theta(-k^2) (-k^2)^{\Delta - \frac{D}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、ガンマ関数の公式 $\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \pi / \sin \pi\lambda$ と $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$ を使った。これから第二章で導入したスカラー場の Fourier 変換の式 $W(k)$ が読み取れる。

C M^4 上の自由スカラー場の共形代数

簡単な例として自由スカラー場について共形代数と場の変換則を導出する。共形不変なスカラー場の作用は

$$I = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X + \frac{1}{6} \hat{R} X^2 \right)$$

で与えられる。ここで、背景時空計量は Minkowski 計量 $\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とする。正準運動量および正準交換関係は $P_X = \partial_\eta X$ と $[X(\eta, \mathbf{x}), P_X(\eta, \mathbf{x}')] = i\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ で与えられる。スカラー場を $X = X_< + X_>$ 、 $X_> = X_<^\dagger$ のように生成および消滅演算子部分に分けて後者を

$$X_>(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \varphi(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}$$

と展開する。このとき、モード演算子は正準交換関係より $[\varphi(\mathbf{k}), \varphi^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ を満たす。2点相関関数 (Wightman 関数) は $\langle 0|X(x)X(0)|0\rangle = [X_<(x), X_>(0)]$ と表され

$$\langle 0|X(x)X(0)|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{-i|\mathbf{k}|(\eta-i\epsilon)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{-(\eta-i\epsilon)^2 + \mathbf{x}^2}$$

となる。ここで、 ϵ は UV カットオフである。

ストレストンソルは背景場計量 $\hat{g}_{\mu\nu}$ による作用の変分、 $T^{\mu\nu} = (2/\sqrt{-\hat{g}}) \times \delta I / \delta \hat{g}_{\mu\nu}$ 、で定義される。変分を実行した後、Minkowski 計量に置き換えると

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{3} \partial_\mu X \partial_\nu X - \frac{1}{3} X \partial_\mu \partial_\nu X - \frac{1}{6} \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda X \partial_\lambda X$$

を得る。このストレストンソルは運動方程式を使うとトレースレスの条件を満たすことが分かる。これより共形変換の生成子は場の演算子を用いて

$$\begin{aligned} P_0 &= H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{A}, & P_j &= \int d^3\mathbf{x} \mathcal{B}_j, \\ M_{0j} &= \int d^3\mathbf{x} (-\eta \mathcal{B}_j - x_j \mathcal{A}), & M_{ij} &= \int d^3\mathbf{x} (x_i \mathcal{B}_j - x_j \mathcal{B}_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \int d^3\mathbf{x} \left(\eta\mathcal{A} + x^k\mathcal{B}_k + :P_X X: \right), \\
K_0 &= \int d^3\mathbf{x} \left\{ (\eta^2 + \mathbf{x}^2) \mathcal{A} + 2\eta x^k \mathcal{B}_k + 2\eta :P_X X: + \frac{1}{2} :X^2: \right\}, \\
K_j &= \int d^3\mathbf{x} \left\{ (-\eta^2 + \mathbf{x}^2) \mathcal{B}_j - 2x_j x^k \mathcal{B}_k - 2\eta x_j \mathcal{A} - 2x_j :P_X X: \right\}
\end{aligned}$$

と表される。場の変数 \mathcal{A} と \mathcal{B}_j はそれぞれエネルギー密度と運動量密度で、

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} :P_X^2: - \frac{1}{2} :X \partial^2 X:, \quad \mathcal{B}_j = :P_X \partial_j X:$$

で与えられる。ここで、 $\partial^2 = \partial_j \partial_j$ である。

共形変換の生成子は保存するので、時間に依存しない。そのため、共形代数は同時刻交換関係を用いて計算することが出来る。

まず初めに場の変数の交換関係を相関関数を用いて表す。同時刻での2点相関関数

$$\begin{aligned}
\langle 0|X(\mathbf{x})X(\mathbf{x}')|0\rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \epsilon^2}, \\
\langle 0|X(\mathbf{x})P_X(\mathbf{x}')|0\rangle &= i \frac{1}{2\pi^2} \frac{\epsilon}{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \epsilon^2]^2}, \\
\langle 0|P_X(\mathbf{x})P_X(\mathbf{x}')|0\rangle &= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 - 3\epsilon^2}{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \epsilon^2]^3}
\end{aligned}$$

