

周期軌道理論による核分裂過程のフラグメント殻構造

在田謙一郎（名工大）

市川隆敏（東大 CNS），松柳研一（京大基研，理研仁科センター）

「ハドロン・原子核物理の理論研究最前線 2017」（11/20 ~ 22, KEK）

低エネルギー核分裂反応におけるフラグメント質量数分布

- アクチノイド領域核の非対称分裂とフラグメント殻効果
- 陽子過剰水銀領域での非対称分裂に対する理論的解釈

周期軌道理論による核分裂過程シェル構造の解析

- シェル構造の半古典論（周期軌道理論）
- フラグメントのシェル効果 – 半古典的定義
- 核分裂変形キャビティモデルへの適用（準位密度のフーリエ変換，等作用曲線）

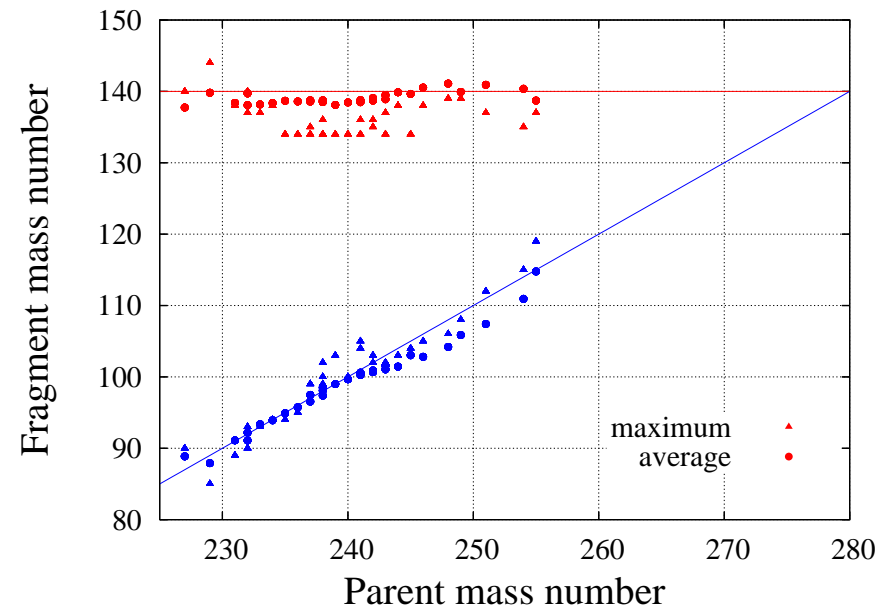
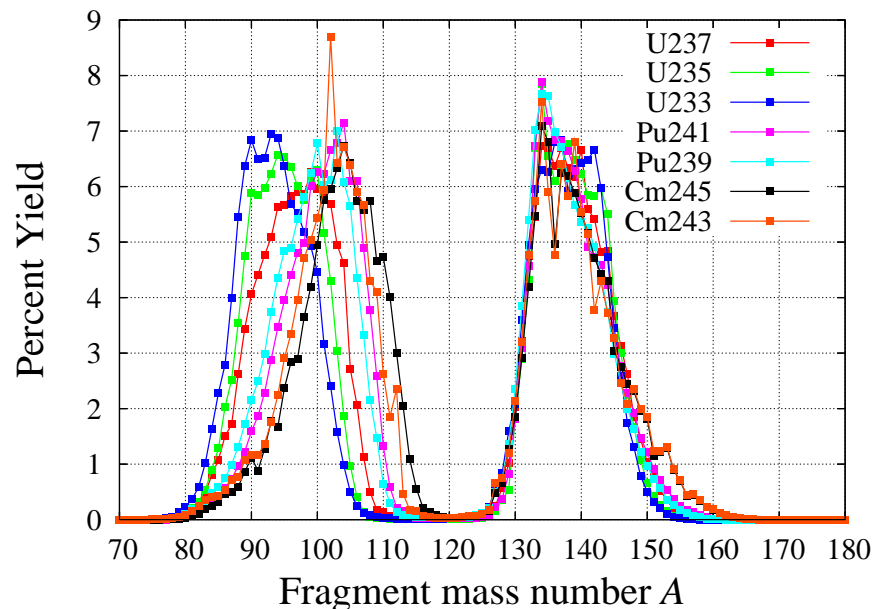
トレース公式におけるフラグメント局在軌道の寄与

- フラグメント局在軌道の相対占有体積の導出と評価
- 2次元ビリヤード系での分析，縮退軌道の marginal orbits の寄与（表面項）

SUMMARY

低エネルギー核分裂におけるフラグメント質量数分布

□ アクチノイド領域核の n-induced fission におけるフラグメント質量分布

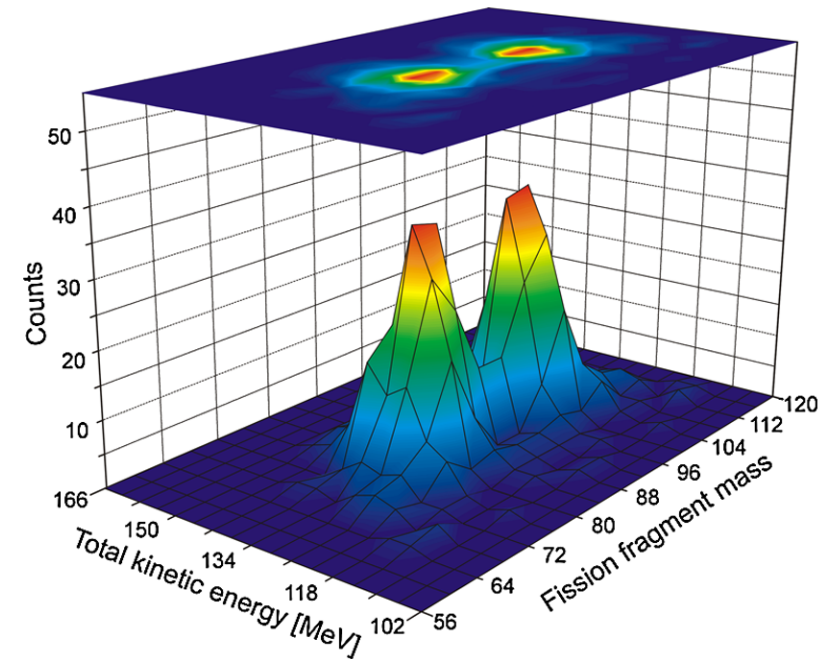
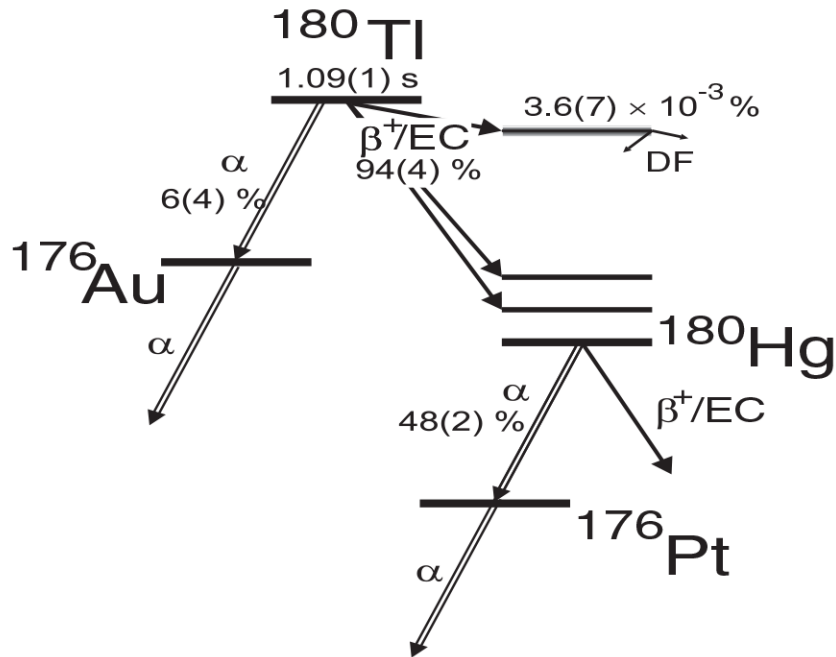


