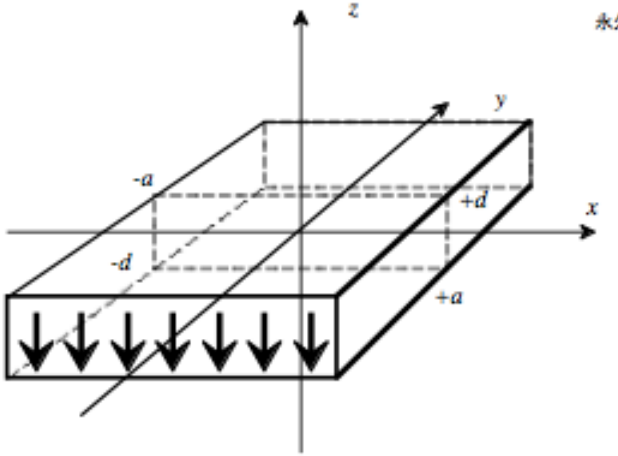
My Favorite Equations #003 :

Analytic solution of the magnetic field produced by a planar permanent magnet.

平板永久磁石が展開する磁束密度

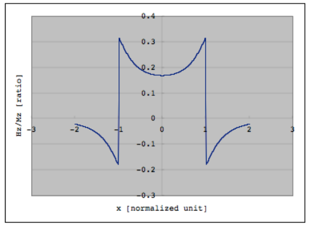
（A. 1:解析式の導出） ブロック材永久磁石の磁束密度の解析解（3次元）

条件1： 2 a × 2 b × 2 d の直方体に Br に垂直方向に磁化した永久磁石を考える。
条件2： 第一歩として、簡略化の為、まわりに磁性体は存在しない完全な open flux を想定。



永久磁石の形状： 2a x 2b x 2d の直方体
磁化 M = (0, 0, M) ; μ0 M = Br :マグネットの残留起磁力

$$H_x(x,y,z) = \frac{M_r}{2\pi}\{$$
$$+\ln\left[\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-d)^2}-(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+(z-d)^2}-(y+b)}\right]$$
$$-\ln\left[\frac{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+(z-d)^2}-(y-b)}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+(z-d)^2}-(y+b)}\right]$$
$$-\ln\left[\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z+d)^2}-(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+(z+d)^2}-(y+b)}\right]$$
$$-\ln\left[\frac{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+(z+d)^2}-(y-b)}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+(z+d)^2}-(y+b)}\right]$$



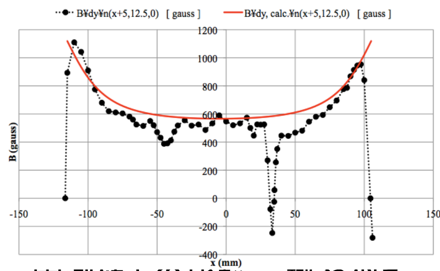
磁束密度(3D)の解析式の導出

上記の場合、「磁荷」の概念を用いると非常に楽である。磁化Mを形成する状態は、上面・下面に一様に磁荷が分布していると考えればよい。

磁荷密度を m と置くと、

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad :$$
$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$$
$$\Rightarrow \nabla\cdot\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = 0 \Rightarrow \nabla\cdot(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{H} = -\nabla\cdot\boldsymbol{M} = -m$$

それぞれの磁荷はポイントソースとして取り扱える。上記の式からわかるように、電束密度を計算する形と全く同じになる為、同様な手続きで解析式を導出する事ができる。ガウスの法則と同様に、



実測値との比較： 概ね似た傾向と絶対値となっている。実物は、2枚接着や角の処理等あり、それらの影響で分布に差がある。

$$H_y(x,y,z) = \frac{M_r}{2\pi}\{$$
$$+\ln\left[\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-d)^2}-(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+(z-d)^2}-(x+a)}\right]$$
$$-\ln\left[\frac{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+(z-d)^2}-(x-a)}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+(z-d)^2}-(x+a)}\right]$$
$$-\ln\left[\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z+d)^2}-(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+(z+d)^2}-(x+a)}\right]$$
$$-\ln\left[\frac{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+(z+d)^2}-(x-a)}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+(z+d)^2}-(x+a)}\right]$$

$$\frac{4\pi H_z(x,y,z)}{M_r} =$$
$$-\int_{-a}^{a} dx_s \frac{(z-d)(y-b)}{\{(x-x_s)^2+(z-d)^2\}\sqrt{(x-x_s)^2+(y-b)^2+(z-d)^2}}$$
$$+\int_{-a}^{a} dx_s \frac{(z-d)(y+b)}{\{(x-x_s)^2+(z-d)^2\}\sqrt{(x-x_s)^2+(y+b)^2+(z-d)^2}}$$
$$+\int_{-a}^{a} dx_s \frac{(z+d)(y-b)}{\{(x-x_s)^2+(z+d)^2\}\sqrt{(x-x_s)^2+(y-b)^2+(z+d)^2}}$$
$$-\int_{-a}^{a} dx_s \frac{(z+d)(y+b)}{\{(x-x_s)^2+(z+d)^2\}\sqrt{(x-x_s)^2+(y+b)^2+(z+d)^2}}$$

となる。それぞれの項は、前頁の結果から、下記のようになる。

1st term

$$\alpha = z-d \;;\; \beta^2 = (y-b)^2+(z-d)^2 \;;\; \sqrt{\beta^2-\alpha^2} = y-b$$
$$-\frac{\pi}{2} - \arctan\Big[$$
$$\frac{\frac{(a-x)(a+x)(y-b)^2-(z-d)^2}{\sqrt{\{(a-x)^2+(y-b)^2+(z-d)^2\}\{(a+x)^2+(y-b)^2+(z-d)^2\}}}}{(z-d)(y-b)\{(a+x)\sqrt{(a-x)^2+(y-b)^2+(z-d)^2}+(a-x)\sqrt{(a+x)^2+(y-b)^2+(z-d)^2}\}}$$

2nd term

$$+\frac{\pi}{2} + \arctan\Big[$$
$$\frac{\frac{(a-x)(a+x)(y+b)^2-(z-d)^2}{\sqrt{\{(a-x)^2+(y+b)^2+(z-d)^2\}\{(a+x)^2+(y+b)^2+(z-d)^2\}}}}{(z-d)(y+b)\{(a+x)\sqrt{(a-x)^2+(y+b)^2+(z-d)^2}+(a-x)\sqrt{(a+x)^2+(y+b)^2+(z-d)^2}\}}$$

3rd term

$$+\frac{\pi}{2} + \arctan\Big[$$
$$\frac{\frac{(a-x)(a+x)(y-b)^2-(z+d)^2}{\sqrt{\{(a-x)^2+(y-b)^2+(z+d)^2\}\{(a+x)^2+(y-b)^2+(z+d)^2\}}}}{(z+d)(y-b)\{(a+x)\sqrt{(a-x)^2+(y-b)^2+(z+d)^2}+(a-x)\sqrt{(a+x)^2+(y-b)^2+(z+d)^2}\}}$$

4th term

$$-\frac{\pi}{2} - \arctan\Big[$$
$$\frac{\frac{(a-x)(a+x)(y+b)^2-(z+d)^2}{\sqrt{\{(a-x)^2+(y+b)^2+(z+d)^2\}\{(a+x)^2+(y+b)^2+(z+d)^2\}}}}{(z+d)(y+b)\{(a+x)\sqrt{(a-x)^2+(y+b)^2+(z+d)^2}+(a-x)\sqrt{(a+x)^2+(y+b)^2+(z+d)^2}\}}$$