を用いると、場の変数 X と P_X の同時刻交換関係は

$$\begin{aligned}
[X(\eta, \mathbf{x}), P_X(\eta, \mathbf{x}')] &= \langle 0|X(\eta, \mathbf{x})P_X(\eta, \mathbf{x}')|0\rangle - \langle 0|X(\eta, \mathbf{x})P_X(\eta, \mathbf{x}')|0\rangle^\dagger \\
&= i \frac{1}{\pi^2} \frac{\epsilon}{[(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \epsilon^2]^2}
\end{aligned}$$

と表すことが出来る。また、 X や P_X 同士の同時刻交換関係は正しく消えることが分かる。最後の項は正則化された3次元の δ 関数で

$$\delta_3(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \epsilon\omega} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\epsilon}{(\mathbf{x}^2 + \epsilon^2)^2}$$

と定義される。

さらに自由場の OPE の公式

$$\begin{aligned}
[:AB(x):, :CD(y):] \\
&= [A(x), C(y)] :B(x)D(y): + [A(x), D(y)] :B(x)C(y): \\
&\quad + [B(x), C(y)] :A(x)D(y): + [B(x), D(y)] :A(x)C(y): + \text{QC}(x-y)
\end{aligned}$$

を使って共形代数を計算する。最後の項は量子補正で

$$QC(x-y) = \langle A(x)C(y) \rangle \langle B(x)D(y) \rangle + \langle A(x)D(y) \rangle \langle B(x)C(y) \rangle - \text{H.c.}$$

で与えられる。ここで、H.c. は最初の二つの項の Hermite 共役を表す。この公式を用いて \mathcal{A} と \mathcal{B}_j の間の同時刻交換関係を計算すると

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathcal{A}(\mathbf{y})] &= \frac{1}{2} i \partial_x^2 \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) (:P_X(\mathbf{x})X(\mathbf{y}): - :X(\mathbf{x})P_X(\mathbf{y}):), \\ [\mathcal{B}_j(\mathbf{x}), \mathcal{B}_k(\mathbf{y})] &= i \partial_k^x \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : \partial_j X(\mathbf{x}) P_X(\mathbf{y}) : + i \partial_j^x \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : P_X(\mathbf{x}) \partial_k X(\mathbf{y}) :, \\ [\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathcal{B}_j(\mathbf{y})] &= i \partial_j^x \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : P_X(\mathbf{x}) P_X(\mathbf{y}) : - \frac{1}{2} i \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : \partial^2 X \partial_j X(\mathbf{y}) : \\ &\quad - \frac{1}{2} i \partial_x^2 \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : X(\mathbf{x}) \partial_j X(\mathbf{y}) : - i \frac{2}{\pi^2} f_j(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{aligned}$$

となる。さらに、生成子の中に含まれるその他の場の変数との同時刻交換関係は

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}(\mathbf{x}), :P_X X(\mathbf{y}):] &= -i \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}) \left(:P_X^2(\mathbf{y}): + \frac{1}{2} :X \partial^2 X(\mathbf{y}): \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} i \partial_x^2 \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : X(\mathbf{x}) X(\mathbf{y}) : + i \frac{10}{\pi^2} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ [\mathcal{B}_j(\mathbf{x}), :P_X X(\mathbf{y}):] &= -i \delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}) \mathcal{B}_j(\mathbf{y}) + i \partial_j^x \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) : P_X(\mathbf{x}) X(\mathbf{y}) : \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、量子補正を表す関数 f_j と f は

$$f_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\epsilon x_j (\mathbf{x}^2 - \epsilon^2)}{(\mathbf{x}^2 + \epsilon^2)^6} \quad f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{40\pi^2} \frac{\epsilon(5\mathbf{x}^2 - 3\epsilon^2)}{(\mathbf{x}^2 + \epsilon^2)^5}$$

で与えられ、 $f_j(\mathbf{x}) = \partial_j f(\mathbf{x})$ の関係を満たす。これらの関数の空間積分は、 ϵ を有限の値にしたままで、

$$\int d^3\mathbf{x} f_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) = 0, \quad \int d^3\mathbf{x} x^j f(\mathbf{x}) = 0$$

を満たす。一方、積分 $\int d^3\mathbf{x} \mathbf{x}^2 f(\mathbf{x}) = -1/160\epsilon^2$ は $\epsilon \rightarrow 0$ で発散する。¹⁷ これらの交換関係を使って共形代数 (1.4) を計算することが出来る。その際、量子補正項はすべて消える。