- ◆ 分裂片の質量数分布は非対称（量子論的シェル効果）
- ◆ 親核によらず，重いフラグメントの質量数が $A \approx 140$ でほぼ一定
二重閉殻核 ^{132}Sn ($Z = 50, N = 82$) のシェル効果

□ 陽子過剰水銀領域のベータ遅延核分裂

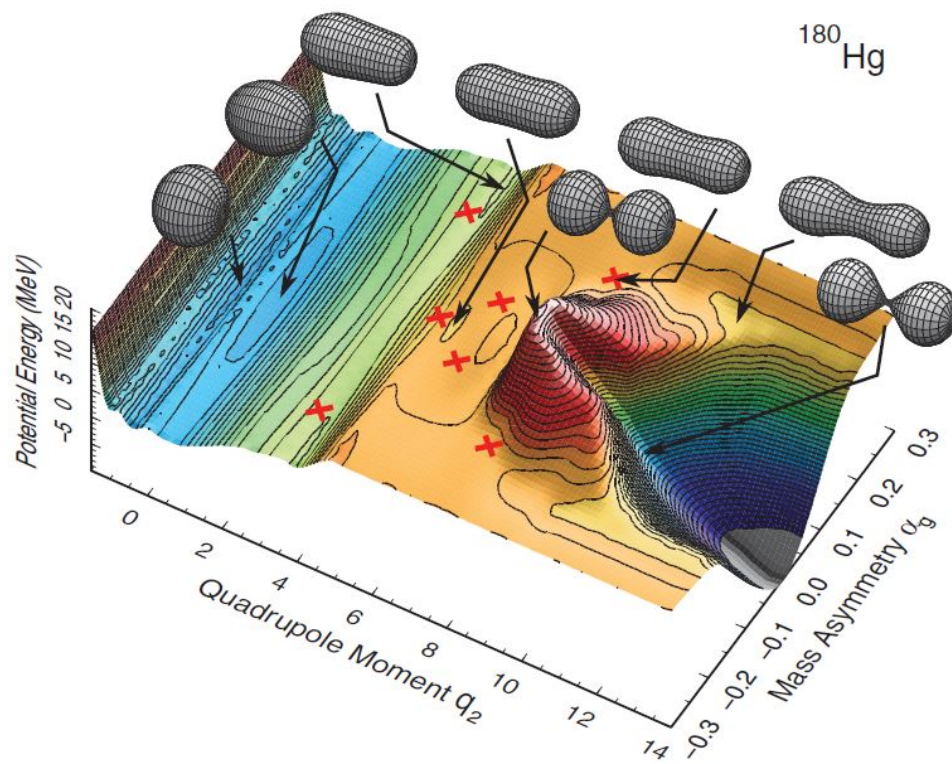
“New Type of Asymmetric Fission in Proton-Rich Nuclei”

Andreyev et al., Phys. Rev. Lett. **105**, 252502 (2010)

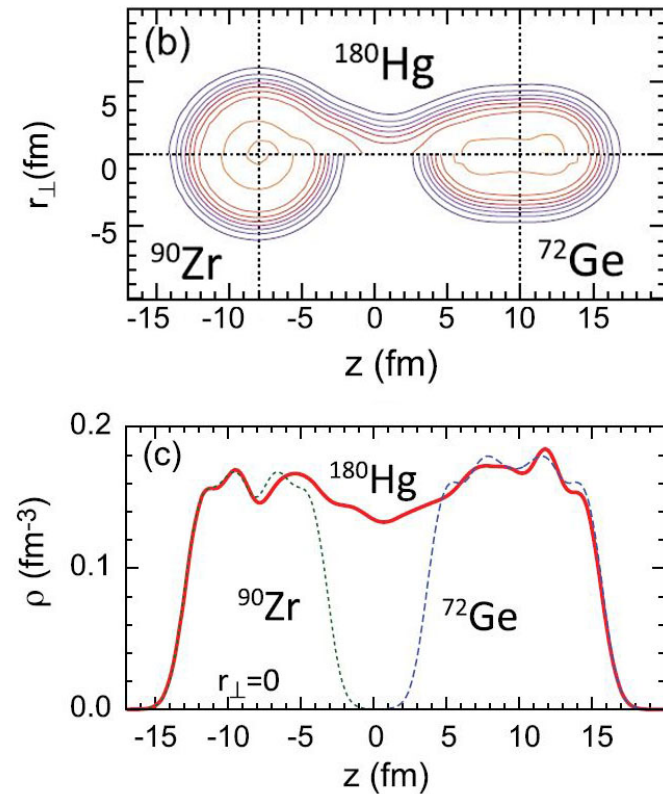


- ◆ 対称分裂での娘核 (^{90}Zr : $Z = 40$, $N = 50$) の安定性に反して非対称分裂 (主な分裂チャンネルは $^{100}\text{Ru} + ^{80}\text{Kr}$)
- ◆ 分裂の非対称度を説明できる大きなシェル効果がフラグメントに存在しない
⇒ 実験的系統性からの予想に反する結果 (New Type)

- 現実的平均場模型による理論計算
Immersion 法による 5 次元エネルギー
曲面上の核分裂経路
Ichikawa et al.
Phys. Rev. C **86** (2012) 024610.



- D1S 有効核力を用いた HFB 法による fission saddle 変形
Warda et al.
Phys. Rev. C **86** (2012) 024601.



- ★ fission path を決める分裂過程の変形シェル構造が重要
- ◎ 前駆フラグメントが分裂過程の変形シェル効果に及ぼす影響を抽出し、
fission path とフラグメントの安定性との相関を理解できないか？

周期軌道理論による核分裂過程シェル構造の解析

□ シェル構造の半古典論（周期軌道理論）

準位密度の半古典的評価

$$g(E) = \sum_n \delta(E - E_n) = \text{Tr} \delta(E - \hat{H}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dt e^{itE/\hbar} \int d\mathbf{r} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t)$$

遷移振幅 K の経路積分表示に対する半古典近似 → 古典経路 (CT) の寄与

$$K(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; t) = \langle \mathbf{r}'' | e^{-it\hat{H}/\hbar} | \mathbf{r}' \rangle \simeq \sum_{\text{CT}} D_{\text{CT}}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') e^{\frac{i}{\hbar} R_{\text{CT}}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; t)}$$

トレース積分の実行 → 周期軌道 (PO) の寄与

$$g(E) \simeq \bar{g}(E) + \sum_{\text{PO}} A_{\text{PO}}(E) \cos \left(\frac{1}{\hbar} S_{\text{PO}}(E) - \frac{\pi}{2} \mu_{\text{PO}} \right) \quad \text{トレース公式}$$

シェルエネルギー

$$\delta E(N) = \sum_{\text{PO}} \mathcal{A}_{\text{PO}}(E_F) \cos \left(\frac{1}{\hbar} S_{\text{PO}}(E_F) - \frac{\pi}{2} \mu_{\text{PO}} \right), \quad \mathcal{A}_{\text{PO}} = \frac{A_{\text{PO}}}{(T_{\text{PO}}/\hbar)^2}$$

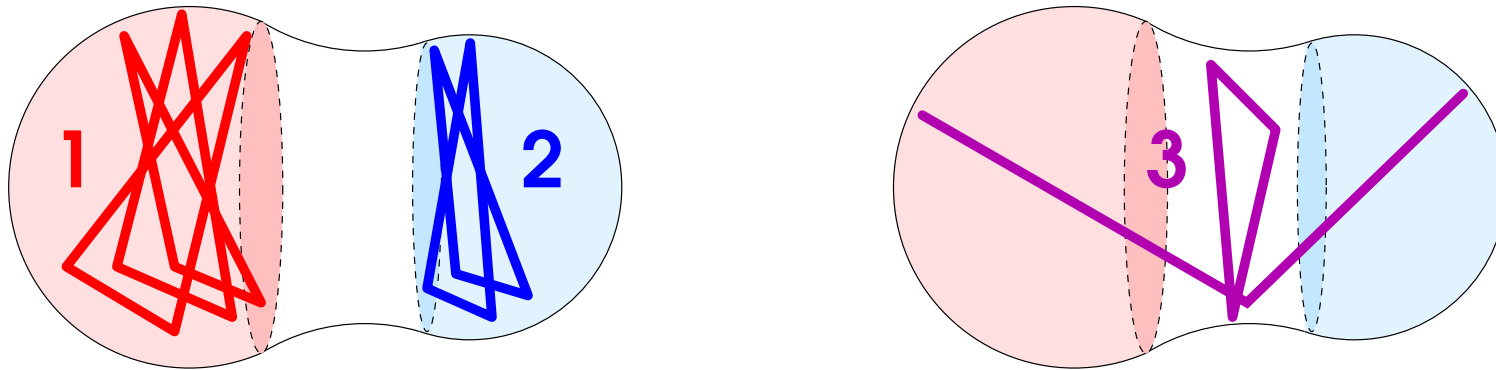
- ◆ 短い周期軌道が大局的シェル構造に関与
- ◆ 軌道の寄与（振幅 A_{PO} ）は軌道の安定性で決まる

□ フラグメントのシェル効果 – 半古典的定義

核全体のシェルエネルギーに対するフラグメントの寄与の抽出

周期軌道の分類

◆ 各フラグメント部に局在した軌道 ◆ ネック部を通る軌道



フラグメント部に局在する軌道の寄与を「フラグメントのシェル効果」と同定

$$\delta E(N) = \delta E_1(N) + \delta E_2(N) + \delta E_3(N)$$

ネック部を通る軌道は一般に不安定で、周期が長い ($\delta E_3 \ll \delta E_1, \delta E_2$)

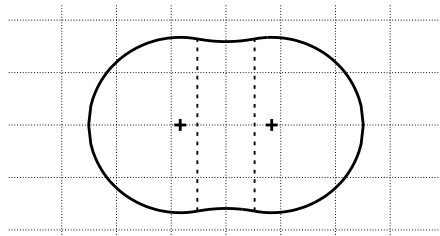
変形と共に、フラグメントのシェル効果が核全体のシェル効果を支配

変形シェル構造 (fission path) \Leftrightarrow 分裂片の安定性

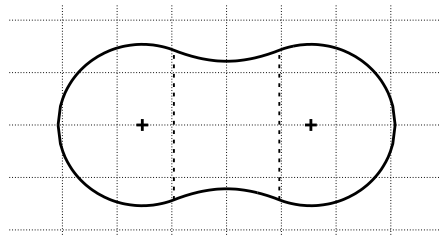
□ 核分裂変形キャビティ模型

- ◆ TQS (Three Quadratic Surfaces) 軸対称変形キャビティ模型
5つの変形パラメータ（伸長度、ネック幅、各分裂片変形度、質量非対称度）
- ◆ 球形フラグメントを仮定
ネックパラメータは現実的模型計算での典型的な値に固定
- ◆ 伸長度 (elongation) σ_1 と質量非対称度 (fragment mass asymmetry) α_2 の関数として変形シェル構造を分析