¹⁷関数 f は δ 関数を用いて $f(\mathbf{x}) = (-1/320) \times \partial^2 (\delta_3(\mathbf{x})/\mathbf{x}^2)$ と表すことが出来る。このとき、 δ 関数の異なる式 $\pi^2 \delta_3(\mathbf{x}) = 4\epsilon^3/(\mathbf{x}^2 + \epsilon^2)^3$ を使っている。

次に複合場 $:X^n:$ の変換則を求める。この演算子と生成子の中に現れる場の変数との同時刻交換関係は

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}(\mathbf{x}), :X^n(\mathbf{y}):] &= -i\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\partial_\eta :X^n(\mathbf{y}):, \\
[\mathcal{B}_j(\mathbf{x}), :X^n(\mathbf{y}):] &= -i\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\partial_j :X^n(\mathbf{y}): \\
&\quad + i\frac{1}{2\pi^2}n(n-1)g_j(\mathbf{x} - \mathbf{y}) :X^{n-2}(\mathbf{y}):, \\
[:P_X X(\mathbf{x}), :X^n(\mathbf{y}):] &= -in\delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) :X^n(\mathbf{y}): \\
&\quad + i\frac{3}{2\pi^2}n(n-1)g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) :X^{n-2}(\mathbf{y}):
\end{aligned}$$

と計算される。量子補正関数 g_j と g は

$$g_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\epsilon x_j}{(\mathbf{x}^2 + \epsilon^2)^4} \quad g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{6\pi^2} \frac{\epsilon}{(\mathbf{x}^2 + \epsilon^2)^3}$$

で定義され、 $g_j(\mathbf{x}) = \partial_j g(\mathbf{x})$ の関係を満たす。

これらより、演算子 $:X^n:$ の変観測を計算すると、量子補正項はすべて消えて、

$$\begin{aligned}
i[P_\mu, :X^n(x):] &= \partial_\mu :X^n(x):, \\
i[M_{\mu\nu}, :X^n(x):] &= (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) :X^n(x):, \\
i[D, :X^n(x):] &= (x^\mu \partial_\mu + n) :X^n(x):, \\
i[K_\mu, :X^n(x):] &= (x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - 2x_\mu n) :X^n(x):
\end{aligned}$$

のように変換することが示せる。これより、 $:X^n:$ は共形次元 n のプライマリースカラー場であることが分かる。

D 臨界指数の導出

共形場理論 S_{CFT} に摂動を加えて、種々の臨界指数を導出する。まず初めに、relevant な演算子 (共形次元が $\Delta < D$ を満たす) の代表であるエネルギー演算子 ε による摂動を考える。それは温度による摂動を表してい

て、臨界点からのズレを表す無次元の温度パラメータを $t = (T - T_c)/T_c$ とすると、その系の作用は

$$S_t = S_{\text{CFT}} - ta^{\Delta_\varepsilon - D} \int d^D x \varepsilon(x)$$

で与えられる。ここで、 Δ_ε はエネルギー演算子の共形次元である。次元を補うために導入した a は紫外カットオフ長さで、統計モデルに於ける格子間隔に相当する。¹⁸

相関距離 ξ は、次元解析から $ta^{\Delta_\varepsilon - D} \sim \xi^{\Delta_\varepsilon - D}$ が成り立つので、

$$\xi \sim at^{-\nu}, \quad \nu = \frac{1}{D - \Delta_\varepsilon} \quad (\text{D.1})$$

で与えられる。ここで、relevant の条件 $\Delta_\varepsilon < D$ より指数 ν は正の数になるので、 $\xi \rightarrow \infty$ の極限は $t \rightarrow 0$ に相当する。

温度の摂動 t を加えたときの演算子 O の相関関数、 $\langle\langle O \rangle\rangle_t = \int O e^{-S_t}$ 、は

$$\langle\langle O \rangle\rangle_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle O \left(ta^{\Delta_\varepsilon - D} \int d^D x \varepsilon(x) \right)^n \rangle$$

で与えられる。ここで、 $\langle O \rangle = \int O e^{-S_{\text{CFT}}}$ は通常の CFT の相関関数を表す。

臨界指数を求めるために相関距離 ξ が十分に大きい臨界点近傍での振る舞いを調べる。その極限では、格子間隔に相当する UV カットオフ長さは結果に影響しないので、以下では特に必要がない場合は $a = 1$ とする。