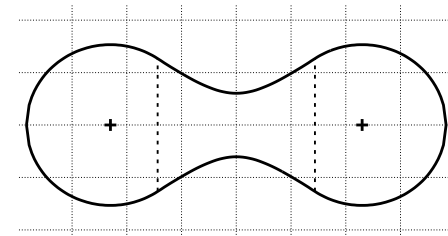
$(\sigma_1, \alpha_2) = (1.0, 0.0)$



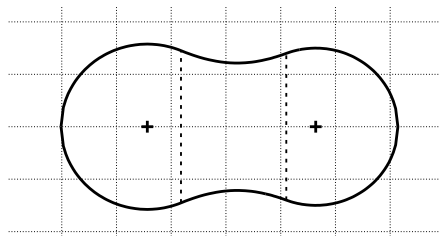
$(2.0, 0.0)$



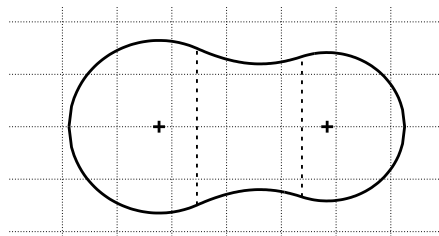
$(3.0, 0.0)$



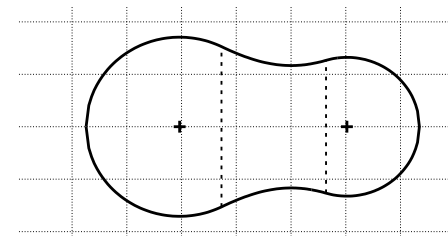
$(2.0, 0.1)$



$(2.0, 0.3)$



$(2.0, 0.5)$



□ トレース公式と準位密度のフーリエ解析

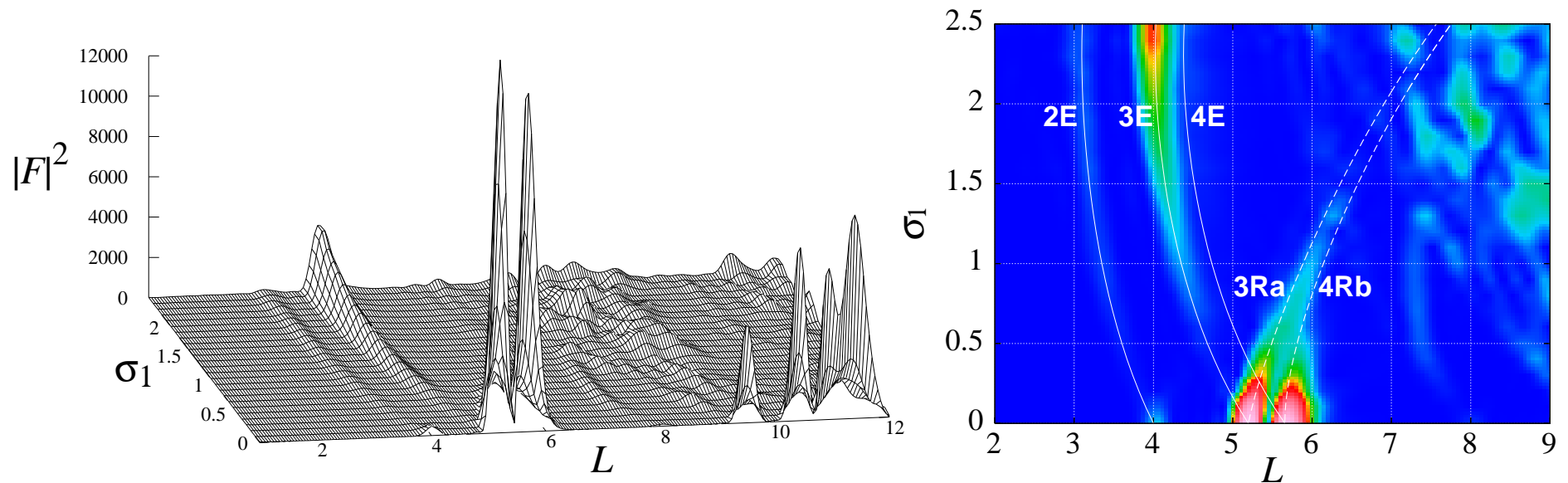
$$g(k) = g_0(k) + \sum_{\text{PO}} A_{\text{PO}} \cos \left[\frac{1}{\hbar} S_{\text{PO}}(k) - \frac{\pi}{2} \mu_{\text{PO}} \right] \quad (\text{トレース公式})$$

$$S_{\text{PO}}(k) = \oint_{\text{PO}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = \hbar k \oint ds = \hbar k L_{\text{PO}} \quad (L_{\text{PO}}: \text{軌道長})$$

$$F(L) = \int dk e^{ikL} g(k) = F_0(L) + \pi \sum_{\text{PO}} A_{\text{PO}} e^{i\pi\mu_{\text{PO}}/2} \delta(L - L_{\text{PO}})$$

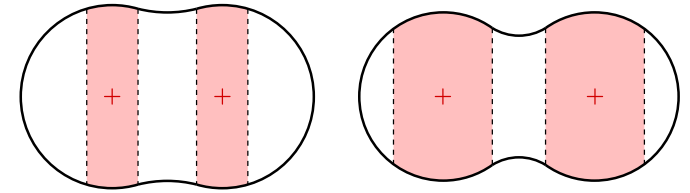
軌道長 $L = L_{\text{PO}}$ にピーク

⇒ 量子スペクトルから古典周期軌道の寄与を評価できる

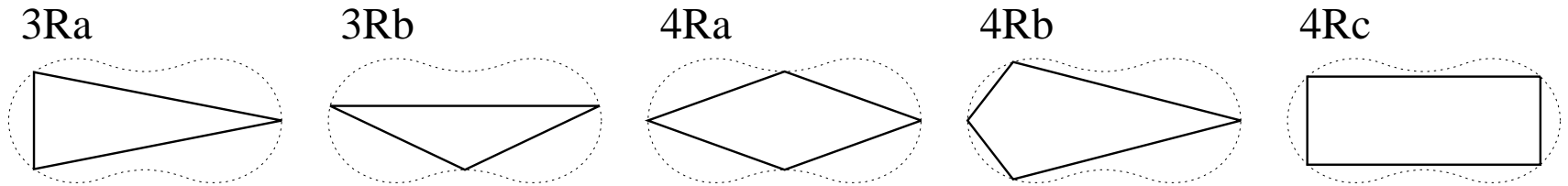


□ 古典周期軌道

- ◆ 各フラグメント球内に局在する正多角形軌道
⇒ 変形によるネック形成とともに存在領域が拡大し、準位密度への寄与が成長



- ◆ ネック部を通る周期軌道

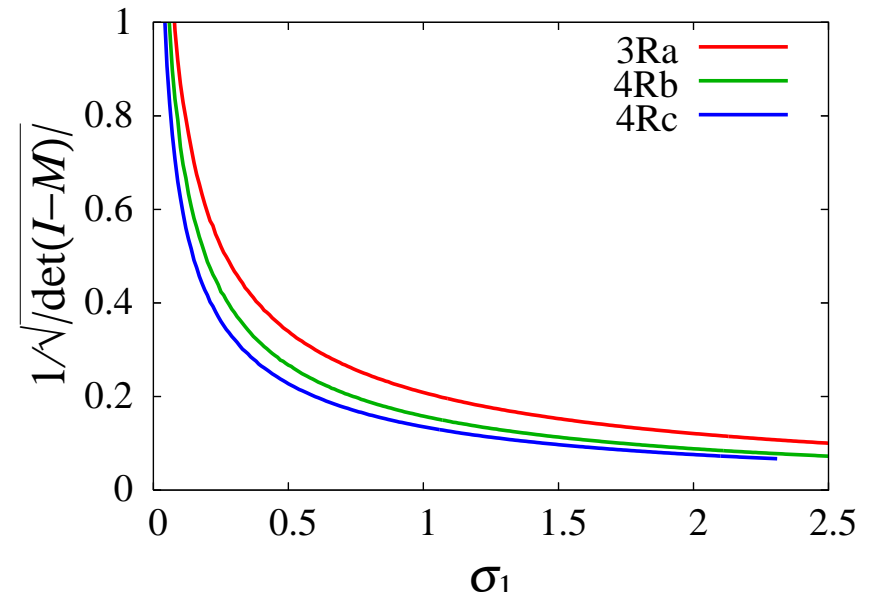


⇒ 変形による不安定化のため準位密度に対する寄与は急速に減少

トレース公式の振幅因子に対する
安定性の寄与

$$A_{PO} \propto \frac{1}{\sqrt{|\det(I - M_{PO})|}}$$

M_{PO} : モノドロミー行列 (軌道の
線形安定性を表す)



□ 変形シェル構造に対するフラグメントの寄与

- ◆ フラグメント内には球形キャビティと同一の軌道 (p, t) が存在
 p : 頂点の数, t : 中心まわりの回転数
- ◆ 球形キャビティに対するトレース公式 (Balian-Bloch 1972)

$$\delta E^{\text{sph}}(N; R) = \sum_{pt} \mathcal{A}_{pt}^{\text{sph}}(k_F, R) \cos\left(k_F L_{pt}(R) - \pi\mu_{pt}/2\right)$$

- ◆ 球形フラグメント内では, 正三角形軌道 $(p, t) = (3, 1)$ の寄与が支配的
- ◆ ネック部に接続されているため, 軌道の存在範囲に制限

$$\begin{aligned} \delta E_i(N) &\approx f_3^{(i)}(\sigma_1, \alpha_2) \mathcal{A}_{31}^{\text{sph}}(k_F, R_i) \cos\left(k_F L_{31}(R_i) - \pi\mu_{31}/2\right) \\ &\approx f_3^{(i)}(\sigma_1, \alpha_2) \delta E^{\text{sph}}(N_i, R_i), \quad N_i \approx \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^3 N \end{aligned}$$

相対係数 $f_3^{(i)}$ は軌道がフラグメント内で占有する位相空間体積に関係

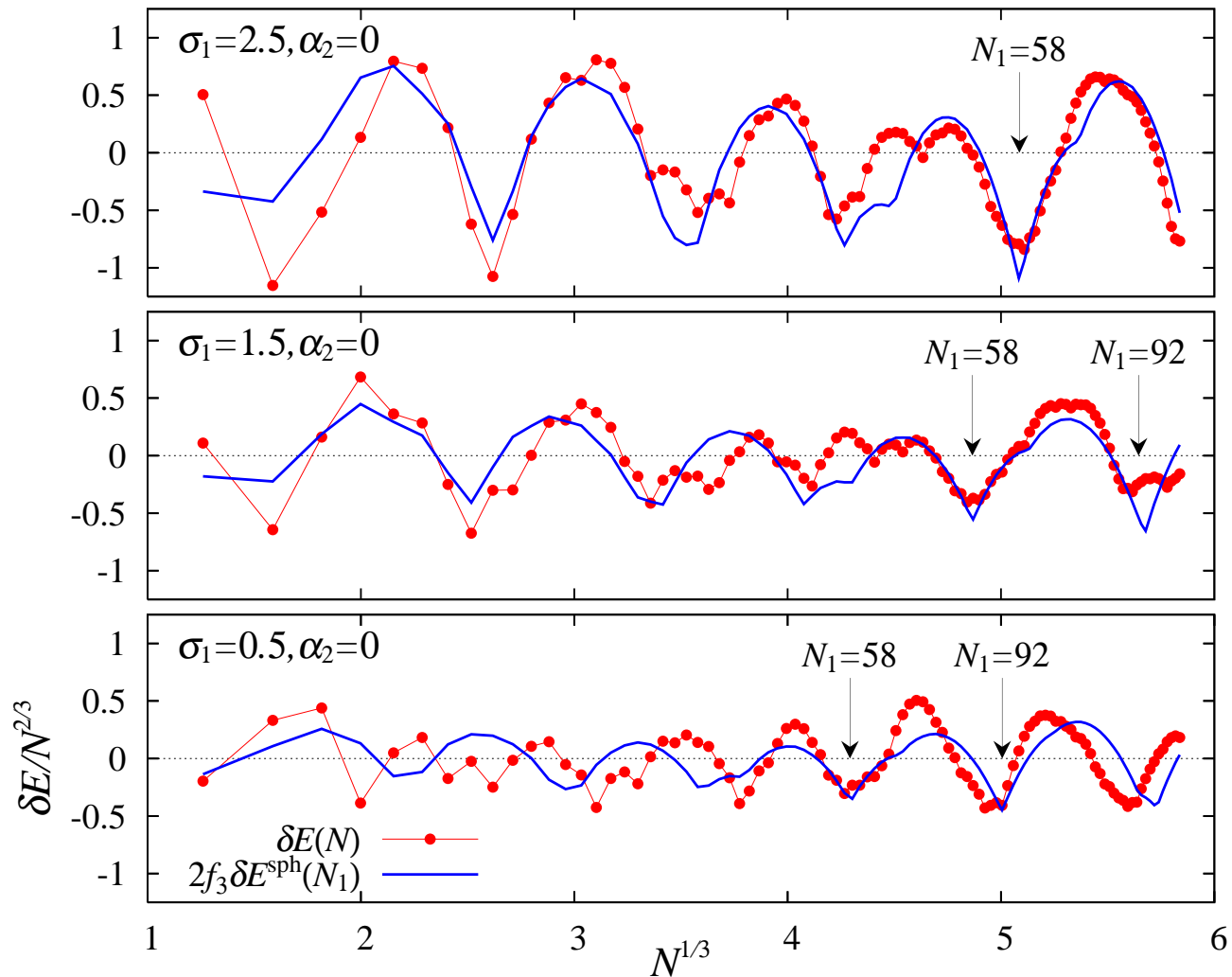
- ◆ フラグメントのシェル効果 \equiv フラグメントに局在する周期軌道の寄与

$$\begin{aligned} \delta E(N) &\approx \delta E_1(N) + \delta E_2(N) \\ &\approx f_3^{(1)} \delta E^{\text{sph}}(N_1, R_1) + f_3^{(2)} \delta E^{\text{sph}}(N_2, R_2) \end{aligned}$$