統計モデルを指定する演算子として ε の他にスピン演算子 σ を考える。それらは Ising 模型が満たす OPE 構造

$$\sigma \times \sigma \sim I + \varepsilon, \quad \sigma \times \varepsilon \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \times \varepsilon \sim I$$

をもつものとする。

¹⁸格子模型では、次元を与えるパラメータは格子間隔だけで、温度変数に相当する結合定数などは無次元量である。そのことに対応して、温度パラメータ t は無次元量で導入し、次元の不足を a で補っている。このスケールは系を有限にするために必要であるが、以下では次元解析に現れるだけで、相関距離が大きい極限で臨界指数を求める際、 a の値自体は重要ではない。

はじめに比熱の臨界指数を求める。単位体積当たりの自由エネルギーを f とすると、比熱は $C = -\partial^2 f / \partial t^2 = \partial \langle \langle \varepsilon(0) \rangle \rangle_t / \partial t$ で与えられる。 ξ が大きい (t が小さい) 極限で最も寄与する項は、CFT の一点関数 $\langle \varepsilon \rangle$ が消えることから、二点関数

$$C = \langle \varepsilon(0) \int_{|x| \leq \xi} d^D x \varepsilon(x) \rangle = \int_{|x| \leq \xi} d^D x \frac{1}{|x|^{2\Delta_\varepsilon}}$$

で与えられる。ここで、一点関数 $\langle \langle \varepsilon \rangle \rangle_t$ は便宜上原点で評価している。積分は、相関距離が ξ であることから、その内側 $|x| \leq \xi$ で評価すると、比熱は ξ の関数として、

$$C \sim \xi^{D-2\Delta_\varepsilon} + \text{const.}$$

で与えられることが分かる。定数項は紫外カットオフからの寄与で、 ξ が大きい臨界点近傍では第一項より小さいとして無視する。¹⁹ 臨界指数 α は $C \sim t^{-\alpha}$ で定義されるので、 $\xi \sim t^{-\nu}$ を使って右边を t の振る舞いに書き換えると、

$$\alpha = \nu(D - 2\Delta_\varepsilon)$$

を得る。

次に、スピン演算子の一点関数で与えられる磁化の臨界指数を求める。CFT では一点関数 $\langle \sigma \rangle$ と $\langle \varepsilon \rangle$ 及び OPE 構造から二点関数 $\langle \sigma \varepsilon \rangle$ が消えることから、温度による摂動をかけた場合の磁化の臨界点近傍での振る舞いは

$$M = \langle \langle \sigma(0) \rangle \rangle_t = \frac{t^2}{2!} \int_{|x| \leq \xi} d^D x \int_{|y| \leq \xi} d^D y \langle \sigma(0) \varepsilon(x) \varepsilon(y) \rangle$$

で与えられる。積分は次元解析から容易に評価出来て、 $\xi \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$) で最も寄与する項は

$$M \sim t^2 \times \xi^{2D-\Delta_\sigma-2\Delta_\varepsilon} \sim t^{\nu\Delta_\sigma}$$

¹⁹ $D = 2$ の Ising 模型の場合は指数がゼロになるが、対数発散する。

となる。ここで、 Δ_σ はスピン演算子の共形次元である。これより、 $M \sim t^\beta$ で定義される臨界指数は

$$\beta = \nu\Delta_\sigma$$

となる。

磁化率の臨界指数を導出するには、温度だけでなく外部磁場 h による摂動を加える必要がある。その作用は

$$S_{t,h} = S_{\text{CFT}} - ta^{\Delta_\sigma - D} \int d^D x \varepsilon(x) - ha^{\Delta_\sigma - D} \int d^D x \sigma(x)$$

で与えられる。磁化率の臨界点近傍での振る舞いを計算すると

$$\chi = \frac{\partial}{\partial h} \langle \langle \sigma(0) \rangle \rangle_{t,h} \Big|_{h=0} = \int_{|x| \leq \xi} d^D x \langle \sigma(0) \sigma(x) \rangle \sim \xi^{D-2\Delta_\sigma} \sim t^{-\nu(D-2\Delta_\sigma)}$$