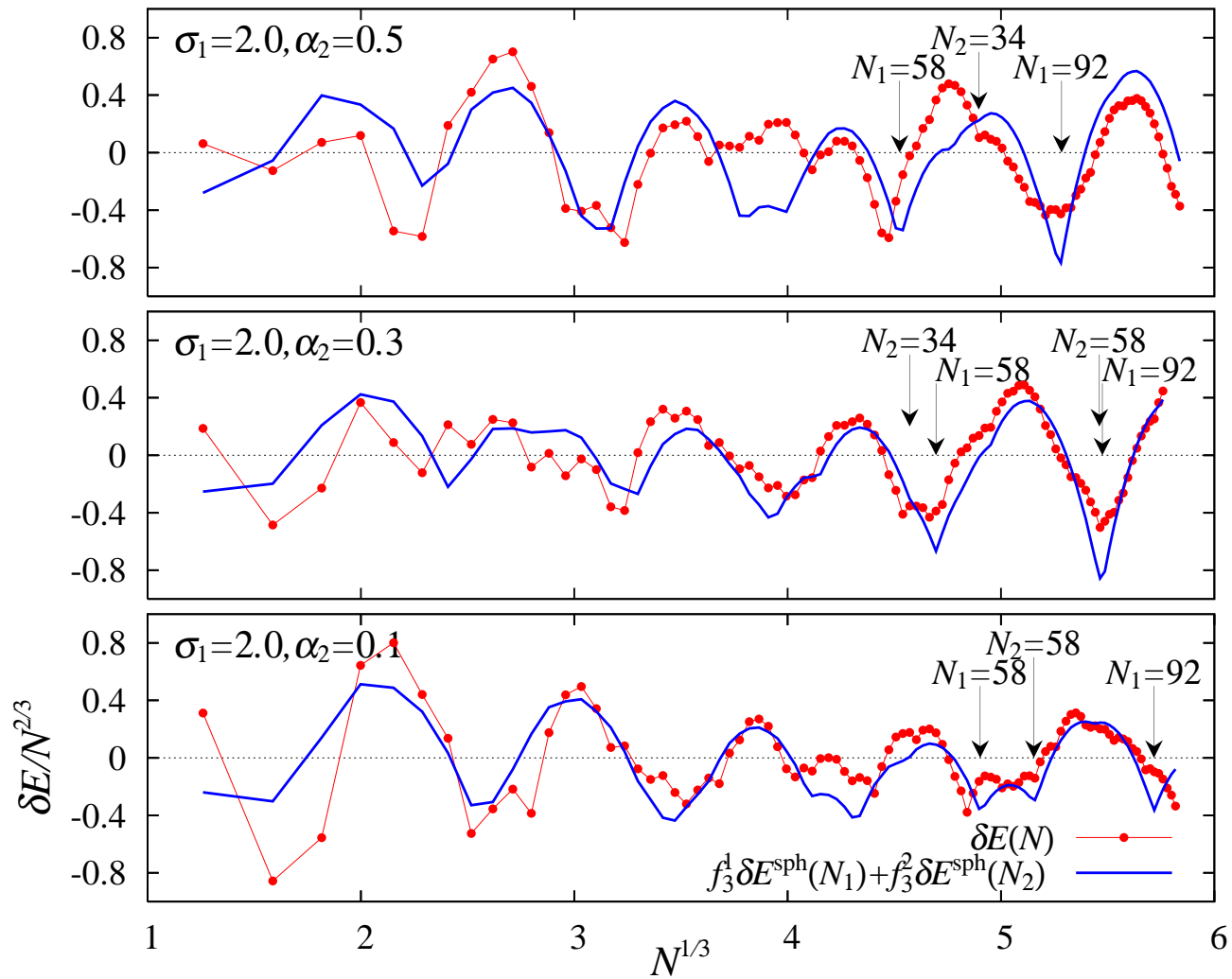
□ シェルエネルギーに対するフラグメントの寄与

フラグメント内での軌道の相対振幅 $f_p^{(i)}$ をフーリエ変換により評価し、シェルエネルギーとフラグメントのシェル効果を比較

◎ 対称変形



◎ 非対称変形



- ★ 変形が進むにつれ、フラグメントに局在する軌道の寄与が支配的になる
- ★ フラグメントのマジック数と変形エネルギー極小の強い相関
- ★ 両フラグメントのマジックが重なるところで大きな変形エネルギー利得

□ 核分裂過程の変形シェル構造に対するフラグメント魔法数の影響

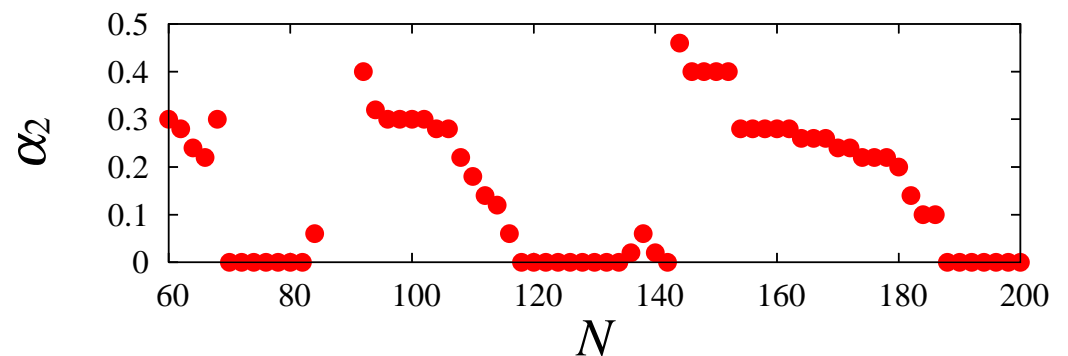
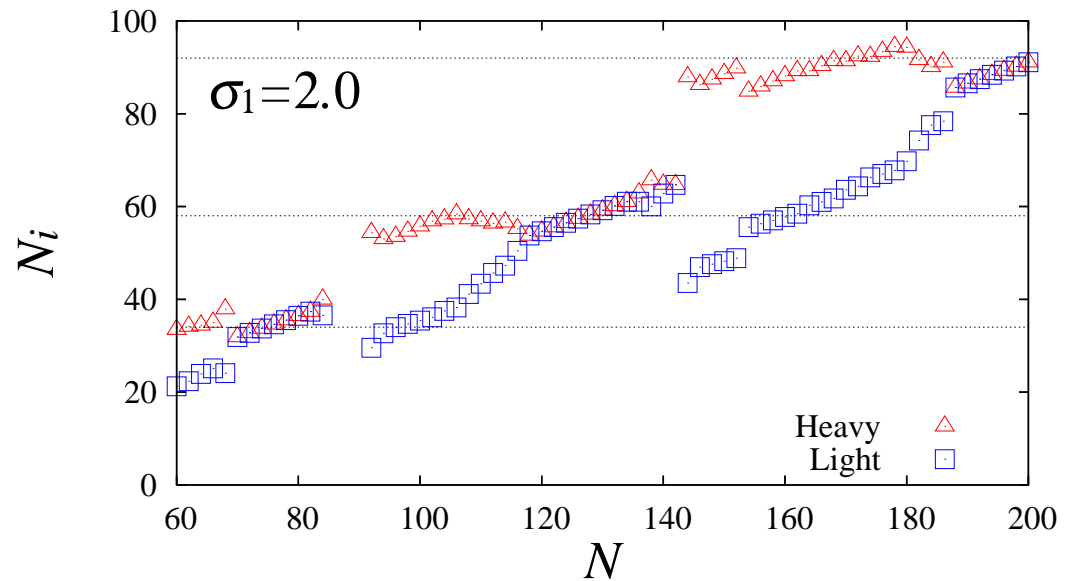
伸長度 σ_1 を固定し, 質量非対称度 α_2 についてシェルエネルギーを最小化

⇒ フラグメント半径 R_1, R_2 から換算される粒子数 N_1, N_2 をプロット

$$N_1 \approx \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^3 N$$

$$N_2 \approx \left(\frac{R_2}{R_0} \right)^3 N$$

- ◆ 重いフラグメントは魔法数
をとり球形
- ◆ 軽いフラグメントの粒子数
は親核粒子数とともに連続
的に変化し、魔法数と魔法
数の間で変形
(現実的計算結果とも符合)



★ アクチノイド領域の核分裂におけるフラグメント質量分布を定性的に再現

★ 陽子過剰 Hg 領域の非対称変形エネルギー極小 \Leftrightarrow ^{90}Zr のシェル効果?