となる。これより、 $\chi \sim t^{-\gamma}$ で定義される磁化率の臨界指数は

$$\gamma = \nu(D - 2\Delta_\sigma)$$

となる。

また、臨界温度 $t = 0$ での磁化の h 依存性 $M \sim h^{1/\delta}$ は、外部磁場 h の摂動だけを加えた作用

$$S_h = S_{\text{CFT}} - ha^{\Delta_\sigma - D} \int d^D x \sigma(x)$$

から求められる。この作用から磁化は

$$M = \langle \langle \sigma(0) \rangle \rangle_h = h \int_{|x| \leq \xi} d^D x \langle \sigma(0) \sigma(x) \rangle$$

で与えられる。この系での相関距離は $\xi^{\Delta_\sigma - D} \sim ha^{\Delta_\sigma - D}$ で表されることに注意して、 $\xi \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) で最も寄与する項を次元解析から評価すると

$$M \sim h \times \xi^{D-2\Delta_\sigma} \sim h^{\Delta_\sigma/(D-\Delta_\sigma)}$$

を得る。これより、臨界指数は

$$\delta = \frac{D - \Delta_\sigma}{\Delta_\sigma}$$

となる。

最後によく知られたスケーリング則をまとめておく。まず、新しい指数 η を関係式 $2\Delta_\sigma = D - 2 + \eta$ で定義する。この式と (D.1) 式を使って Δ_σ と Δ_ε を消去すると、各臨界指数は

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 - \nu D \quad [\text{Josephson's law}], \\ \beta &= \frac{1}{2}\nu(D - 2 + \eta), \\ \gamma &= \nu(2 - \eta) \quad [\text{Fisher's law}], \\ \delta &= \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta}\end{aligned}$$

と表すことが出来る。また、関係式

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + \gamma &= 2 \quad [\text{Rushbrooke's law}], \\ \gamma &= \beta(\delta - 1) \quad [\text{Widom's law}]\end{aligned}$$

を満たす。

具体例として、 $D = 2$ の Ising 模型では $\Delta_\varepsilon = 1$ と $\Delta_\sigma = 1/8$ より $\nu = 1$ と $\eta = 1/4$ が得られ、

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{8}, \quad \gamma = \frac{7}{4}, \quad \delta = 15$$

となる。

E 参考文献

共形場理論に関する本

- E. Fradkin and M. Palchik, *Conformal Quantum Field Theory in D -dimensions* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996)
- P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory* (Springer, New York, 1997).

ユニタリ性の条件 (unitarity bound)

- G. Mack, *All Unitary Ray Representations of the Conformal Group $SU(2,2)$ with Positive Energy*, Commun. Math. Phys. **55** (1977) 1.
- S. Minwalla, *Restrictions imposed by Superconformal Invariance on Quantum Field Theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 781.
- B. Grinstein, K. Intriligator and I. Rothstein, *Comments on Unparticle*, Phys. Lett. **B662** (2008) 367.
- D. Dorigoni and S. Rychkov, *Scale Invariance + Unitarity \Rightarrow Conformal Invariance?*, arXiv.0910.1087.

Conformal Bootstrap に関する原論文

- A. Polyakov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **66** (1974) 23.
- S. Ferrara, A. Grillo and R. Gatto, Ann. Phys. **76** (1973) 161.
- G. Mack, Nucl. Phys. **B118** (1977) 445.

Conformal Blocks の一般式の導出

- F. Dolan and H. Osborn, *Conformal Four Point Functions and the Operator Product Expansion*, Nucl. Phys. **B599** (2001) 459.
- F. Dolan and H. Osborn, *Conformal Partial Wave and the Operator Product Expansion*, Nucl. Phys. **B678** (2004) 491.
- F. Dolan and H. Osborn, *Conformal Partial Waves: Further Mathematical Results*, arXiv:1108.6194.

Conformal Bootstrap からの制限

- R. Rattazzi, V. Rychkov, E. Tonni and A. Vichi, *Bounding Scalar Operator Dimensions in 4D CFT*, JHEP **0812** (2008) 031.
- V. Rychkov and A. Vichi, *Universal Constraints on Conformal Operator Dimensions*, Phys. Rev. **D80** (2009) 045006.
- S. El-Showk, M. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin and A. Vichi, *Solving the 3D Ising Model with the Conformal Bootstrap*, Phys. Rev. **D86** (2012) 025022.

OPE の収束性など

- D. Pappadopulo, S. Rychkov, J. Espin and R. Rattazzi, *OPE Convergence in Conformal Field Theory*, Phys. Rev. **D86** (2012) 105043.
- M. Hogervorst and S. Rychkov, *Radial Coordinates for Conformal Blocks*, arXiv:1303.1111.