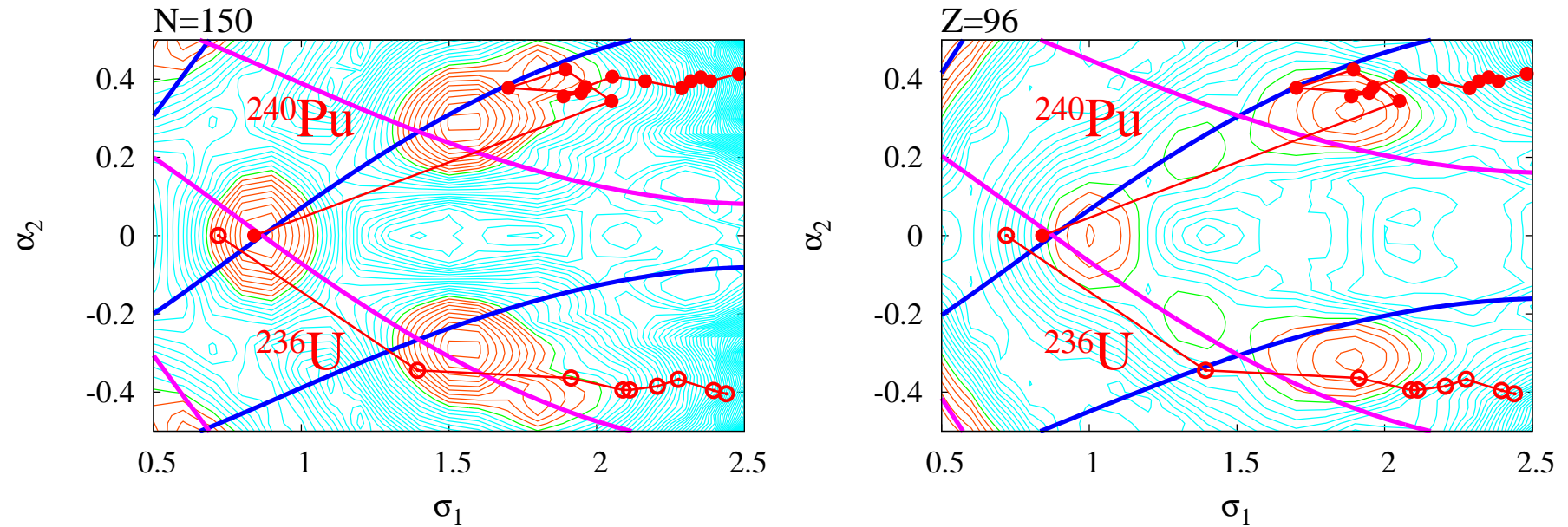
□ フラグメント魔法数を与える周期軌道の等作用曲線

変形曲面 (σ_1, α_2) 上のエネルギーの谷は正三角形軌道の作用積分で決まる

$$k_F(N)L_{31}^{(i)}(\sigma_1, \alpha_2) - \frac{\pi}{2}\mu_{31} = (2n + 1)\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$L_{31}^{(i)}(\sigma_1, \alpha_2) = \frac{(2n + 1 + \mu_{31}/2)\pi}{k_F(N)}$$

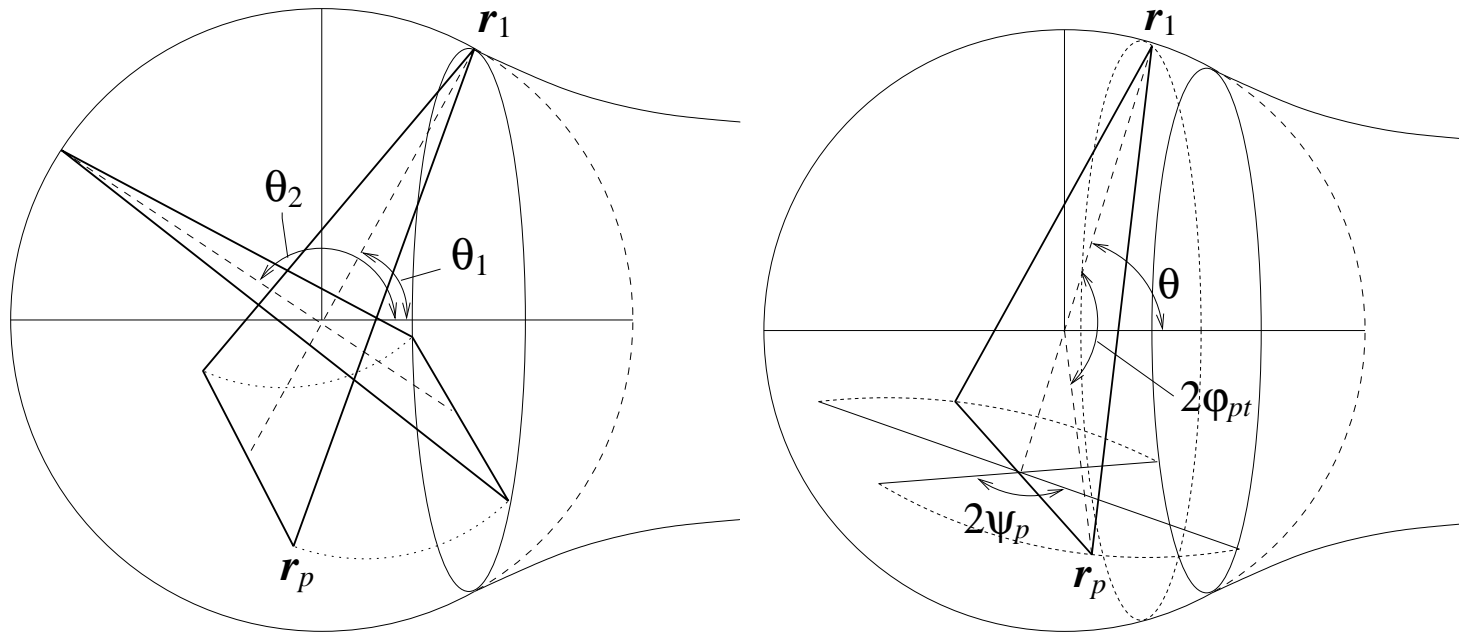
アクチノイド領域 \Leftrightarrow cavity with $(N, Z) \approx (150, 100)$



- ★ 正三角形軌道の等作用曲線に沿ってポテンシャルエネルギー曲面の谷
 \Rightarrow fission path の半古典的起源
- ★ 現実的模型計算での fission path を定性的に再現

フラグメント局在軌道の振幅の決定

- 球形フラグメントに局在する正多角形軌道の寄与
 周期，安定性などの性質は完全な球形キャビティ内の軌道と同一
 縮退軌道の振幅 \propto フラグメント内での占有体積 \cdots ネック部との接続による減少



占有体積の，完全な球形の場合に対する相対値は

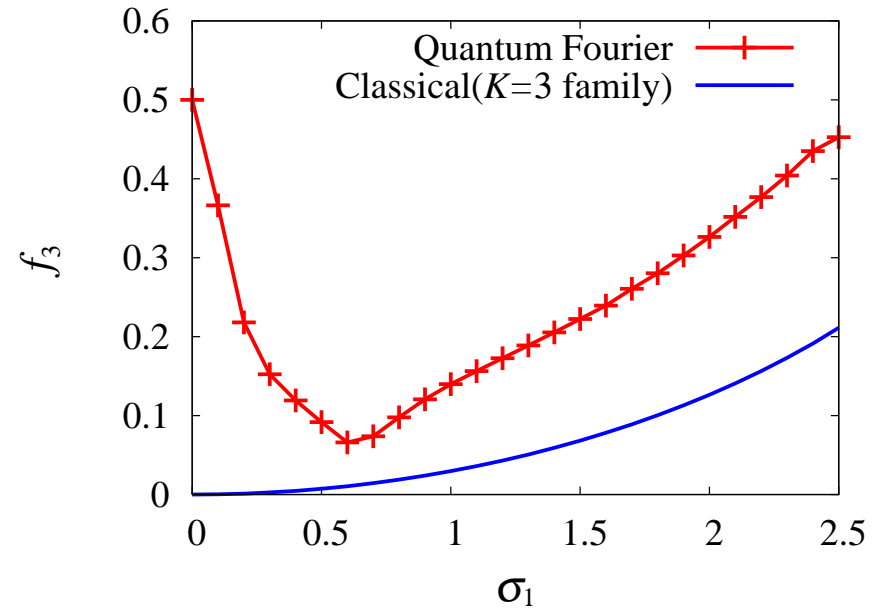
$$f_p = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi_p(\theta) \sin \theta d\theta$$

Fourier 変換による評価との比較

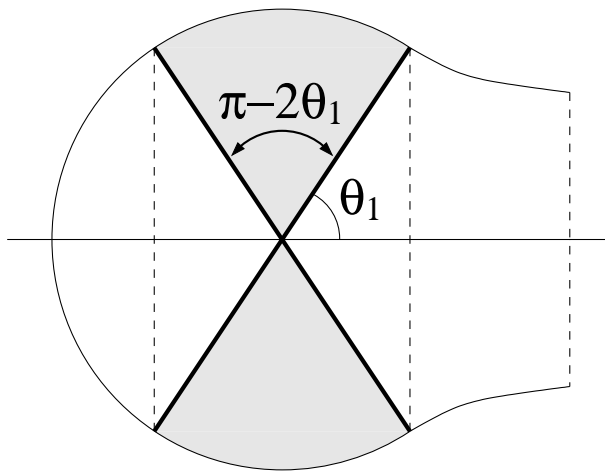
◎ 正三角形軌道 (3,1) in 3D cavity

$$f_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi_3(\theta) \sin \theta d\theta$$

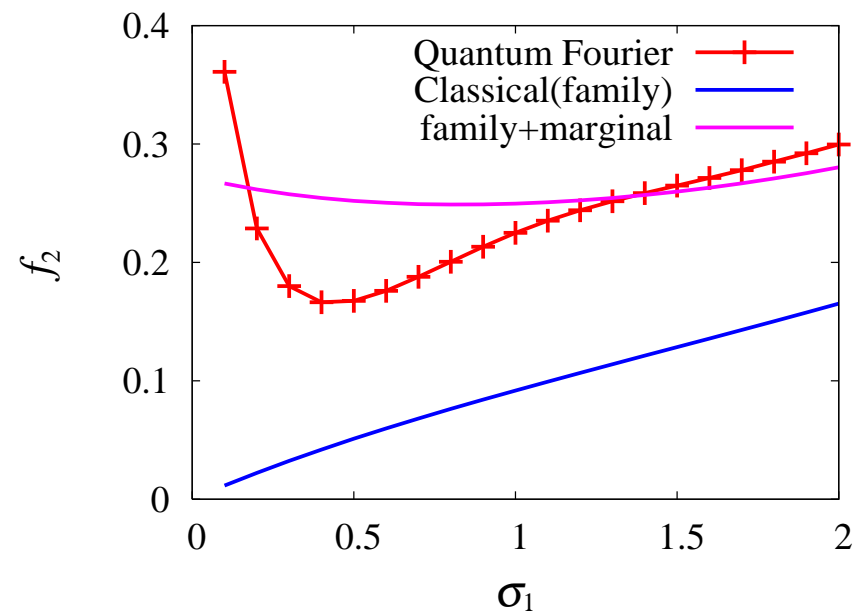
準位密度のフーリエ振幅から得られる
実際の寄与をかなり underestimate



◎ 直線軌道 (2,1) in 2D billiard



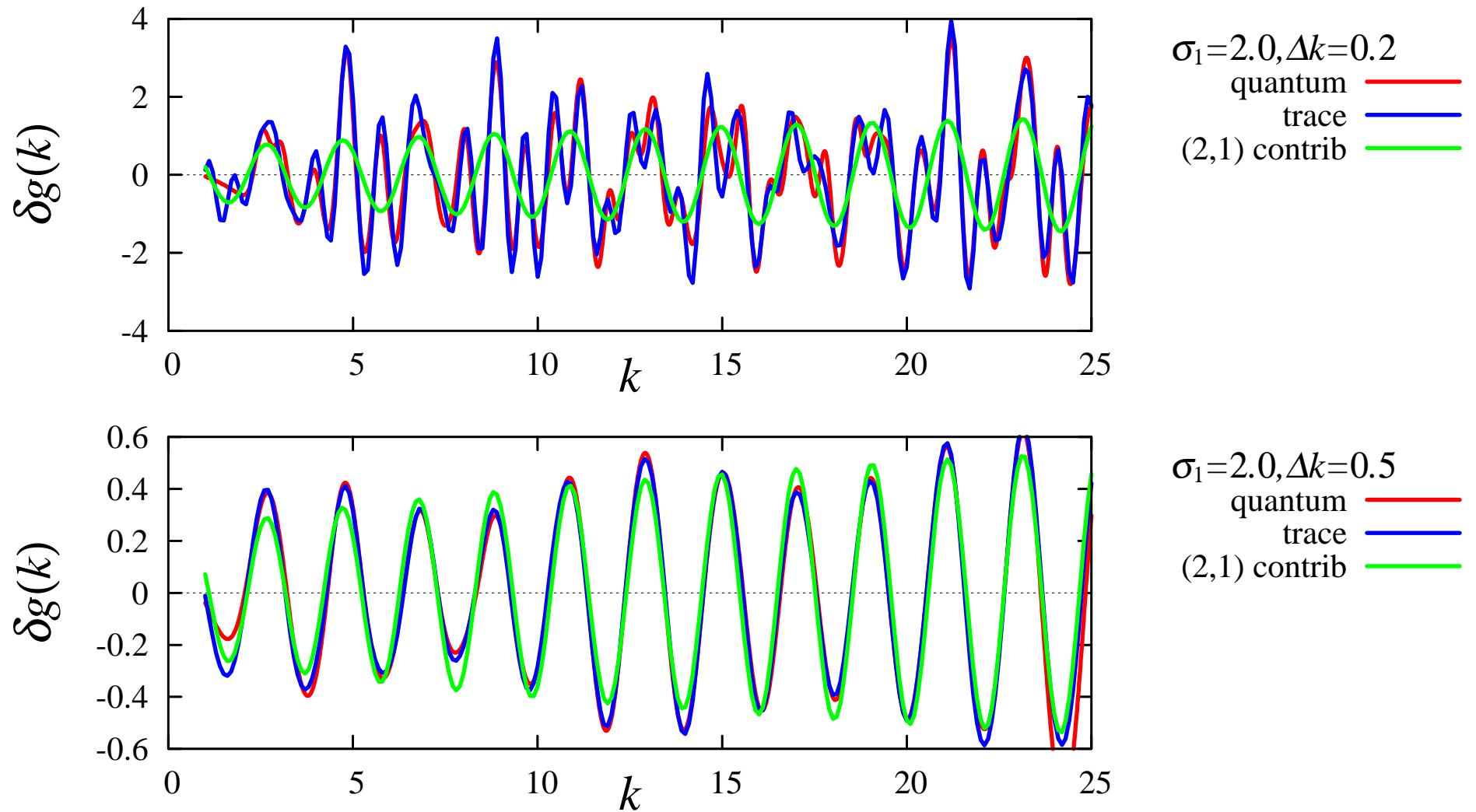
$$f_2 = \frac{\pi - 2\theta_1}{\pi}$$



★ ネックとの接続部にある **marginal orbit** (表面項) が重要

トレース公式の評価 (2次元ビリヤード模型)

幅 Δk で粗視化された準位密度揺らぎ \Leftrightarrow 長さ $L < 2\pi/\Delta k$ の軌道の寄与



SUMMARY

- TQS キャビティモデルにより核分裂過程のシェル構造を分析
- 周期軌道理論によりフラグメントのシェル効果を定義
変形が進むにつれ、シェルエネルギーに対するフラグメントの寄与が支配的に
⇐ フラグメント局在軌道（正三角形軌道の3パラメータ族）の寄与の増大
- シェルエネルギーは分裂過程初期からフラグメント魔法数の強い影響を受ける。
ポテンシャル曲面の谷 (fission path) とフラグメントに局在する正三角形軌道の
寄与の対応 ⇒ 非対称核分裂の半古典的起源
- 半古典準位密度に対するフラグメント局在軌道の寄与（トレース公式）
2次元ビリヤードモデルの分析により、marginal orbits（表面項）の重要性を指摘

今後の課題

- 3次元キャビティモデルにおけるフラグメント局在軌道の marginal orbits の寄与
- フラグメント変形の自由度の役割
- より現実的な平均場モデルへの拡張